Laboratori 2018-2019

Gli obiettivi e i metodi

Le attività proposte mirano a costruire un ventaglio di esperienze relative ad alcuni temi significativi, che vengono dapprima esplorati da più punti di vista e successivamente interpretati secondo schemi unitari, per essere in seguito approfonditi sotto l'aspetto teorico. Si partirà dall'osservazione di particolari fenomeni per arrivare alla loro modellizzazione, costruendo nel corso delle attività nuovi concetti e recuperando le tecniche utili per la successiva trattazione.
Semplici schemi geometrici saranno scelti per rappresentare le varie situazioni sperimentali, e fra le forme in gioco dovranno essere scelte le "migliori", quelle cioè che rispondono a determinati criteri di ottimalità: ad esempio, le reti di lunghezza minima che collegano alcuni punti fissati, le figure di pari perimetro e di area massima, e così via.
Il materiale è organizzato in schede di laboratorio pensate per piccoli gruppi di 4-5 ragazzi, in modo da favorire un atteggiamento attivo di esplorazione e di riflessione sui problemi proposti, un interscambio delle idee e delle scoperte, la discussione degli eventuali errori.
Ogni scheda è sostanzialmente autosufficiente e tutte sono raccolte e commentate in un'ampia presentazione per l'insegnante, comprendente soluzioni e spunti per ulteriori approfondimenti.
Tutte le attività proposte comprendono una fase di sperimentazione (osservazione e descrizione di fenomeni) e una fase di riflessione e inquadramento teorico. Entrambe le fasi hanno pari importanza e riteniamo fondamentale che gli studenti abbiano a disposizione il tempo necessario alla loro completa attuazione.

Attività proposte

Poliedri

La prima fase di manipolazione e osservazione rappresenta un'occasione per introdurre/ricordare ai ragazzi che cosa sono i poliedri.
La seconda fase del Laboratorio conduce i ragazzi (in maniera, per così dire, "costruttiva") alla consapevolezza che i poliedri regolari sono soltanto cinque, dopo aver fatto svolgere loro un'attività di osservazione delle caratteristiche combinatorie (numero di facce, vertici e spigoli) e averli condotti a formulare la definizione di poliedro regolare.
L'ultima fase che è una sorta di jolly e che può essere svolta in un qualsiasi momento del percorso, un gruppo di ragazzi deve descrivere ai compagni un poliedro a scelta, e questi, senza poterlo vedere, devono essere in grado di ricostruirlo;

Geometria sferica

La geometria della sfera costituisce un argomento di notevole importanza, e di naturale interesse, anzitutto perché fornisce una buona descrizione del mondo in cui viviamo. Questo però non è l'unico, e forse nemmeno il principale, motivo per cui abbiamo scelto questo come tema di un laboratorio.
La geometria sferica è un capitolo bello e ricco di geometria: esso richiede assai pochi prerequisiti, eppure può portare lo studente a fare una vera e propria esperienza di matematica. A partire dall'osservazione di semplici fatti sperimentali, lo studente può intuire, congetturare e in alcuni casi anche dimostrare, risultati importanti e inaspettati di geometria non euclidea, quali quelli che riguardano la somma degli angoli interni di un triangolo, o il rapporto tra l'eccesso sferico e l'area dei triangoli, o ancora le mutue proprietà di incidenza di rette sulla sfera.

Rette, semipiani e angoli: I problemi posti in questo laboratorio riguardano "rette", "semipiani" e "angoli" sulla superficie sferica. Per arrivare alla definizione di questi enti si ricorre a paragoni con gli analoghi enti della geometria del piano. Lo scopo è quello di introdurre gli oggetti utili per affrontare lo studio di una nuova geometria.

Caleidoscopi e triangoli sferici: il laboratorio verte intorno all'argomento dei triangoli sferici. I contenuti, in particolare, riguardano l'ampiezza di angoli diedri, la somma degli angoli interni di un triangolo sferico, l'eccesso sferico, l'area di un triangolo sferico e il legame di proporzionalità diretta tra l'area di un triangolo sferico e il suo eccesso sferico.

Problemi di Massimo e minimo

I concetti di massimo e di minimo occupano un posto centrale in matematica e in generale nelle materie scientifiche, come ad esempio in fisica, dove le configurazioni di equilibrio di un dato sistema sono spesso descritte in termini di minima energia. Allo stesso modo, i problemi di ottimizzazione sono ampiamente diffusi nelle applicazioni scientifiche e tecnologiche, ad esempio nella progettazione di particolari strutture che devono offrire la massima resistenza a determinate sollecitazioni.

Naturalmente le conoscenze richieste per affrontare tali questioni si collocano spesso ben oltre il bagaglio che si può acquisire nel normale percorso scolastico, tuttavia riteniamo che sia possibile e anzi doveroso avvicinare gli studenti a questi temi fin dai primi anni della scuola superiore (se non addirittura prima, e comunque senza aspettare di aver introdotto i metodi dell'analisi matematica e il calcolo con le derivate), proponendo problemi ambientati in un contesto geometrico tutto sommato familiare. Pensiamo che questa prassi debba essere incoraggiata, anche con l'obiettivo di rafforzare i legami fra geometria e calcolo, due modi complementari di guardare ai problemi, entrambi utili per la loro comprensione e risoluzione. Si potranno così consolidare concetti geometrici che non di rado restano evanescenti o confusi, mettendo contemporaneamente a frutto le varie tecniche di calcolo acquisite. Non ultimo, il fatto che tali problematiche siano spesso strettamente collegate con la realtà fisica offre l'opportunità di far toccare con mano il processo di costruzione di un modello matematico idoneo a descrivere il fenomeno osservato, attraversando i passaggi cruciali di tale percorso, dalla sperimentazione e analisi dei dati raccolti alla sintesi dei risultati e alla loro conseguente verifica.

Reti minime: Molto schematicamente, una rete non è altro che un modo di collegare fra loro un certo numero di punti, usando delle linee che si possono diramare anche da punti diversi da quelli fissati. Si tratta poi di determinare, fra tutti i possibili collegamenti, quello (o quelli) di lunghezza complessiva minore (rete minima). Nelle esperienze proposte si potrà osservare il tipico fenomeno della formazione di angoli di 120° nei punti di diramazione delle reti minime, proprietà che potrà essere dimostrata nell'ambito del modello teorico.

Problema isoperimetrico Si chiede di determinare, fra tutte le figure piane di perimetro fissato, quella di area maggiore o, simmetricamente, fra tutte le figure di area fissata, quella di perimetro minore. Tale problema può evidentemente essere riformulato anche per figure tridimensionali e, in ogni caso, la forma migliore è la "più tonda" possibile - il cerchio nel piano e la sfera nello spazio. Affrontare questo problema nella sua generalità è assai laborioso; se però ci si restringe a particolari classi di figure, si riescono a proporre varie attività che permettono di studiare alcuni aspetti del problema e comprenderne le caratteristiche essenziali.

Grafi e superfici

Perché fare dei laboratori di topologia, visto che non è materia di insegnamento nelle scuole superiori?

Una prima ragione è proprio questa al fine di incuriosire i ragazzi sui metodi ei risultati della matematica potrebbe essere utile anche qualche incursione in temi che possono essere completamente nuovi rispetto al normale curriculum scolastico. Il fatto che si tratti di argomenti nuovi presenta il vantaggio di togliere ai ragazzi la paura relativa alla necessità di prerequisiti e di far loro affrontare i problemi nello spirito del laboratorio.

Grafi euleriani: I problemi posti in questo laboratorio riguardano i cammini euleriani in un grafo, cioè i cammini che in un grafo percorrono, una e una sola volta, tutti gli spigoli. Lo scopo nel proporre ai ragazzi questo problema è quello di farli ragionare su un problema di cui non hanno a priori degli strumenti e devono quindi mettere in campo la loro immaginazione.
Il problema di trovare un ciclo euleriano viene posto in due situazioni, una in cui vi è una soluzione (i tredici ponti di Parigi) e l'altra in cui il problema è impossibile (i sette ponti di Königsberg).

Grafi hamiltoniani: I problemi posti in questo laboratorio riguardano i cammini hamiltoniani in un grafo, cioè i cammini che in un grafo passano, una sola volta, per tutti i vertici. Lo scopo nel proporre ai ragazzi questo problema è quello di farli ragionare su un problema di cui non hanno a priori degli strumenti e devono quindi mettere in campo la loro immaginazione. Si prevede di compiere una passeggiata lungo gli spigoli di un dodecaedro regolare e una passeggiata lungo gli spigoli di un dodecaedro rombico

Problemi sui grafi: I problemi posti in questo laboratorio mirano a presentare una varietà di situazioni in cui capita che un dato problema possa essere affrontato usando un grafo.
il torneo di calcio
ti conosco o non ti conosco?
il cavallo degli scacchi

Il problema delle tre case: Le questioni poste in questo laboratorio riguardano un problema classico, che spesso si trova citato con il nome "il problema delle tre case": fissati due insiemi di tre punti sul piano, ci si chiede se sia possibile connettere ciascuno dei punti del primo insieme con ciascuno dei punti del secondo mediante cammini che non si intersechino.
La risposta è negativa e nella prima scheda (il problema delle tre case 1 sul piano) si cerca di far arrivare i ragazzi alla consapevolezza di questa impossibilità, mentre nella seconda (il problema delle tre case 2 su altre superfici) si esplora la possibilità di disegnare lo stesso grafo su superfici diverse (cilindro, toro, nastro di Möbius)

Superfici

I problemi posti in questi tre laboratori riguardano le superfici. Lo scopo che si propone è soprattutto quello di portare i ragazzi a fare qualche "esercizio di immaginazione", l'immaginazione è una facoltà preziosa per gli studi di matematica (e non solo), e non sempre trova una maniera adeguata di estrinsecarsi.

Dai poligoni alle... superfici topologiche Ci si riallaccia a quanto visto nel problema delle tre case, che in modo naturale porta a riconoscere che partendo da un rettangolo e compiendo delle identificazioni sui lati si ottengono diverse superfici (un cilindro, un toro un mastro di Möbius, …..) ci si sbizzarrisce quindi su altre identificazioni partendo da altri poligoni.

Riconoscere superfici topologiche : si esaminano le superfici descritte nei poster e si utilizza il materiale a disposizione per costruirne altre: lo scopo è quello di arrivare ad avere un'idea intuitiva del teorema di classificazione delle superfici

Cilindri e nastri di Möbius : ci si propone di far riconoscere cilindri e nastri di Mobius immersi nello spazio tridimensionale in vari modi, facendo osservare le circonferenze che formano il loro bordo (quante sono e come sono disposte) e cosa si ottiene tagliandoli a metà.

Caratteristica di Eulero

Lo scopo del laboratorio è quello di introdurre la caratteristica di Eulero, un numero intero, facilmente calcolabile, che si può associare ad ogni superficie e che, come il genere, è un invariante che permette di distinguere due superfici topologicamente equivalenti.

Un numero per distinguere le superfici 1: Si parte da grafi planari e da poliedri semplicemente connessi e si arriva alla relazione di Eulero F-S+V=2. (dove F,V,S indicano il numero di facce, vertici e spigoli di un grafo planare, ovvero di un poliedro).

Un numero per distinguere le superfici 2 : si parte dalla relazione di Eulero, per studiare quando non vale più: si esaminano quindi altri esempi di poliedri "strani" (ovvero deformabili in una ciambella a uno o più buchi) e ci si accorge di come si modifica in questo caso la relazione di Eulero: resta vero che il numero F-V+S non dipende dal particolare poliedro, ma solo dalla topologia della superficie rappresentata dal poliedro.