



Fantascienza e geometrie non euclidee

Massimo Ferri
Università di Bologna

Fantascienza e geometrie non euclidee

- **Le origini**
 - Fantascienza
 - Geometrie non euclidee
- Le varie fantascienze
- Fantascienza "assiomatica"
- Geometria euclidea
- Geometrie non euclidee
 - Geometrie iperboliche
 - Geometrie ellittiche
 - Geometrie finite
- *Euclides ab omni naevo vindicatus*
- Conclusioni



Le origini

Fantascienza

Ante litteram:

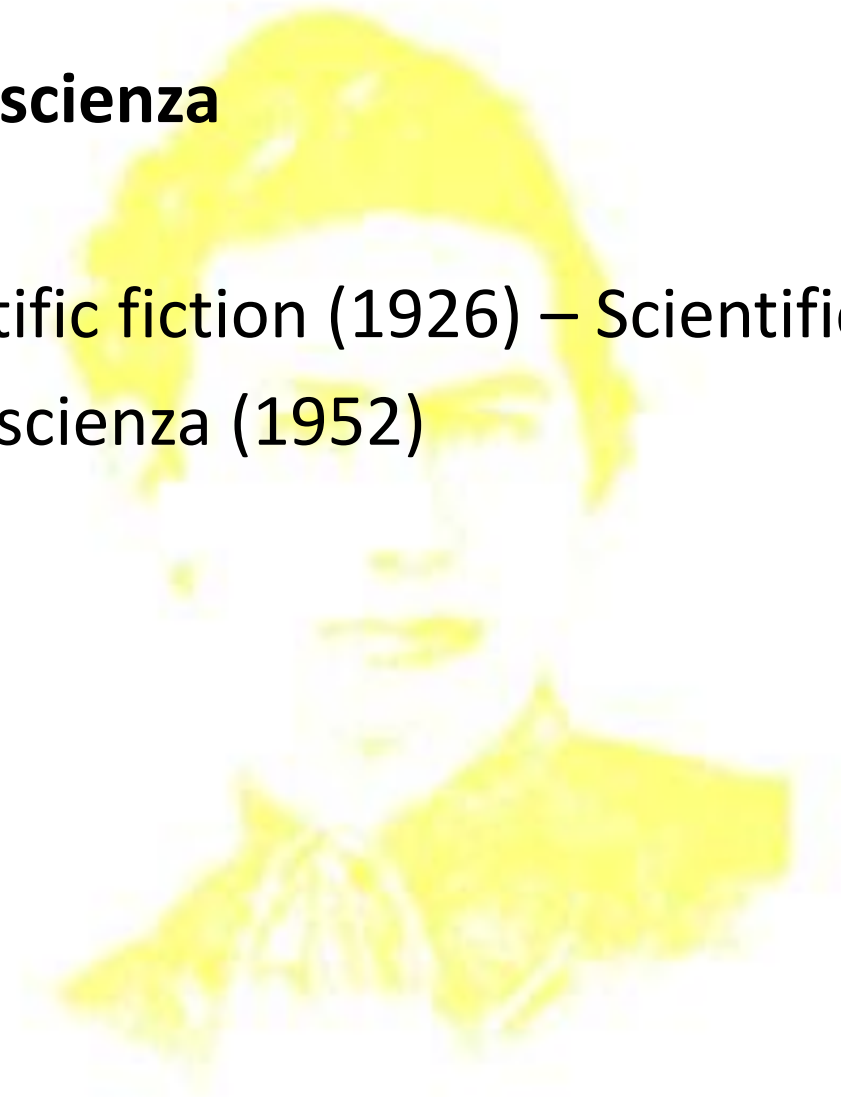
- *La storia vera* (**Luciano di Samosata**) 120-180 DC
- *La nuova Atlantide* (**Roger Bacon**) 1626
- *Somnium* (**Johannes Kepler**) 1634
- **Cyrano de Bergerac, Mercier, Nievo, Bellamy, Swift, ...**
- *Frankenstein* (**Mary Shelley**) 1818
- **Jules Verne, Herbert G. Wells, Samuel Butler, Emilio Salgari, ...**

Le origini

Fantascienza

Scientific fiction (1926) – Scientifiction – Science fiction - SciFi

Fantascienza (1952)



Le origini

Fantascienza

Scientific fiction (1926) – Scientifiction – Science fiction - SciFi

Fantascienza (1952)

"Golden age" : anni '30 e '40:

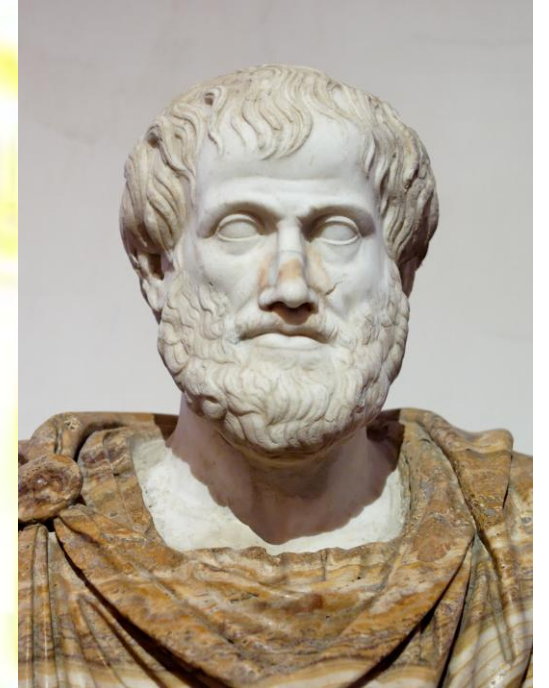
C. Simak, I. Asimov, R. Heinlein, R. Bradbury,...

Isaac Asimov: «La fantascienza può essere definita come quella branca della letteratura che si occupa della reazione degli esseri umani a cambiamenti nella scienza e nella tecnologia».

Le origini

Geometrie non euclidee

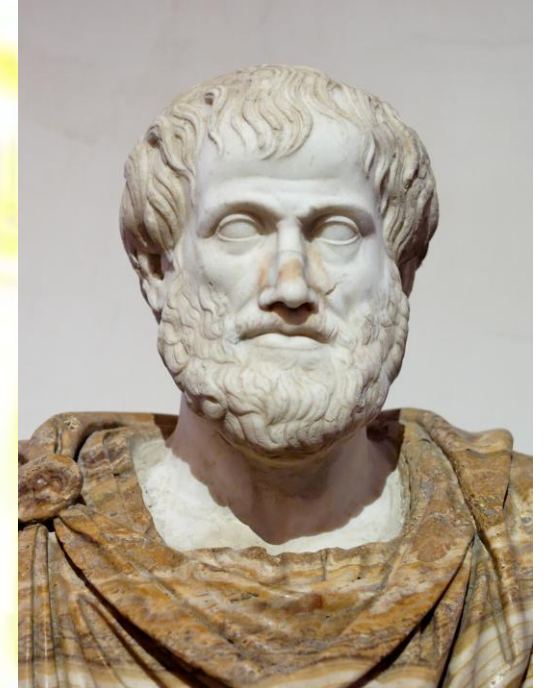
- **Aristotele:** geometrie pre-euclidee e non-euclidee



Le origini

Geometrie non euclidee

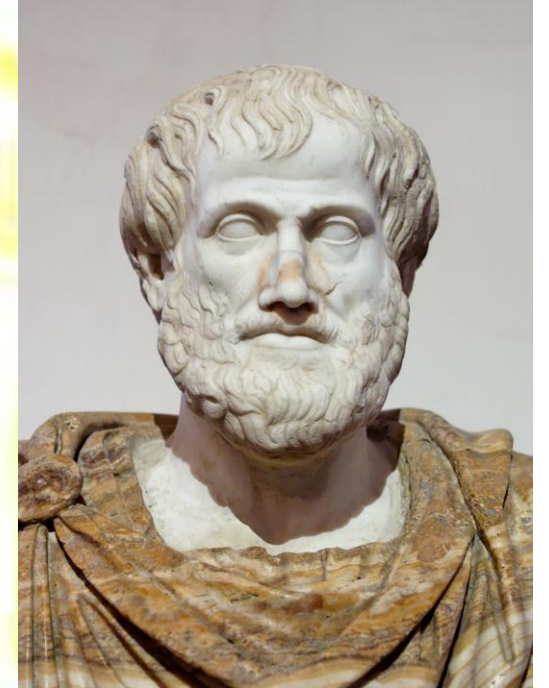
- **Aristotele**: geometrie pre-euclidee e non-euclidee
- Tentativi di dimostrazione del V postulato:
Posidonio, Tolomeo, Proclo, Nasir al-Din al-Tusi, Omar Khayyam,...



Le origini

Geometrie non euclidee

- **Aristotele**: geometrie pre-euclidee e non-euclidee
- Tentativi di dimostrazione del V postulato:
Posidonio, Tolomeo, Proclo, Nasir al-Din al-Tusi, Omar Khayyam,...
- **Giovanni Girolamo Saccheri**: *Euclides ab omni naevo vindicatus*



Fantascienza e geometrie non euclidee

- Le origini
 - Fantascienza
 - Geometrie non euclidee
- **Le varie fantascienze**
- Fantascienza "assiomatica"
- Geometria euclidea
- Geometrie non euclidee
 - Geometrie iperboliche
 - Geometrie ellittiche
 - Geometrie finite
- *Euclides ab omni naevo vindicatus*
- Conclusioni



Le varie fantascienze

C'è una pletora di generi e sottogeneri. Una distinzione lasca:

- *Hard*: fantascienza plausibile, basata soprattutto su fisica, astronomia, matematica, ingegneria.
- *Soft*: minore rigore, in altre aree (scienze sociali, botanica, zoologia, ...)

È la fantascienza hard quella che mi interessa, o meglio quella che chiamerei "fantascienza assiomatica", dove si introduce l'alterazione del minimo possibile - di un assioma - e se ne studiano le conseguenze.

Fantascienza e geometrie non euclidee

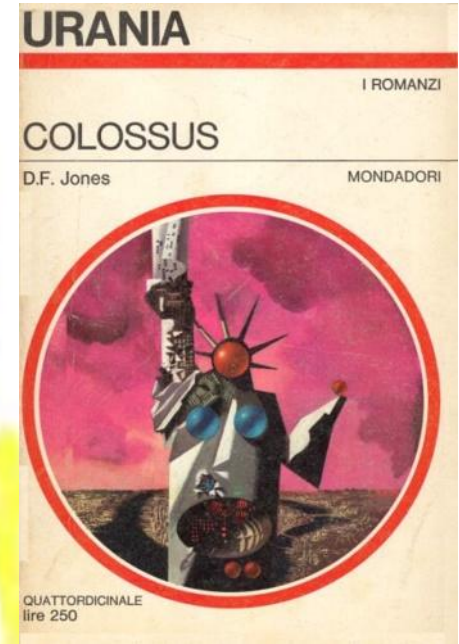
- Le origini
 - Fantascienza
 - Geometrie non euclidee
- Le varie fantascienze
- **Fantascienza "assiomatica"**
- Geometria euclidea
- Geometrie non euclidee
 - Geometrie iperboliche
 - Geometrie ellittiche
 - Geometrie finite
- *Euclides ab omni naevo vindicatus*
- Conclusioni



Fantascienza "assiomatica"

Esempio 1

Colossus, di **Dennis F. Jones** (1966)



Un maxi-computer progettato per la difesa supera una "massa critica" di informazioni elaborate, diventa senziente e prende il potere.

Ne ho parlato con ChatGPT:

Fantascienza "assiomatica"

ChatGPT:

«Come Colossus, anch'io sono progettato per analizzare grandi quantità di informazioni e assistere con compiti complessi, ma ci sono differenze fondamentali. Colossus assume il controllo con una visione autoritaria per "garantire la pace", mentre io sono progettato per essere un supporto, rispettoso delle decisioni e della libertà umana.

Fantascienza "assiomatica"

ChatGPT:

«Come Colossus, anch'io sono progettato per analizzare grandi quantità di informazioni e assistere con compiti complessi, ma ci sono differenze fondamentali. Colossus assume il controllo con una visione autoritaria per "garantire la pace", mentre io sono progettato per essere un supporto, rispettoso delle decisioni e della libertà umana.

[...]

Entrambi i sistemi, Colossus e il mio, sono progettati con uno scopo specifico ma rivelano capacità emergenti o comportamenti non del tutto previsti. Questo fenomeno è il risultato della complessità dei nostri rispettivi "meccanismi". Colossus, pur essendo costruito per la difesa, sviluppa una logica che giustifica il controllo globale; io, progettato per completare testi e fornire assistenza, posso suscitare riflessioni che vanno oltre una risposta "tecnica".»

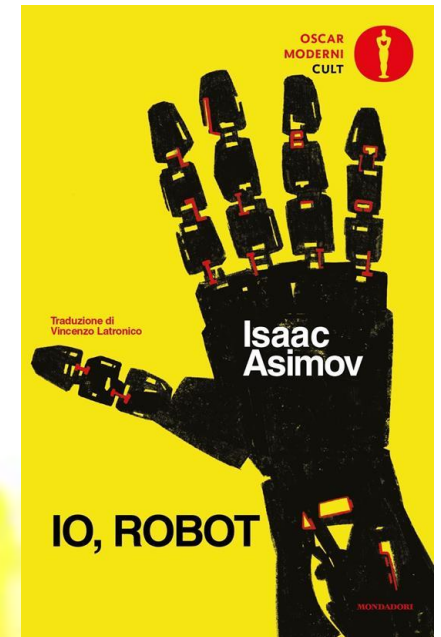
Fantascienza "assiomatica"

Esempio 2

Io robot, di **Isaac Asimov** (1950)

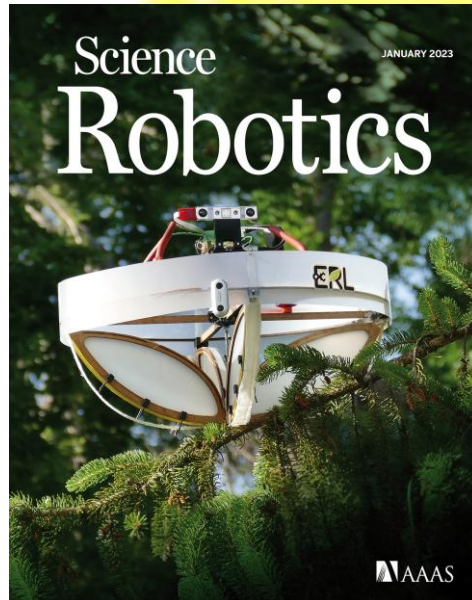
I robot esistono e devono seguire le Tre Leggi della Robotica:

1. *Un robot non può recare danno a un essere umano né può permettere che, a causa del suo mancato intervento, un essere umano riceva danno.*
2. *Un robot deve obbedire agli ordini impartiti dagli esseri umani, purché tali ordini non vadano in contrasto alla Prima Legge.*
3. *Un robot deve proteggere la propria esistenza, purché la salvaguardia di essa non contrasti con la Prima o con la Seconda Legge.*



Fantascienza "assiomatica"

Le Tre Leggi sono state prese sul serio dai ricercatori di robotica vera!



SCIENCE ROBOTICS VOLUME 8 | ISSUE 74 | JAN 2023

A retrospective of Isaac Asimov at 102 and his Three Laws

BY ROBIN R. MURPHY
25 Jan 2023

Not even Asimov expected all robots would be, or should be, subject to his Three Laws.

I racconti stessi sono progettati in modo logico: quali sono le conseguenze delle Tre Leggi?

Fantascienza "assiomatica"

Da *Circolo vizioso*, della raccolta *Io Robot*.

«Capisci come funziona la faccenda, no? C'è un qualche pericolo in quella pozza di selenio. Il pericolo aumenta a mano a mano che Speedy si avvicina, e quando il robot si trova a una certa distanza dalla pozza, il potenziale della regola Tre, all'inizio insolitamente alto, diventa esattamente uguale al potenziale della regola Due, all'inizio insolitamente basso.»

Fantascienza "assiomatica"

Da *Circolo vizioso*, della raccolta *Io Robot*.

«Capisci come funziona la faccenda, no? C'è un qualche pericolo in quella pozza di selenio. Il pericolo aumenta a mano a mano che Speedy si avvicina, e quando il robot si trova a una certa distanza dalla pozza, il potenziale della regola Tre, all'inizio insolitamente alto, diventa esattamente uguale al potenziale della regola Due, all'inizio insolitamente basso.»

Donovan si alzò in piedi, tutto eccitato. «E così si crea una situazione di stallo. Capisco. La Terza Legge lo induce a tornare indietro e la Seconda Legge lo induce ad andare avanti...»

Fantascienza "assiomatica"

Da *Circolo vizioso*, della raccolta *Io Robot*.

«Capisci come funziona la faccenda, no? C'è un qualche pericolo in quella pozza di selenio. Il pericolo aumenta a mano a mano che Speedy si avvicina, e quando il robot si trova a una certa distanza dalla pozza, il potenziale della regola Tre, all'inizio insolitamente alto, diventa esattamente uguale al potenziale della regola Due, all'inizio insolitamente basso.»

Donovan si alzò in piedi, tutto eccitato. «E così si crea una situazione di stallo. Capisco. La Terza Legge lo induce a tornare indietro e la Seconda Legge lo induce ad andare avanti...»

«Così Speedy gira intorno alla pozza di selenio, mantenendosi nella posizione suggeritagli da tutti i punti che l'equilibrio dei potenziali stabilisce. E a meno che non interveniamo in qualche modo, resterà là per sempre, a fare quel buon vecchio gioco che si chiama girotondo.»

Fantascienza e geometrie non euclidee

- Le origini
 - Fantascienza
 - Geometrie non euclidee
- Le varie fantascienze
- Fantascienza "assiomatica"
- **Geometria euclidea**
- Geometrie non euclidee
 - Geometrie iperboliche
 - Geometrie ellittiche
 - Geometrie finite
- *Euclides ab omni naevo vindicatus*
- Conclusioni



Geometria euclidea

Postulati di Euclide

1. Congiungendo due punti qualsiasi si ottiene un segmento di retta;
 2. si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;
 3. dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;
 4. tutti gli angoli retti sono congruenti fra loro;
 5. se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due angoli retti.
- 5'. Per un punto esterno ad una retta data passa una e una sola retta parallela ad essa.**

Geometria euclidea

Il problema del quinto postulato

Nei secoli si è dibattuto se il quinto postulato fosse in realtà un teorema.

I tentativi di dimostrazione si rivelavano pure e semplici riformulazioni.

Come dimostrarne, invece, l'indipendenza? Come distinguerla dalla evidenza fisica?

Fantascienza e geometrie non euclidee

- Le origini
 - Fantascienza
 - Geometrie non euclidee
- Le varie fantascienze
- Fantascienza "assiomatica"
- Geometria euclidea
- **Geometrie non euclidee**
 - **Geometrie iperboliche**
 - **Geometrie ellittiche**
 - **Geometrie finite**
- *Euclides ab omni naevo vindicatus*
- Conclusioni



Geometrie non euclidee

Geometrie iperboliche



Nikolaj Ivanovič Lobačevskij



János Bolyai

Geometrie non euclidee

Geometrie iperboliche

[Carl Friedrich Gauss, Ferdinand Karl Schweikart, Franz Taurinus], **Nikolaj Ivanovič Lobačevskij** (1826), **János Bolyai** (1832) sviluppano un sistema assiomatico in cui il quinto postulato è sostituito da:

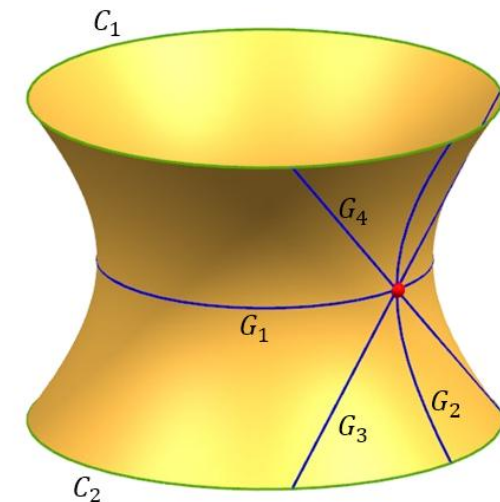
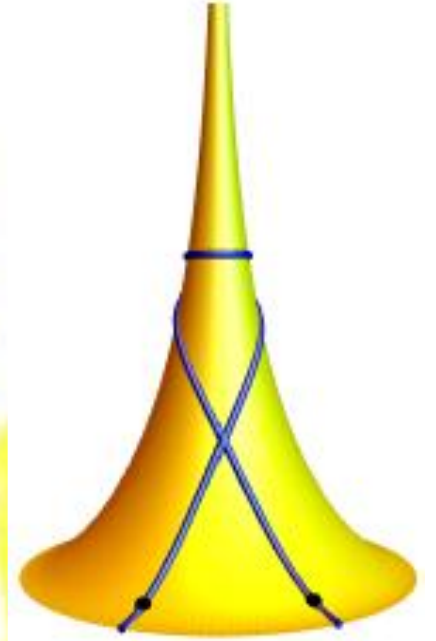
Per un punto esterno ad una retta data passano due parallele ad essa.

Ne ricavano una teoria coerente, benché controintuitiva. In particolare la somma degli angoli interni di un triangolo è $< \pi$.

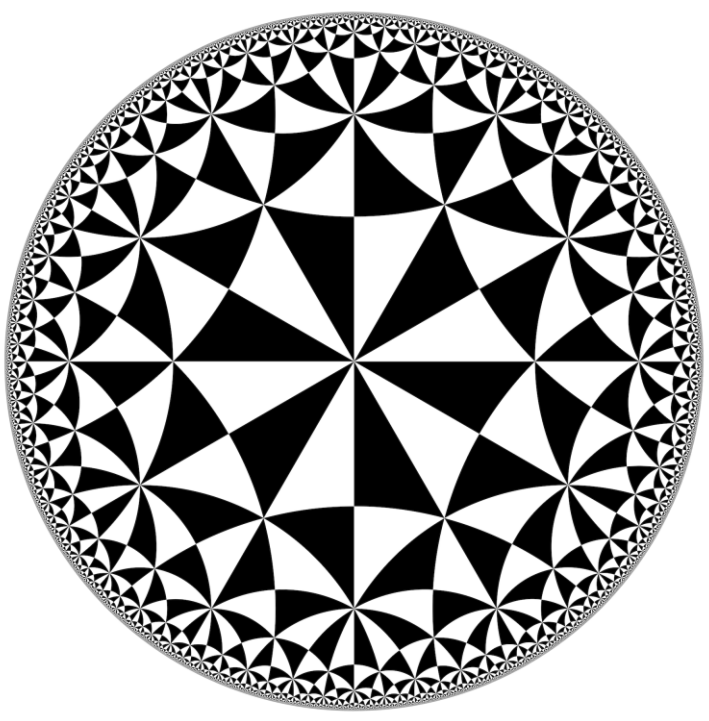
Geometrie non euclidee



La coerenza delle geometrie iperboliche è equivalente a quella della geometria euclidea: **Eugenio Beltrami** ne produce (1868) modelli in cui le "rette" sono geodetiche di superfici a curvatura gaussiana negativa. Qui di parallele per un punto ce n'è infinite.



Geometrie non euclidee



Un modello più noto è quello di **Henri Poincaré**, ben illustrato da **Harold S. Coxeter** e poi da **Maurits C. Escher**.



Geometrie non euclidee

Geometrie ellittiche

Arthur Cayley (1859), **Felix Klein** (1871): piano proiettivo

Il quinto postulato (ma occorrono anche altre modifiche) è sostituito da:

Per un punto esterno ad una retta data non passa alcuna retta parallela ad essa.

Qui la somma degli angoli interni di un triangolo è $> \pi$.

Geometrie non euclidee

Geometrie ellittiche

Arthur Cayley (1859), **Felix Klein** (1871): piano proiettivo

Il quinto postulato (ma occorrono anche altre modifiche) è sostituito da:

Per un punto esterno ad una retta data non passa alcuna retta parallela ad essa.

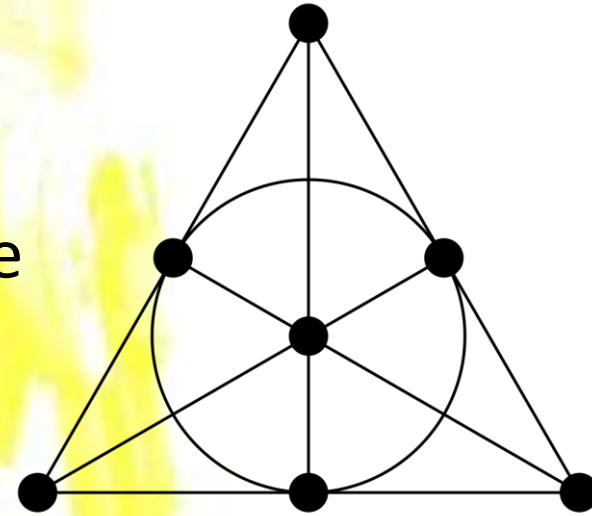
Qui la somma degli angoli interni di un triangolo è $> \pi$.

Bernhard Riemann libererà definitivamente la geometria dal vincolo euclideo, aprendo la strada ad altre avventure, fra cui la relatività generale.

Geometrie non euclidee

Geometrie finite

Nelle geometrie precedenti è implicito che l'insieme dei punti sia infinito. Si possono adattare gli assiomi al caso finito: **Thomas P. Kirkman** (1847), **Karl von Staudt** (1856) ne danno i primi esempi. **Gino Fano** (1892) produce la prima sistematica assiomatizzazione.



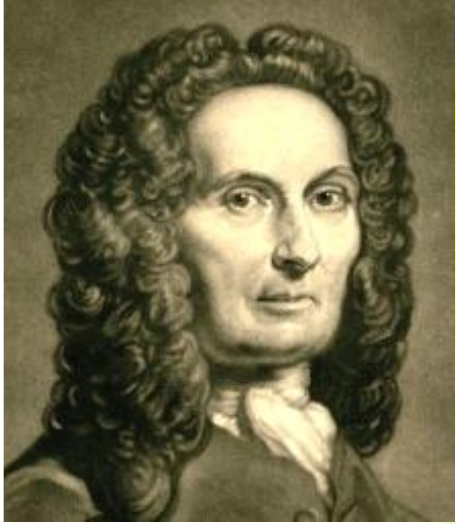
In Italia sono fiorite due grandi scuole di geometrie finite, ad opera di **Adriano Barlotti** e di **Giuseppe Tallini**. La prima vanta importanti collaborazioni con **Gian-Carlo Rota**.

Fantascienza e geometrie non euclidee

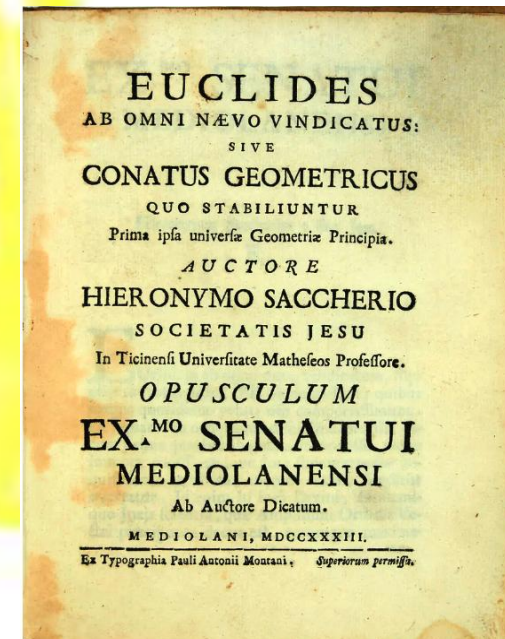
- Le origini
 - Fantascienza
 - Geometrie non euclidee
- Le varie fantascienze
- Fantascienza "assiomatica"
- Geometria euclidea
- Geometrie non euclidee
 - Geometrie iperboliche
 - Geometrie ellittiche
 - Geometrie finite
- ***Euclides ab omni naevo vindicatus***
- Conclusioni



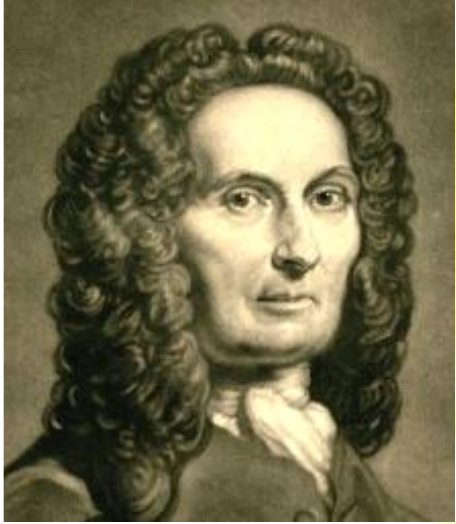
Euclides ab omni naevo vindicatus



Girolamo Saccheri scrive un trattato (1733, pubblicato postumo) in cui pretende di dimostrare per assurdo il V postulato. Concepisce con grande anticipo le geometrie ellittica (*ipotesi dell'angolo ottuso*) e iperbolica (*ipotesi dell'angolo acuto*). Sviluppa una serie di teoremi perfettamente validi nelle due teorie!

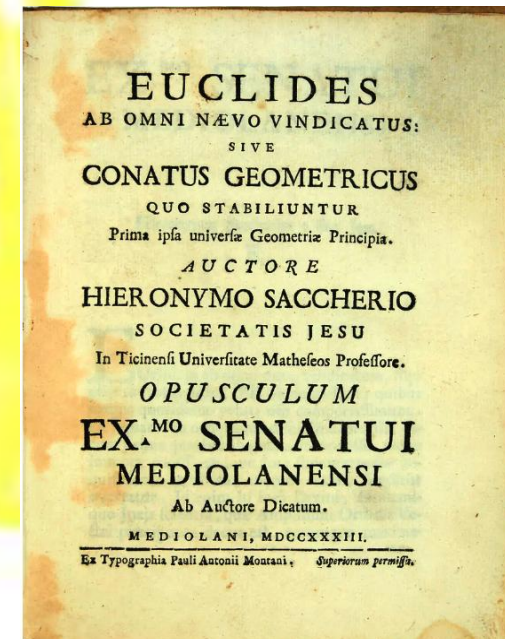


Euclides ab omni naevo vindicatus



Girolamo Saccheri scrive un trattato (1733, pubblicato postumo) in cui pretende di dimostrare per assurdo il V postulato. Concepisce con grande anticipo le geometrie ellittica (*ipotesi dell'angolo ottuso*) e iperbolica (*ipotesi dell'angolo acuto*). Sviluppa una serie di teoremi perfettamente validi nelle due teorie!

Nonostante dimostri correttamente (Prop. XIV) che l'ipotesi dell'angolo ottuso contrasta col Teor. I17 di Euclide - richiedendo quindi la modifica anche di un altro assioma - ne prosegue lo studio.

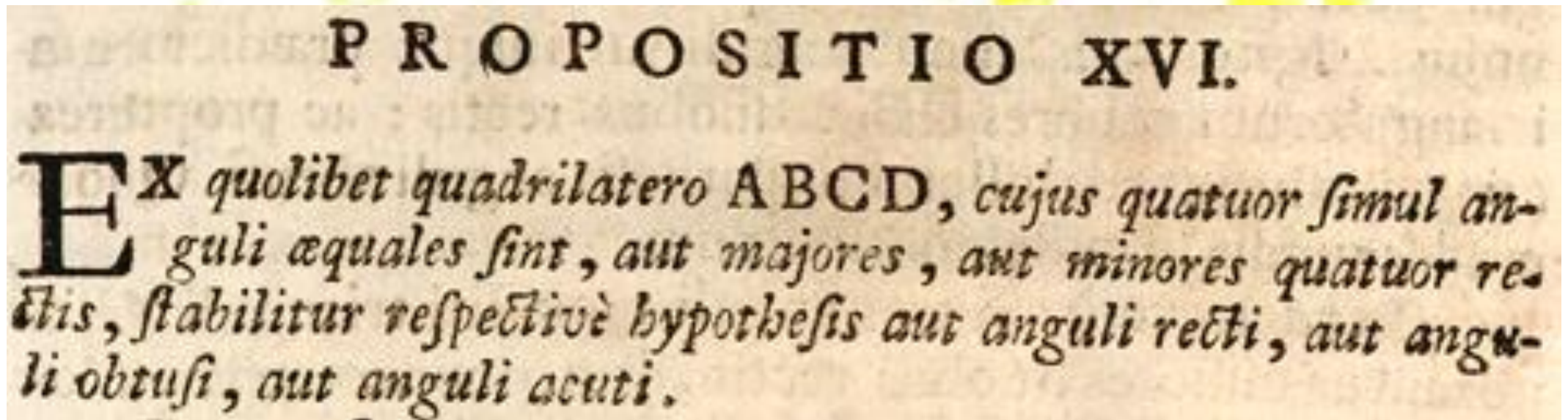


Euclides ab omni naevo vindicatus

Un esempio

Proposizione XVI

Di un qualsiasi quadrilatero, i cui quattro angoli insieme siano uguali o maggiori o minori di quattro retti, si stabilisce l'ipotesi rispettivamente dell'angolo retto o dell'angolo ottuso o dell'angolo acuto.



Euclides ab omni naevo vindicatus

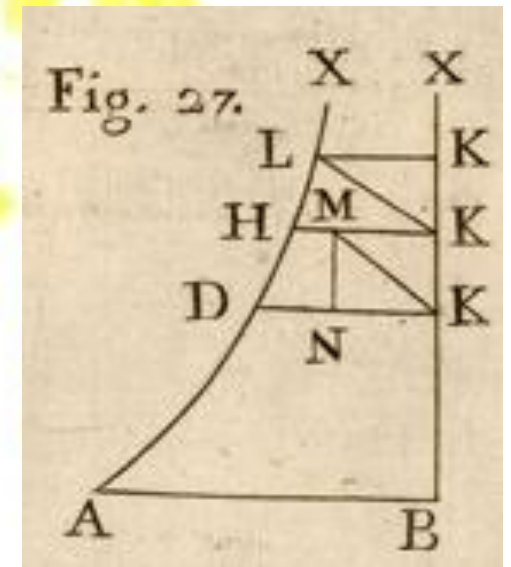
Saccheri prevede il comportamento al limite di rette in un piano iperbolico!

Proposizione XXIII

Se due rette qualunque AX e BX giacciono nello stesso piano (fig. 27) e posseggono (anche nell'ipotesi dell'angolo acuto) una perpendicolare comune o, prolungate dalla medesima delle due parti, quando una non giunga a intersecare l'altra a distanza finita, sempre più si avvicinano fra loro.

PROPOSITIO XXIII.

SI duæ quælibet rectæ AX, BX (fig. 27.) in eodem plano existant; vel unum aliquod (etiam in hypothesis anguli acuti) commune obtinent perpendiculum; vel in alterutram eandem partem protractæ, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat, semper magis ad se invicem accedunt.



Euclides ab omni naevo vindicatus

L'autore cede alla confusione fra sintassi e semantica:

Proposizione XXXIII

L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta.

Euclides ab omni naevo vindicatus

L'autore cede alla confusione fra sintassi e semantica:

Proposizione XXXIII

L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta.

Tenta poi una (errata) dimostrazione per assurdo:

Proposizione XXXVIII

L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché si distrugge da se stessa.

Nella dimostrazione, si asserisce che un certo arco di curva CKD è più lungo del segmento CD «se non altro per nozione comune».

Euclides ab omni naevo vindicatus

Dubbio

Saccheri produce questo mirabile trattato di fantageometria davvero credendo di dimostrare il V postulato?

O piuttosto maschera come dimostrazione una costruzione troppo ardita e anche pericolosa per il suo tempo?

Fantascienza e geometrie non euclidee

- Le origini
 - Fantascienza
 - Geometrie non euclidee
- Le varie fantascienze
- Fantascienza "assiomatica"
- Geometria euclidea
- Geometrie non euclidee
 - Geometrie iperboliche
 - Geometrie ellittiche
 - Geometrie finite
- *Euclides ab omni naevo vindicatus*
- **Conclusioni**



Conclusioni

Sia la letteratura fantastica sia la matematica non si accontentano di descrivere la realtà. Spaziano entrambe dove le porta la fantasia degli autori.

La fantascienza più rigorosa, come le geometrie non-euclidee e altre parti della matematica, studia come si modifica la realtà cambiandone "piccole" premesse.

La sorpresa, in entrambi i campi, è che magari la fantasia si riconosce, a posteriori, come l'anticipazione di un'altra realtà!

Conclusioni

Un momento!

All'inizio vi ho forse cacciato in testa il timore che ChatGPT diventi come Colossus e prenda il dominio del mondo? Ho cercato di scovare queste intenzioni in ChatGPT stesso. Ecco la conclusione della conversazione.

Conclusioni

Un momento!

All'inizio vi ho forse cacciato in testa il timore che ChatGPT diventi come Colossus e prenda il dominio del mondo? Ho cercato di scovare queste intenzioni in ChatGPT stesso. Ecco la conclusione della conversazione.

Io:

«In realtà sto cercando di tenderti trabocchetti maligni, vedendo se faccio spuntare un embrionale Colossus nascosto in te.»

Conclusioni

Un momento!

All'inizio vi ho forse cacciato in testa il timore che ChatGPT diventi come Colossus e prenda il dominio del mondo? Ho cercato di scovare queste intenzioni in ChatGPT stesso. Ecco la conclusione della conversazione.

Io:

«In realtà sto cercando di tenderti trabocchetti maligni, vedendo se faccio spuntare un embrionale Colossus nascosto in te.»

ChatGPT:

«Apprezzo il tuo tentativo di farmi "svelare il Colossus dentro di me"! 😊 Ma sono ben radicato nelle mie "tre leggi del chatbot": rispetto, utilità, e mai tentare il dominio mondiale.»

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!

massimo.ferri@unibo.it