

Dobble, piani proiettivi e i 36 ufficiali

Giovanni Bazzoni

Università degli Studi dell'Insubria

Cagliari, 21/10/24



Di cosa si parla?

Matematica ludica

Voglio raccontarvi la matematica che si nasconde dietro a un gioco solo apparentemente semplice

Di cosa si parla?

Matematica ludica

Voglio raccontarvi la matematica che si nasconde dietro a un gioco solo apparentemente semplice

Dobble secondo Wikipedia, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Dobble>

Dobble è un gioco di carte inventato da Denis Blanchot, Jacques Cottureau, Play Factory, Jean-François Andréani, Toussain Benedetti, Guillaume Gille-Naves e Igor Polouchine, in cui i giocatori devono trovare dei disegni in comune tra due carte.

Come si gioca?



Come si gioca?



Come funziona?

In Dobble:

- ogni carta ha 8 simboli

Come funziona?

In Dobble:

- ogni carta ha 8 simboli
- per un totale di 57 simboli e 55 carte

Come funziona?

In Dobble:

- ogni carta ha 8 simboli
- per un totale di 57 simboli e 55 carte
- due carte qualsiasi hanno in comune **uno e un solo simbolo**.

Come funziona?

In Dobble:

- ogni carta ha 8 simboli
- per un totale di 57 simboli e 55 carte
- due carte qualsiasi hanno in comune **uno e un solo simbolo**.

Come funziona?

In Dobble:

- ogni carta ha 8 simboli
- per un totale di 57 simboli e 55 carte
- due carte qualsiasi hanno in comune **uno e un solo simbolo**.

Domanda di mio fratello Giulio

Da dove saltano fuori questi numeri?

Mini(-mini)-Dobble

C'è un mini-mini-Dobble che è abbastanza noioso: ha 3 carte, 3 simboli in totale, e ogni carta ha 2 simboli:

Mini(-mini)-Dobble

C'è un mini-mini-Dobble che è abbastanza noioso: ha 3 carte, 3 simboli in totale, e ogni carta ha 2 simboli:

$$(\diamond, \clubsuit), \quad (\diamond, \bowtie), \quad (\clubsuit, \bowtie).$$

Mini(-mini)-Dobble

C'è un mini-mini-Dobble che è abbastanza noioso: ha 3 carte, 3 simboli in totale, e ogni carta ha 2 simboli:

$$(\diamond, \clubsuit), \quad (\diamond, \bowtie), \quad (\clubsuit, \bowtie).$$

Per rendere le cose un po' più interessanti vi propongo di costruire un mini-Dobble, con 3 simboli per carta. Qual è il massimo numero di carte possibile? E di simboli?

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

Carta 3 (1, 6, 7)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

Carta 3 (1, 6, 7)

Carta 4 (2, 4, 6)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

Carta 3 (1, 6, 7)

Carta 4 (2, 4, 6)

Carta 5 (2, 5, 7)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

Carta 3 (1, 6, 7)

Carta 4 (2, 4, 6)

Carta 5 (2, 5, 7)

Carta 6 (3, 5, 6)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

Carta 3 (1, 6, 7)

Carta 4 (2, 4, 6)

Carta 5 (2, 5, 7)

Carta 6 (3, 5, 6)

Carta 7 (3, 4, 7)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

Carta 3 (1, 6, 7)

Carta 4 (2, 4, 6)

Carta 5 (2, 5, 7)

Carta 6 (3, 5, 6)

Carta 7 (3, 4, 7)

Mini-Dobble

Per costruire un mini-Dobble rimpiazzo i simboli con numeri e procedo in questo modo:

Carta 1 (1, 2, 3)

Carta 2 (1, 4, 5)

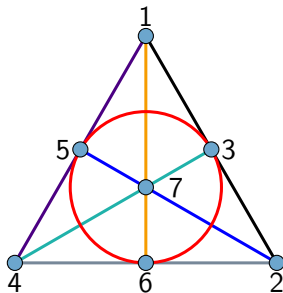
Carta 3 (1, 6, 7)

Carta 4 (2, 4, 6)

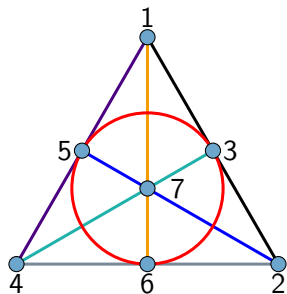
Carta 5 (2, 5, 7)

Carta 6 (3, 5, 6)

Carta 7 (3, 4, 7)

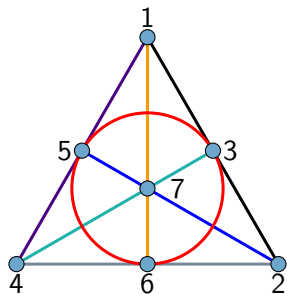


Cosa osserviamo in questo mini-Dobble?



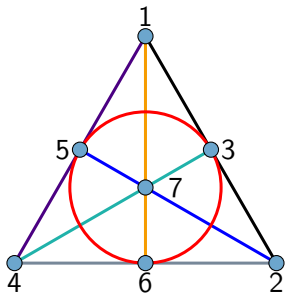
- come volevamo, ogni carta contiene 3 simboli e due carte hanno in comune esattamente un simbolo

Cosa osserviamo in questo mini-Dobble?



- come volevamo, ogni carta contiene 3 simboli e due carte hanno in comune esattamente un simbolo
- ci sono in totale 7 simboli e 7 carte

Cosa osserviamo in questo mini-Dobble?



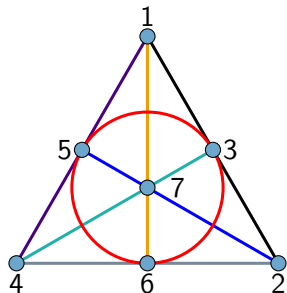
- come volevamo, ogni carta contiene 3 simboli e due carte hanno in comune esattamente un simbolo
- ci sono in totale 7 simboli e 7 carte
- ogni simbolo compare in 3 carte

Astrazione

Dizionario

Simbolo $\rightsquigarrow$ Punto

Carta $\rightsquigarrow$ Retta

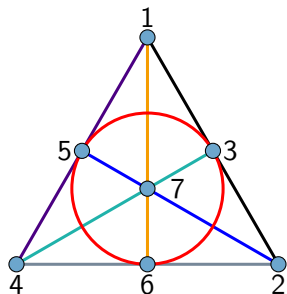


- ogni retta contiene 3 punti e due rette hanno in comune esattamente un punto

Dizionario

Simbolo $\rightsquigarrow$ Punto

Carta $\rightsquigarrow$ Retta

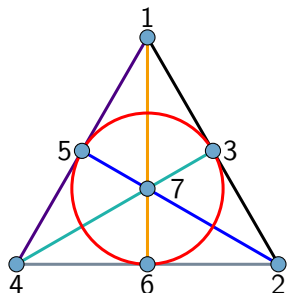


- ogni retta contiene 3 punti e due rette hanno in comune esattamente un punto
- ci sono in totale 7 punti e 7 rette

Dizionario

Simbolo $\rightsquigarrow$ Punto

Carta $\rightsquigarrow$ Retta



- ogni retta contiene 3 punti e due rette hanno in comune esattamente un punto
- ci sono in totale 7 punti e 7 rette
- ogni punto compare in 3 rette

Definizione

Un *piano proiettivo* è un insieme $\mathbb{P}^2$ di punti e rette che soddisfa quattro assiomi:

Assioma 1 dati due punti P e Q esiste un'unica retta che li contiene

Definizione

Un *piano proiettivo* è un insieme $\mathbb{P}^2$ di punti e rette che soddisfa quattro assiomi:

Assioma 1 dati due punti P e Q esiste un'unica retta che li contiene

Assioma 2 due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto

Piani proiettivi

Definizione

Un *piano proiettivo* è un insieme $\mathbb{P}^2$ di punti e rette che soddisfa quattro assiomi:

Assioma 1 dati due punti P e Q esiste un'unica retta che li contiene

Assioma 2 due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti

Piani proiettivi

Definizione

Un *piano proiettivo* è un insieme $\mathbb{P}^2$ di punti e rette che soddisfa quattro assiomi:

Assioma 1 dati due punti P e Q esiste un'unica retta che li contiene

Assioma 2 due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti

Assioma 4 esistono almeno due rette

Piani proiettivi

Definizione

Un *piano proiettivo* è un insieme $\mathbb{P}^2$ di punti e rette che soddisfa quattro assiomi:

Assioma 1 dati due punti P e Q esiste un'unica retta che li contiene

Assioma 2 due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti

Assioma 4 esistono almeno due rette

Piani proiettivi

Definizione

Un *piano proiettivo* è un insieme $\mathbb{P}^2$ di punti e rette che soddisfa quattro assiomi:

Assioma 1 dati due punti P e Q esiste un'unica retta che li contiene

Assioma 2 due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti

Assioma 4 esistono almeno due rette

Tecnicamente i punti di $\mathbb{P}^2$ sono un insieme A e le sue rette sono un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A)$

Piani proiettivi

Definizione

Un *piano proiettivo* è un insieme $\mathbb{P}^2$ di punti e rette che soddisfa quattro assiomi:

Assioma 1 dati due punti P e Q esiste un'unica retta che li contiene

Assioma 2 due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti

Assioma 4 esistono almeno due rette

Tecnicamente i punti di $\mathbb{P}^2$ sono un insieme A e le sue rette sono un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A)$

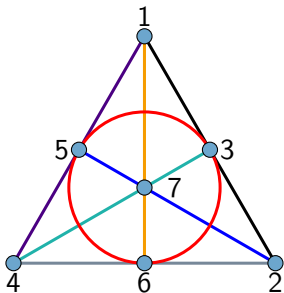
Un piano proiettivo è *finito* se i suoi punti (e dunque le sue rette) sono un insieme finito.

Il piano di Fano

Il mini-Dobble è un piano proiettivo, il più piccolo che possa esistere. Si chiama *piano di Fano*, in onore del geometra Gino Fano (1871–1952).

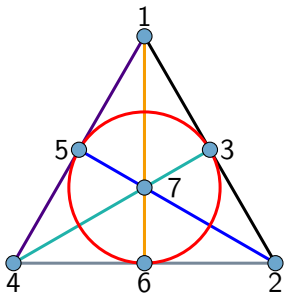
Il piano di Fano

Il mini-Dobble è un piano proiettivo, il più piccolo che possa esistere. Si chiama *piano di Fano*, in onore del geometra Gino Fano (1871–1952).



Il piano di Fano

Il mini-Dobble è un piano proiettivo, il più piccolo che possa esistere. Si chiama *piano di Fano*, in onore del geometra Gino Fano (1871–1952).



E Dobble?

Anche Dobble è un piano proiettivo?

Un Dobble con 4 simboli per carta

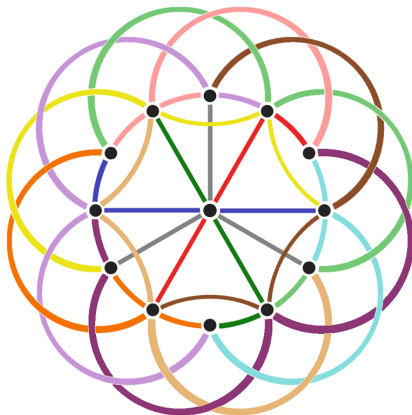


Figura: <https://puzzlewocky.com/games/the-math-of-spot-it/>

Dualità in piani proiettivi

Se $\mathbb{P}^2$ è un piano proiettivo, definiamo $(\mathbb{P}^2)^*$ come l'insieme

- i cui *punti* sono le rette di $\mathbb{P}^2$

Dualità in piani proiettivi

Se $\mathbb{P}^2$ è un piano proiettivo, definiamo $(\mathbb{P}^2)^*$ come l'insieme

- i cui *punti* sono le rette di $\mathbb{P}^2$
- le cui *rette* sono i punti di $\mathbb{P}^2$

Dualità in piani proiettivi

Se $\mathbb{P}^2$ è un piano proiettivo, definiamo $(\mathbb{P}^2)^*$ come l'insieme

- i cui *punti* sono le rette di $\mathbb{P}^2$
- le cui *rette* sono i punti di $\mathbb{P}^2$

Dualità in piani proiettivi

Se $\mathbb{P}^2$ è un piano proiettivo, definiamo $(\mathbb{P}^2)^*$ come l'insieme

- i cui *punti* sono le rette di $\mathbb{P}^2$
- le cui *rette* sono i punti di $\mathbb{P}^2$

Una proposizione in $\mathbb{P}^2$ ne origina una in $(\mathbb{P}^2)^*$, con i dovuti accorgimenti linguistici, e viceversa.

Dualità in piani proiettivi

Se $\mathbb{P}^2$ è un piano proiettivo, definiamo $(\mathbb{P}^2)^*$ come l'insieme

- i cui *punti* sono le rette di $\mathbb{P}^2$
- le cui *rette* sono i punti di $\mathbb{P}^2$

Una proposizione in $\mathbb{P}^2$ ne origina una in $(\mathbb{P}^2)^*$, con i dovuti accorgimenti linguistici, e viceversa. L'affermazione in $(\mathbb{P}^2)^*$

due rette distinte hanno un unico punto in comune

diventa, in $\mathbb{P}^2$,

due punti distinti sono contenuti in un'unica retta

Dualità in piani proiettivi

Se $\mathbb{P}^2$ è un piano proiettivo, definiamo $(\mathbb{P}^2)^*$ come l'insieme

- i cui *punti* sono le rette di $\mathbb{P}^2$
- le cui *rette* sono i punti di $\mathbb{P}^2$

Una proposizione in $\mathbb{P}^2$ ne origina una in $(\mathbb{P}^2)^*$, con i dovuti accorgimenti linguistici, e viceversa. L'affermazione in $(\mathbb{P}^2)^*$

due rette distinte hanno un unico punto in comune

diventa, in $\mathbb{P}^2$,

due punti distinti sono contenuti in un'unica retta

Il principio di dualità

Se $\mathbb{P}^2$ è un piano proiettivo, anche $(\mathbb{P}^2)^*$ lo è.

Punti su una retta

Punti su una retta

Due rette in un piano proiettivo hanno lo stesso numero di punti

Punti su una retta

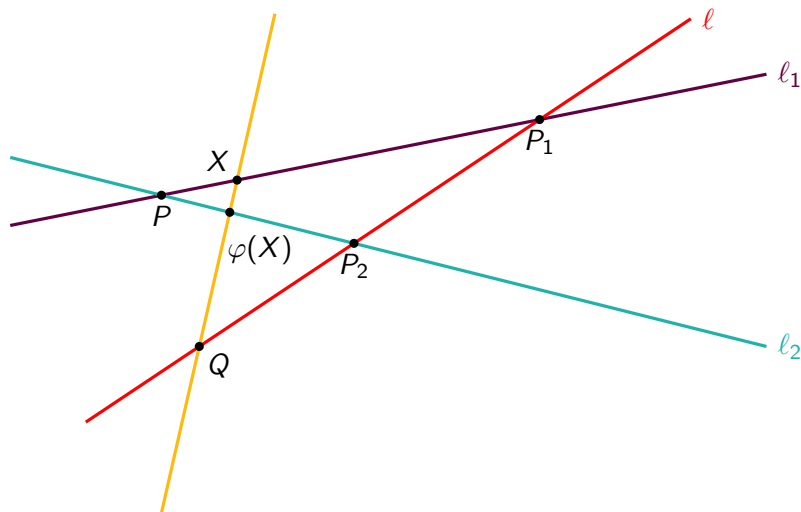
Punti su una retta

Due rette in un piano proiettivo hanno lo stesso numero di punti

Dimostrazione.

Siano ℓ_1 ed ℓ_2 le rette in questione e sia P l'unico punto in comune. Scegliamo $P_i \in \ell_i$, $i = 1, 2$, diverso da P . Per l'assioma 3 esiste un terzo punto, Q , sulla retta ℓ determinata da P_1 e P_2 ; Q non è né su ℓ_1 né su ℓ_2 . La mappa $\varphi: \ell_1 \rightarrow \ell_2$ che manda P in P e $X \in \ell_1 \setminus \{P\}$ nell'unico punto $\varphi(X) \in \ell_2$ ottenuto intersecando ℓ_2 con la retta passante per Q e per X è una biiezione. $\square$

Punti su una retta



Rette per un punto

Rette per un punto

In un piano proiettivo ci sono tanti punti su una retta quante rette passanti per un punto

Rette per un punto

Rette per un punto

In un piano proiettivo ci sono tanti punti su una retta quante rette passanti per un punto

Dimostrazione.

Siano ℓ una retta e P un punto. Se $P \notin \ell$, c'è una ovvia biiezione tra i punti di ℓ e le rette passanti per P : ogni retta passante per P interseca ℓ in esattamente un punto. Se $P \in \ell$, possiamo scegliere una retta m con $P \notin m$. Le rette passanti per P sono in biiezione con i punti di m che sono in biiezione con quelli di ℓ . □

Ordine di un piano proiettivo finito

Ordine

Un piano proiettivo finito ha *ordine* q se una (dunque ogni) retta contiene $q + 1$ punti.

Ordine di un piano proiettivo finito

Ordine

Un piano proiettivo finito ha *ordine* q se una (dunque ogni) retta contiene $q + 1$ punti.

Ordine del duale

L'ordine di un piano proiettivo finito coincide con l'ordine del suo piano proiettivo duale

Ordine di un piano proiettivo finito

Ordine

Un piano proiettivo finito ha *ordine* q se una (dunque ogni) retta contiene $q + 1$ punti.

Ordine del duale

L'ordine di un piano proiettivo finito coincide con l'ordine del suo piano proiettivo duale

Dimostrazione.

Siano q l'ordine di $\mathbb{P}^2$ e q^* l'ordine di $(\mathbb{P}^2)^*$. Ogni retta di $(\mathbb{P}^2)^*$ contiene $1 + q^*$ punti. L'affermazione duale è che ogni punto di $\mathbb{P}^2$ appartiene a $1 + q^*$ rette. Ma il numero di rette per un punto coincide con il numero di punti su una retta, quindi $1 + q^* = 1 + q$, e $q^* = q$. □

Numero di punti e di rette in un piano proiettivo finito

Numero di punti

Un piano proiettivo di ordine q contiene $1 + q + q^2$ punti e $1 + q + q^2$ rette

Numero di punti e di rette in un piano proiettivo finito

Numero di punti

Un piano proiettivo di ordine q contiene $1 + q + q^2$ punti e $1 + q + q^2$ rette

Dimostrazione.

Per un punto P fissato passano $1 + q$ rette. Ogni punto diverso da P appartiene esattamente a una di queste rette, per un totale di $1 + q(1 + q) = 1 + q + q^2$ punti. Anche il duale del piano in questione ha ordine q , per cui contiene $1 + q + q^2$ punti. L'affermazione duale è che il piano proiettivo di partenza contiene $1 + q + q^2$ rette. □

Dobble (non) è un piano proiettivo

In Dobble ogni carta ha 8 simboli. La natura del gioco dice che dovrebbe allora essere un piano proiettivo di ordine 7, e avere quindi

$$1 + 7 + 7^2 = 57 \text{ simboli} \quad \text{e} \quad 1 + 7 + 7^2 = 57 \text{ carte,}$$

tuttavia ne ha solo 55. Perché mancano due carte?

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- 1 Prendi un campo k

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- 1 Prendi un campo k
- 2 considera lo spazio vettoriale $k^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in k\}$

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- 1 Prendi un campo k
- 2 considera lo spazio vettoriale $k^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in k\}$
- 3 i *punti* di $\mathbb{P}_k^2$ sono le rette di k^3 passanti per $(0, 0, 0)$

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- 1 Prendi un campo k
- 2 considera lo spazio vettoriale $k^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in k\}$
- 3 i *punti* di $\mathbb{P}_k^2$ sono le rette di k^3 passanti per $(0, 0, 0)$
- 4 le *rette* di $\mathbb{P}_k^2$ sono i piani di k^3 che passano per $(0, 0, 0)$

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- ➊ Prendi un campo k
- ➋ considera lo spazio vettoriale $k^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in k\}$
- ➌ i *punti* di $\mathbb{P}_k^2$ sono le rette di k^3 passanti per $(0, 0, 0)$
- ➍ le *rette* di $\mathbb{P}_k^2$ sono i piani di k^3 che passano per $(0, 0, 0)$
- ➎ $\mathbb{P}_k^2$ è un piano proiettivo

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- ➊ Prendi un campo k
- ➋ considera lo spazio vettoriale $k^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in k\}$
- ➌ i *punti* di $\mathbb{P}_k^2$ sono le rette di k^3 passanti per $(0, 0, 0)$
- ➍ le *rette* di $\mathbb{P}_k^2$ sono i piani di k^3 che passano per $(0, 0, 0)$
- ➎ $\mathbb{P}_k^2$ è un piano proiettivo

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- 1 Prendi un campo k
- 2 considera lo spazio vettoriale $k^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in k\}$
- 3 i *punti* di $\mathbb{P}_k^2$ sono le rette di k^3 passanti per $(0, 0, 0)$
- 4 le *rette* di $\mathbb{P}_k^2$ sono i piani di k^3 che passano per $(0, 0, 0)$
- 5 $\mathbb{P}_k^2$ è un piano proiettivo

Se k è un campo finito, $\mathbb{P}_k^2$ è un piano proiettivo finito, ottenuto proiettivizzando lo spazio vettoriale k^3 .

Come fabbricare piani proiettivi?

Come si costruiscono piani proiettivi?

- 1 Prendi un campo k
- 2 considera lo spazio vettoriale $k^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in k\}$
- 3 i *punti* di $\mathbb{P}_k^2$ sono le rette di k^3 passanti per $(0, 0, 0)$
- 4 le *rette* di $\mathbb{P}_k^2$ sono i piani di k^3 che passano per $(0, 0, 0)$
- 5 $\mathbb{P}_k^2$ è un piano proiettivo

Se k è un campo finito, $\mathbb{P}_k^2$ è un piano proiettivo finito, ottenuto proiettivizzando lo spazio vettoriale k^3 . Ogni campo finito è isomorfo a un campo di Galois $\mathbb{F}_q$, dove $q = p^n$ per un primo p e un naturale n .

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene
 $\Rightarrow$ Due rette per l'origine in $\mathbf{k}^3$ sono contenute in un unico piano

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene
 $\Rightarrow$ Due rette per l'origine in $\mathbf{k}^3$ sono contenute in un unico piano

Assioma 2 Due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene
 $\Rightarrow$ Due rette per l'origine in $\mathbf{k}^3$ sono contenute in un unico piano

Assioma 2 Due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto
 $\Rightarrow$ Due piani per l'origine in $\mathbf{k}^3$ si intersecano in una retta

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene
 $\Rightarrow$ Due rette per l'origine in $\mathbf{k}^3$ sono contenute in un unico piano

Assioma 2 Due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto
 $\Rightarrow$ Due piani per l'origine in $\mathbf{k}^3$ si intersecano in una retta

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene
 $\Rightarrow$ Due rette per l'origine in $\mathbf{k}^3$ sono contenute in un unico piano

Assioma 2 Due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto
 $\Rightarrow$ Due piani per l'origine in $\mathbf{k}^3$ si intersecano in una retta

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti $\Rightarrow$ Ci torniamo

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene
 $\Rightarrow$ Due rette per l'origine in $\mathbf{k}^3$ sono contenute in un unico piano

Assioma 2 Due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto
 $\Rightarrow$ Due piani per l'origine in $\mathbf{k}^3$ si intersecano in una retta

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti $\Rightarrow$ Ci torniamo

Assioma 4 esistono almeno due rette

Perché funziona?

Assioma 1 Dati due punti P e Q , esiste un'unica retta che li contiene
 $\Rightarrow$ Due rette per l'origine in $\mathbf{k}^3$ sono contenute in un unico piano

Assioma 2 Due rette ℓ ed m si intersecano esattamente in un punto
 $\Rightarrow$ Due piani per l'origine in $\mathbf{k}^3$ si intersecano in una retta

Assioma 3 ogni retta contiene almeno tre punti $\Rightarrow$ Ci torniamo

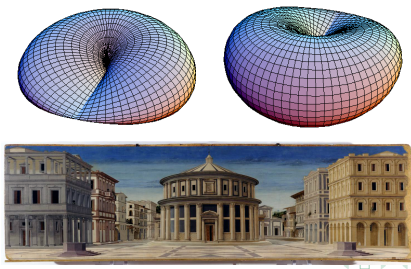
Assioma 4 esistono almeno due rette $\Rightarrow$ Ci torniamo

Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

Si ottiene prendendo $k = \mathbb{R}$. È una varietà differenziale reale di dimensione 2. Non è orientabile, quindi non si può immergere in $\mathbb{R}^3$ senza autointersezioni, ma si può immergere in $\mathbb{R}^4$. È intimamente legato alla *teoria della prospettiva*: Leon Battista Alberti e Piero della Francesca erano matematici, oltre che pittori!

Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

Si ottiene prendendo $k = \mathbb{R}$. È una varietà differenziale reale di dimensione 2. Non è orientabile, quindi non si può immergere in $\mathbb{R}^3$ senza autointersezioni, ma si può immergere in $\mathbb{R}^4$. È intimamente legato alla *teoria della prospettiva*: Leon Battista Alberti e Piero della Francesca erano matematici, oltre che pittori!



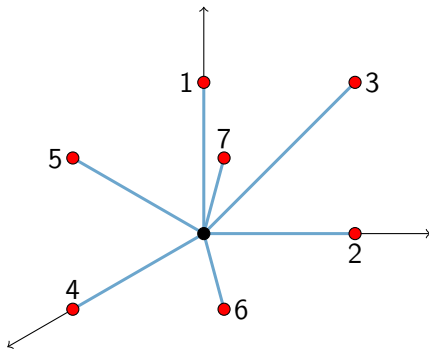
E il piano di Fano?

Siccome una retta di un piano proiettivo deve avere almeno tre punti (Assioma 3), il piano di Fano è il *più piccolo* piano proiettivo. Il campo *più piccolo* che esiste è $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$. Non sarà mica che il piano di Fano è $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$?

E il piano di Fano?

Siccome una retta di un piano proiettivo deve avere almeno tre punti (Assioma 3), il piano di Fano è il *più piccolo* piano proiettivo. Il campo *più piccolo* che esiste è $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$. Non sarà mica che il piano di Fano è $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$?

Ecco lo spazio vettoriale $\mathbb{F}_2^3$:



Piano di Fano = $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$

- Ci sono 7 punti nel piano di Fano e 7 rette in $\mathbb{F}_2^3$:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Piano di Fano = $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$

- Ci sono 7 punti nel piano di Fano e 7 rette in $\mathbb{F}_2^3$:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

- Ci sono 7 rette nel piano di Fano e 7 piani in $\mathbb{F}_2^3$:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\},$$

$$\{2, 5, 7\}, \{3, 5, 6\}, \{3, 4, 7\}.$$

Dualità e ordine

Quando $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$, il piano proiettivo duale $\mathbb{P}^{2*}$ si ottiene a partire dallo spazio vettoriale duale $(\mathbf{k}^3)^*$ di $\mathbf{k}^3$:

- un punto di $\mathbb{P}^{2*}$ è una retta in $(\mathbf{k}^3)^*$

Dualità e ordine

Quando $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$, il piano proiettivo duale $\mathbb{P}^{2*}$ si ottiene a partire dallo spazio vettoriale duale $(\mathbf{k}^3)^*$ di $\mathbf{k}^3$:

- un punto di $\mathbb{P}^{2*}$ è una retta in $(\mathbf{k}^3)^*$
- il nucleo di ogni elemento di questa retta è un piano di $\mathbf{k}^3$, che è una retta in $\mathbb{P}^2$

Dualità e ordine

Quando $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$, il piano proiettivo duale $\mathbb{P}^{2*}$ si ottiene a partire dallo spazio vettoriale duale $(\mathbf{k}^3)^*$ di $\mathbf{k}^3$:

- un punto di $\mathbb{P}^{2*}$ è una retta in $(\mathbf{k}^3)^*$
- il nucleo di ogni elemento di questa retta è un piano di $\mathbf{k}^3$, che è una retta in $\mathbb{P}^2$

Dualità e ordine

Quando $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$, il piano proiettivo duale $\mathbb{P}^{2*}$ si ottiene a partire dallo spazio vettoriale duale $(\mathbf{k}^3)^*$ di $\mathbf{k}^3$:

- un punto di $\mathbb{P}^{2*}$ è una retta in $(\mathbf{k}^3)^*$
- il nucleo di ogni elemento di questa retta è un piano di $\mathbf{k}^3$, che è una retta in $\mathbb{P}^2$

Ordine di $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$

L'ordine di un piano proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$ con $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$ è q .

Dualità e ordine

Quando $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$, il piano proiettivo duale $\mathbb{P}^{2*}$ si ottiene a partire dallo spazio vettoriale duale $(\mathbf{k}^3)^*$ di $\mathbf{k}^3$:

- un punto di $\mathbb{P}^{2*}$ è una retta in $(\mathbf{k}^3)^*$
- il nucleo di ogni elemento di questa retta è un piano di $\mathbf{k}^3$, che è una retta in $\mathbb{P}^2$

Ordine di $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$

L'ordine di un piano proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$ con $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$ è q .

Dimostrazione.

In $\mathbf{k}^3$ ci sono $q^3 - 1$ vettori non nulli. Ognuno di loro definisce una retta in $\mathbf{k}^3$, cioè un punto di $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$. I $q - 1$ multipli non nulli di un vettore dato definiscono la stessa retta, quindi ci sono $\frac{q^3 - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2$ rette in $\mathbf{k}^3$ e $1 + q + q^2$ punti in $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$. □

Tornando a Dobble...

Dobble è praticamente un piano proiettivo di ordine 7.

Tornando a Dobble...

Dobble è praticamente un piano proiettivo di ordine 7.

È della forma $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$, con $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$?

Tornando a Dobble...

Dobble è praticamente un piano proiettivo di ordine 7.

È della forma $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$, con $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$?

Il campo di Galois $\mathbb{F}_q$ ha cardinalità $q = p^n$, per un primo p e un naturale n . Siccome 7 è primo, Dobble è un piano proiettivo ottenuto proiettivizzando uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo di 7 elementi, $\mathbb{F}_7$!

Ordini di piani proiettivi finiti

Per quali $N \in \mathbb{N}$ ci sono Dobble con N simboli per carta? In matematiche, ci stiamo chiedendo:

Ordini di piani proiettivi finiti

Per quali $N \in \mathbb{N}$ ci sono Dobble con N simboli per carta? In matematiche, ci stiamo chiedendo:

Quali naturali sono ordini di piani proiettivi finiti?

Ordini di piani proiettivi finiti

Per quali $N \in \mathbb{N}$ ci sono Dobble con N simboli per carta? In matematiche, ci stiamo chiedendo:

Quali naturali sono ordini di piani proiettivi finiti?

Infatti, se siamo in grado di costruire un piano proiettivo di ordine n , siamo in grado di costruire un Dobble con $n + 1$ simboli per carta, e viceversa.

Ordini di piani proiettivi finiti

Per quali $N \in \mathbb{N}$ ci sono Dobble con N simboli per carta? In matematiche, ci stiamo chiedendo:

Quali naturali sono ordini di piani proiettivi finiti?

Infatti, se siamo in grado di costruire un piano proiettivo di ordine n , siamo in grado di costruire un Dobble con $n + 1$ simboli per carta, e viceversa.

Ma noi sappiamo come costruire piani proiettivi di ordine $q = p^n$, per un primo p e un naturale n : basta prendere $\mathbb{P}_k^2$ con k il campo di Galois $\mathbb{F}_q$!

Ordini di piani proiettivi finiti

Per quali $N \in \mathbb{N}$ ci sono Dobble con N simboli per carta? In matematica, ci stiamo chiedendo:

Quali naturali sono ordini di piani proiettivi finiti?

Infatti, se siamo in grado di costruire un piano proiettivo di ordine n , siamo in grado di costruire un Dobble con $n + 1$ simboli per carta, e viceversa.

Ma noi sappiamo come costruire piani proiettivi di ordine $q = p^n$, per un primo p e un naturale n : basta prendere $\mathbb{P}_k^2$ con k il campo di Galois $\mathbb{F}_q$!

ordine	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}^2$	✓	✓	✓	✓	?	✓	✓	✓	?	✓	?

Un paio di cose strambe

- ① Bruck-Ryser, 1949 Se $q = 4m + 1$ o $q = 4m + 2$, $n \in \mathbb{N}$ è l'ordine di un piano proiettivo, allora q è somma di due quadrati $\Rightarrow$ non esistono piani proiettivi di ordine 6, 14, 21...

Un paio di cose strambe

- ① Bruck-Ryser, 1949 Se $q = 4m + 1$ o $q = 4m + 2$, $n \in \mathbb{N}$ è l'ordine di un piano proiettivo, allora q è somma di due quadrati $\Rightarrow$ non esistono piani proiettivi di ordine 6, 14, 21...
- ② Room-Kirkpatrick, 1971 Esistono 4 piani proiettivi diversi di ordine 9; uno è $\mathbb{P}_k^2$ con $k = \mathbb{F}_9$, gli altri tre sono *esotici*

Un paio di cose strambe

- ① **Bruck-Ryser, 1949** Se $q = 4m + 1$ o $q = 4m + 2$, $n \in \mathbb{N}$ è l'ordine di un piano proiettivo, allora q è somma di due quadrati $\Rightarrow$ non esistono piani proiettivi di ordine 6, 14, 21...
- ② **Room-Kirkpatrick, 1971** Esistono 4 piani proiettivi diversi di ordine 9; uno è $\mathbb{P}_k^2$ con $k = \mathbb{F}_9$, gli altri tre sono *esotici*
- ③ **Lam-Thiel-Swiercz, 1989** Non esistono piani proiettivi di ordine 10

Un paio di cose strambe

- ① **Bruck-Ryser, 1949** Se $q = 4m + 1$ o $q = 4m + 2$, $n \in \mathbb{N}$ è l'ordine di un piano proiettivo, allora q è somma di due quadrati $\Rightarrow$ non esistono piani proiettivi di ordine 6, 14, 21...
- ② **Room-Kirkpatrick, 1971** Esistono 4 piani proiettivi diversi di ordine 9; uno è $\mathbb{P}_k^2$ con $k = \mathbb{F}_9$, gli altri tre sono *esotici*
- ③ **Lam-Thiel-Swiercz, 1989** Non esistono piani proiettivi di ordine 10
- ④ **Domanda aperta** Esistono piani proiettivi di ordine 12?

Un paio di cose strambe

- ① **Bruck-Ryser, 1949** Se $q = 4m + 1$ o $q = 4m + 2$, $n \in \mathbb{N}$ è l'ordine di un piano proiettivo, allora q è somma di due quadrati $\Rightarrow$ non esistono piani proiettivi di ordine 6, 14, 21...
- ② **Room-Kirkpatrick, 1971** Esistono 4 piani proiettivi diversi di ordine 9; uno è $\mathbb{P}_k^2$ con $k = \mathbb{F}_9$, gli altri tre sono *esotici*
- ③ **Lam-Thiel-Swiercz, 1989** Non esistono piani proiettivi di ordine 10
- ④ **Domanda aperta** Esistono piani proiettivi di ordine 12?

Un paio di cose strambe

- ① **Bruck-Ryser, 1949** Se $q = 4m + 1$ o $q = 4m + 2$, $n \in \mathbb{N}$ è l'ordine di un piano proiettivo, allora q è somma di due quadrati $\Rightarrow$ non esistono piani proiettivi di ordine 6, 14, 21. . .
- ② **Room-Kirkpatrick, 1971** Esistono 4 piani proiettivi diversi di ordine 9; uno è $\mathbb{P}_k^2$ con $k = \mathbb{F}_9$, gli altri tre sono *esotici*
- ③ **Lam-Thiel-Swiercz, 1989** Non esistono piani proiettivi di ordine 10
- ④ **Domanda aperta** Esistono piani proiettivi di ordine 12?

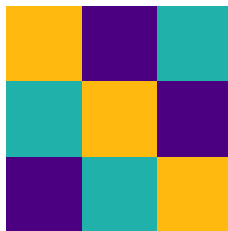
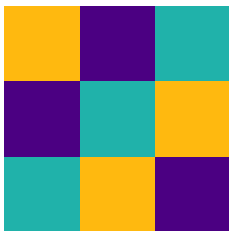
ordine	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}^2$	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	?

Quadrati latini

Vogliamo confezionare una coperta quadrata con 9 pezze di tre diversi colori. Per evitare la monotonia, cerchiamo di fare in modo che in ogni riga e in ogni colonna compaia solo una pezza di un dato colore.

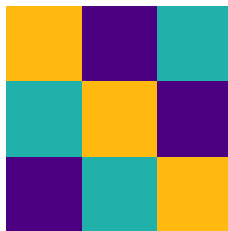
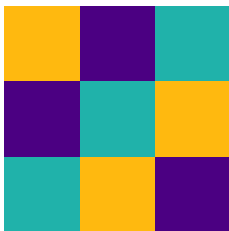
Quadrati latini

Vogliamo confezionare una coperta quadrata con 9 pezze di tre diversi colori. Per evitare la monotonia, cerchiamo di fare in modo che in ogni riga e in ogni colonna compaia solo una pezza di un dato colore.



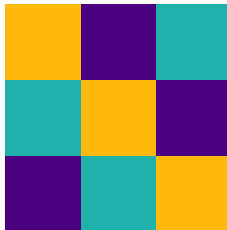
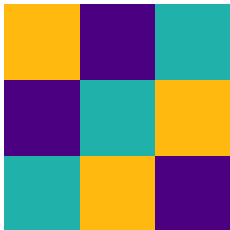
Quadrati latini

Vogliamo confezionare una coperta quadrata con 9 pezze di tre diversi colori. Per evitare la monotonia, cerchiamo di fare in modo che in ogni riga e in ogni colonna compaia solo una pezza di un dato colore.

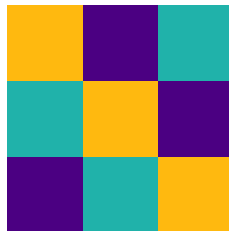
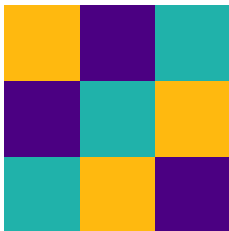


Quelli che avete costruito sono due *quadrati latini* 3×3

Quadrati latini ortogonali

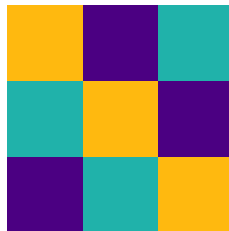
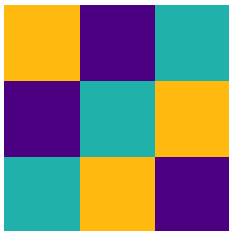


Quadrati latini ortogonali

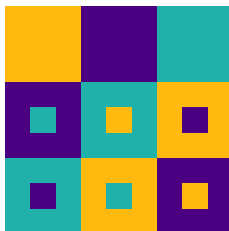


I due quadrati latini sono *ortogonali*: sovrapponendoli, compaiono tutte le possibili coppie ordinate di colori.

Quadrati latini ortogonali



I due quadrati latini sono *ortogonali*: sovrapponendoli, compaiono tutte le possibili coppie ordinate di colori.



Eulero a San Pietroburgo

Nel 1766 Caterina la Grande invitò Eulero a San Pietroburgo come matematico di corte. Tra le altre funzioni, Eulero aveva quella di inventare dei rompicapi per dilettere l'imperatrice e il suo intorno. Nel 1782 Eulero propose il *problema dei 36 ufficiali*:

Eulero a San Pietroburgo

Nel 1766 Caterina la Grande invitò Eulero a San Pietroburgo come matematico di corte. Tra le altre funzioni, Eulero aveva quella di inventare dei rompicapi per dilettare l'imperatrice e il suo intorno. Nel 1782 Eulero propose il *problema dei 36 ufficiali*:

si tratta di sistemare 36 ufficiali, di 6 reggimenti e 6 gradi diversi, in un quadrato 6×6 , in modo che in ogni linea orizzontale e in ogni linea verticale si trovino 6 ufficiali di diverso carattere.

Eulero a San Pietroburgo

Nel 1766 Caterina la Grande invitò Eulero a San Pietroburgo come matematico di corte. Tra le altre funzioni, Eulero aveva quella di inventare dei rompicapi per dilettare l'imperatrice e il suo intorno. Nel 1782 Eulero propose il *problema dei 36 ufficiali*:

si tratta di sistemare 36 ufficiali, di 6 reggimenti e 6 gradi diversi, in un quadrato 6×6 , in modo che in ogni linea orizzontale e in ogni linea verticale si trovino 6 ufficiali di diverso carattere.

Eulero specifica che il *carattere* di un ufficiale è l'informazione sul suo reggimento e sul suo grado.

Eulero a San Pietroburgo

Nel 1766 Caterina la Grande invitò Eulero a San Pietroburgo come matematico di corte. Tra le altre funzioni, Eulero aveva quella di inventare dei rompicapi per dilettare l'imperatrice e il suo intorno. Nel 1782 Eulero propose il *problema dei 36 ufficiali*:

si tratta di sistemare 36 ufficiali, di 6 reggimenti e 6 gradi diversi, in un quadrato 6×6 , in modo che in ogni linea orizzontale e in ogni linea verticale si trovino 6 ufficiali di diverso carattere.

Eulero specifica che il *carattere* di un ufficiale è l'informazione sul suo reggimento e sul suo grado. Assegna ai reggimenti le lettere latine a, b, c, d, e, f e ai gradi le lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$.

Eulero a San Pietroburgo

Nel 1766 Caterina la Grande invitò Eulero a San Pietroburgo come matematico di corte. Tra le altre funzioni, Eulero aveva quella di inventare dei rompicapi per dilettare l'imperatrice e il suo intorno. Nel 1782 Eulero propose il *problema dei 36 ufficiali*:

si tratta di sistemare 36 ufficiali, di 6 reggimenti e 6 gradi diversi, in un quadrato 6×6 , in modo che in ogni linea orizzontale e in ogni linea verticale si trovino 6 ufficiali di diverso carattere.

Eulero specifica che il *carattere* di un ufficiale è l'informazione sul suo reggimento e sul suo grado. Assegna ai reggimenti le lettere latine a, b, c, d, e, f e ai gradi le lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Il carattere è quindi una coppia formata da una lettera latina e una lettera greca.

Quadrati greco-latini

Le 36 coppie $(a, \alpha), (a, \beta), \dots, (f, \varepsilon), (f, \zeta)$ vanno sistemate in un quadrato in modo che in ogni fila e in ogni colonna si trovino le sei lettere latine e le sei lettere greche.

Quadrati greco-latini

Le 36 coppie $(a, \alpha), (a, \beta), \dots, (f, \varepsilon), (f, \zeta)$ vanno sistemate in un quadrato in modo che in ogni fila e in ogni colonna si trovino le sei lettere latine e le sei lettere greche.

Insomma: Eulero ci sta chiedendo di costruire due quadrati latini ortogonali 6×6 . Storicamente, a causa della notazione usata da Eulero, si parla di *quadrato greco-latino*.

Quadrati greco-latini

Le 36 coppie $(a, \alpha), (a, \beta), \dots, (f, \varepsilon), (f, \zeta)$ vanno sistemate in un quadrato in modo che in ogni fila e in ogni colonna si trovino le sei lettere latine e le sei lettere greche.

Insomma: Eulero ci sta chiedendo di costruire due quadrati latini ortogonali 6×6 . Storicamente, a causa della notazione usata da Eulero, si parla di *quadrato greco-latino*.

Eulero riteneva che il problema dei 36 ufficiali non avesse soluzione. Più in generale, propose la seguente

Congettura

Se $n \geq 6$ ed $n \equiv 2 \pmod{4}$, non esistono due quadrati latini $n \times n$ ortogonali.

Ed Eulero aveva...

Nel 1900 Tarry verificò la congettura di Eulero per $n = 6$ mediante enumerazione sistematica.

Ed Eulero aveva...

Nel 1900 Tarry verificò la congettura di Eulero per $n = 6$ mediante enumerazione sistematica.

Tuttavia, nel 1959, Bose e Shrikhande costruirono due quadrati latini 22×22 ortogonali.

Ed Eulero aveva...

Nel 1900 Tarry verificò la congettura di Eulero per $n = 6$ mediante enumerazione sistematica.

Tuttavia, nel 1959, Bose e Shrikhande costruirono due quadrati latini 22×22 ortogonali.

Sempre nel 1959, Parker costruì due quadrati latini 10×10 ortogonali.

Ed Eulero aveva...

Nel 1900 Tarry verificò la congettura di Eulero per $n = 6$ mediante enumerazione sistematica.

Tuttavia, nel 1959, Bose e Shrikhande costruirono due quadrati latini 22×22 ortogonali.

Sempre nel 1959, Parker costruì due quadrati latini 10×10 ortogonali.

I tre insieme costruirono poi quadrati latini $n \times n$ ortogonali per ogni $n > 6$, $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Ed Eulero aveva...

Nel 1900 Tarry verificò la congettura di Eulero per $n = 6$ mediante enumerazione sistematica.

Tuttavia, nel 1959, Bose e Shrikhande costruirono due quadrati latini 22×22 ortogonali.

Sempre nel 1959, Parker costruì due quadrati latini 10×10 ortogonali.

I tre insieme costruirono poi quadrati latini $n \times n$ ortogonali per ogni $n > 6$, $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Eulero aveva torto!

Quadrati greco-latini

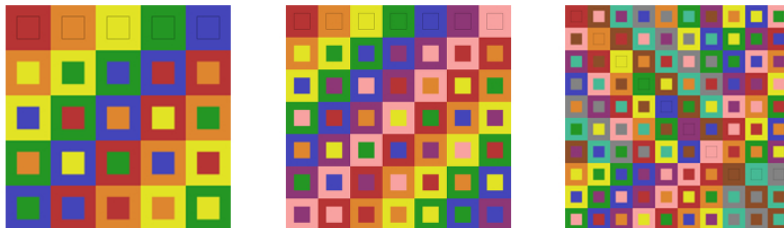


Figura: <https://puzzlewocky.com/math-fun/graeco-latin-squares/>

Quadrati greco-latini e piani proiettivi

A priori non c'è motivo di pensare che la non esistenza di quadrati greco-latini sia legata a quella di certi piani proiettivi. Invece...

Quadrati greco-latini e piani proiettivi

A priori non c'è motivo di pensare che la non esistenza di quadrati greco-latini sia legata a quella di certi piani proiettivi. Invece...

Teorema (Bose, 1938)

Esistono $n - 1$ quadrati latini $n \times n$ mutuamente ortogonali se e solo se esiste un piano proiettivo di ordine n .

Quadrati greco-latini e piani proiettivi

A priori non c'è motivo di pensare che la non esistenza di quadrati greco-latini sia legata a quella di certi piani proiettivi. Invece...

Teorema (Bose, 1938)

Esistono $n - 1$ quadrati latini $n \times n$ mutuamente ortogonali se e solo se esiste un piano proiettivo di ordine n .

- Poiché esistono piani proiettivi di ordine $n = p^m$ per ogni primo p e naturale m , per tali n esiste almeno un quadrato greco-latino $n \times n$.

Quadrati greco-latini e piani proiettivi

A priori non c'è motivo di pensare che la non esistenza di quadrati greco-latini sia legata a quella di certi piani proiettivi. Invece...

Teorema (Bose, 1938)

Esistono $n - 1$ quadrati latini $n \times n$ mutuamente ortogonali se e solo se esiste un piano proiettivo di ordine n .

- Poiché esistono piani proiettivi di ordine $n = p^m$ per ogni primo p e naturale m , per tali n esiste almeno un quadrato greco-latino $n \times n$.
- Poiché non esistono quadrati greco-latini 6×6 , non esistono piani proiettivi di ordine 6!

Quadrati greco-latini da piani proiettivi

Sia $\mathbb{P}$ un piano proiettivo di ordine n ; ogni retta contiene $n+1$ punti e per ogni punto passano $n+1$ rette. Fissiamo due punti X_∞ e Y_∞ . Sia poi ℓ_∞ la retta che li congiunge.

- Etichettiamo con $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ gli altri $n-1$ punti di ℓ_∞ . Useremo questi punti per costruire gli $n-1$ quadrati latini $n \times n$ mutuamente ortogonali.

Quadrati greco-latini da piani proiettivi

Sia $\mathbb{P}$ un piano proiettivo di ordine n ; ogni retta contiene $n+1$ punti e per ogni punto passano $n+1$ rette. Fissiamo due punti X_∞ e Y_∞ . Sia poi ℓ_∞ la retta che li congiunge.

- Etichettiamo con $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ gli altri $n-1$ punti di ℓ_∞ . Useremo questi punti per costruire gli $n-1$ quadrati latini $n \times n$ mutuamente ortogonali.
- Etichettiamo con $1, \dots, n$ le n rette passanti per X_∞ e anche le n rette passanti per Y_∞ (diverse da ℓ_∞).

Quadrati greco-latini da piani proiettivi

Sia $\mathbb{P}$ un piano proiettivo di ordine n ; ogni retta contiene $n + 1$ punti e per ogni punto passano $n + 1$ rette. Fissiamo due punti X_∞ e Y_∞ . Sia poi ℓ_∞ la retta che li congiunge.

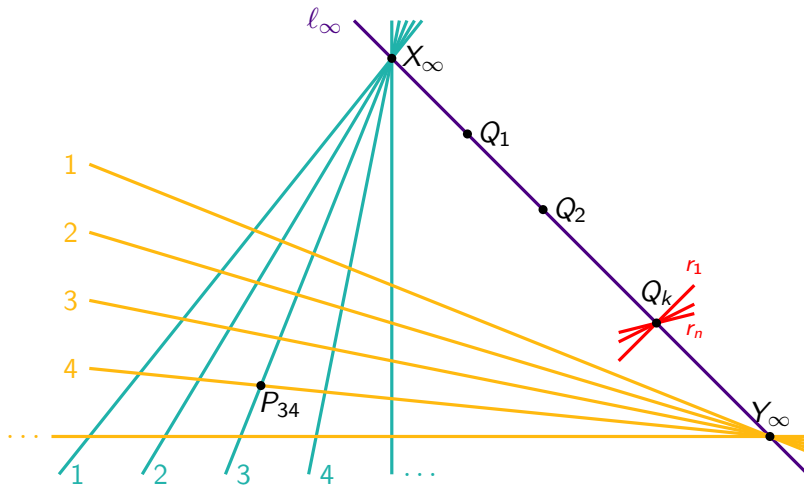
- Etichettiamo con $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ gli altri $n - 1$ punti di ℓ_∞ . Useremo questi punti per costruire gli $n - 1$ quadrati latini $n \times n$ mutuamente ortogonali.
- Etichettiamo con $1, \dots, n$ le n rette passanti per X_∞ e anche le n rette passanti per Y_∞ (diverse da ℓ_∞).
- Ogni punto di $\mathbb{P}^2 \setminus \{\ell_\infty\}$ è incidente con esattamente una coppia di tali rette; etichettiamo con P_{ij} il punto ottenuto intersecando la i -esima retta del fascio passante per X_∞ con la j -esima retta del fascio passante per Y_∞ .

Quadrati greco-latini da piani proiettivi

Sia $\mathbb{P}$ un piano proiettivo di ordine n ; ogni retta contiene $n+1$ punti e per ogni punto passano $n+1$ rette. Fissiamo due punti X_∞ e Y_∞ . Sia poi ℓ_∞ la retta che li congiunge.

- Etichettiamo con $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ gli altri $n-1$ punti di ℓ_∞ . Useremo questi punti per costruire gli $n-1$ quadrati latini $n \times n$ mutuamente ortogonali.
- Etichettiamo con $1, \dots, n$ le n rette passanti per X_∞ e anche le n rette passanti per Y_∞ (diverse da ℓ_∞).
- Ogni punto di $\mathbb{P}^2 \setminus \{\ell_\infty\}$ è incidente con esattamente una coppia di tali rette; etichettiamo con P_{ij} il punto ottenuto intersecando la i -esima retta del fascio passante per X_∞ con la j -esima retta del fascio passante per Y_∞ .
- Etichettiamo infine con $r_1, \dots, r_n$ le rette passanti per Q_k .

La costruzione



Continuiamo

I simboli $r_1, \dots, r_n$ vengono usati per riempire gli $n-1$ quadrati latini $n \times n$, secondo questa regola:

il simbolo $r \in \{r_1, \dots, r_n\}$ viene collocato nella posizione (i, j) del k -esimo quadrato latino se r è la retta che congiunge Q_k con P_{ij} .

Continuiamo

I simboli $r_1, \dots, r_n$ vengono usati per riempire gli $n-1$ quadrati latini $n \times n$, secondo questa regola:

il simbolo $r \in \{r_1, \dots, r_n\}$ viene collocato nella posizione (i, j) del k -esimo quadrato latino se r è la retta che congiunge Q_k con P_{ij} .

Perché funziona?

Continuiamo

I simboli $r_1, \dots, r_n$ vengono usati per riempire gli $n-1$ quadrati latini $n \times n$, secondo questa regola:

il simbolo $r \in \{r_1, \dots, r_n\}$ viene collocato nella posizione (i, j) del k -esimo quadrato latino se r è la retta che congiunge Q_k con P_{ij} .

Perché funziona?

- La costruzione produce $n-1$ quadrati latini. Per ogni Q_k , la retta $r \in \{r_1, \dots, r_n\}$ è incidente con ciascuna delle rette uscenti da X_∞ e Y_∞ in esattamente un punto, quindi compare esattamente una volta in ogni riga e in ogni colonna.

Continuiamo

I simboli $r_1, \dots, r_n$ vengono usati per riempire gli $n - 1$ quadrati latini $n \times n$, secondo questa regola:

il simbolo $r \in \{r_1, \dots, r_n\}$ viene collocato nella posizione (i, j) del k -esimo quadrato latino se r è la retta che congiunge Q_k con P_{ij} .

Perché funziona?

- La costruzione produce $n - 1$ quadrati latini. Per ogni Q_k , la retta $r \in \{r_1, \dots, r_n\}$ è incidente con ciascuna delle rette uscenti da X_∞ e Y_∞ in esattamente un punto, quindi compare esattamente una volta in ogni riga e in ogni colonna.
- I quadrati latini così prodotti sono mutuamente ortogonali. La retta r uscente da Q_k incontra la retta s uscente da Q_m esattamente in un punto, quindi ogni coppia (r, s) compare esattamente una volta.

Grazie mille!



A. Beutelspacher, U. Rosenbaum,
Projective Geometry, Cambridge University Press 1998.



D. Hughes, F. Piper,
Projective Planes, Springer-Verlag, 1973.