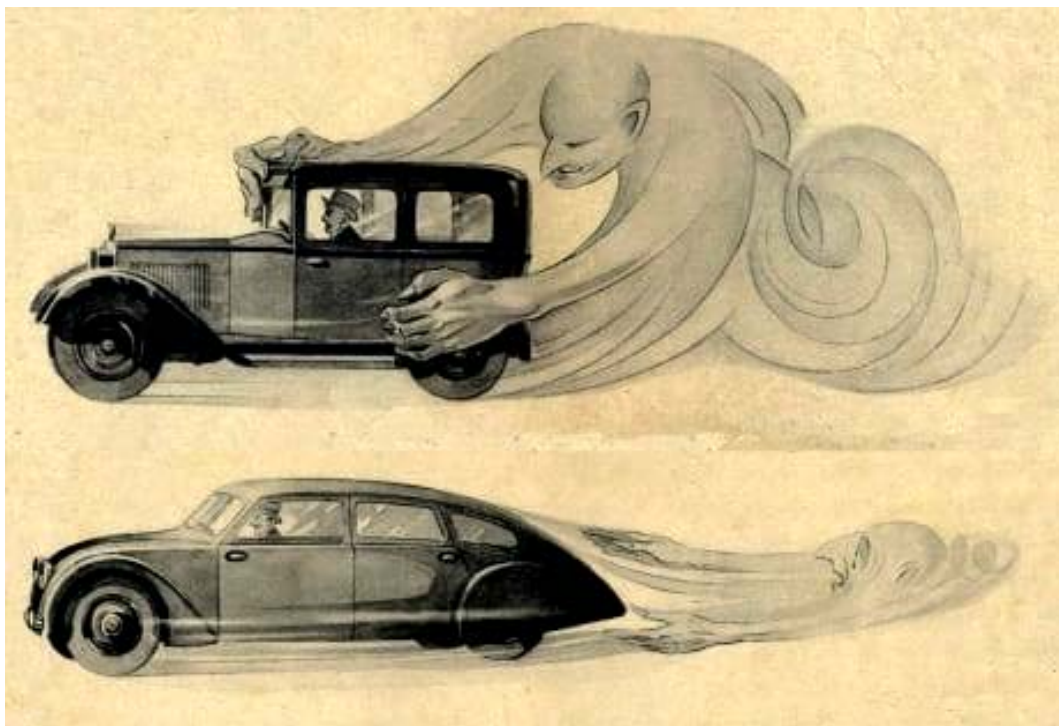


Giorgio Querzoli

Dispense di Meccanica dei fluidi per ingegneri meccanici

v. 8.8



e-mail: querzoli@unica.it
Dipartimento di Ingegneria Civile Ambientale e Architettura
Università degli Studi di Cagliari

“... Infine c'è un problema fisico comune a molti campi, molto antico e non ancora risolto. Non è il problema di trovare nuove particelle fondamentali, ma qualcosa di lasciato in sospeso molto tempo fa, più di cento anni. Nessuno è mai riuscito ad analizzarlo matematicamente in modo soddisfacente, nonostante la sua importanza nelle scienze affini alla fisica: è l'analisi dei flussi vorticosi o flussi turbolenti. Osservando l'evoluzione di una stella si arriva un punto in cui si capisce che sta per iniziare la convezione, e poi non si riesce a prevedere più niente. Qualche milione di anni più tardi la stella esplode, ma non si riesce a darne una ragione. Non riusciamo ad analizzare i fenomeni meteorologici. Non conosciamo i meccanismi dei moti che avvengono all'interno della Terra. La forma più semplice del problema è: si prende un tubo lungo e si pompa dentro di esso ad alta velocità. Ci chiediamo: per spingere una data quantità d'acqua lungo il tubo quanta pressione ci vuole? È impossibile stabilirlo a partire dai principi elementari e dalle proprietà dell'acqua. Se l'acqua scorre lentamente oppure se si usa un liquido viscoso come il miele, allora si riesce a fare benino, lo troverete su qualsiasi libro di testo. Quello che proprio non si riesce a fare è analizzare l'acqua vera, quella bagnata, che scorre in un tubo. Ecco il problema centrale che un giorno o l'altro dovremo riuscire a risolvere. ...”

Richard P. Feynman (Nobel per la fisica nel 1965)

da: *Sei pezzi facili*, Ed. Adelphi, 2000

SOMMARIO

SOMMARIO.....	3
INTRODUZIONE: DEFINIZIONE DI FLUIDO.....	6
1. RICHIAMI DI ANALISI TENSORIALE	9
1.1. INTRODUZIONE	9
1.2. OPERAZIONI TRA TENSORI.....	10
1.2.1. <i>Somma</i>	10
1.2.2. <i>Moltiplicazione per uno scalare</i>	10
1.2.3. <i>Prodotto</i>	10
1.2.4. <i>Prodotto scalare</i>	10
1.3. OPERATORE DI KRONECKER	11
1.4. SISTEMI DI RIFERIMENTO ORTONORMALI	11
1.5. CAMBIAMENTO DI SISTEMA DI RIFERIMENTO	12
1.6. PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DI UN TENSORE	13
1.7. PRODOTTO VETTORIALE.....	14
1.8. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI.....	14
1.9. CAMPI TENSORIALI.....	15
1.10. TEOREMI DI GREEN E STOKES	16
1.11. COORDINATE CURVILINEE.....	17
1.11.1. <i>Coordinate cilindriche</i>	19
1.11.2. <i>Coordinate sferiche</i>	20
2. CINEMATICA DEI FLUIDI.....	21
2.1. CINEMATICA LOCALE E TENSORE GRADIENTE DI VELOCITÀ	21
2.1.1. <i>Rotazione rigida</i>	22
2.1.2. <i>Velocità di deformazione</i>	24
2.2. DESCRIZIONE LAGRANGIANA ED EULERIANA DI UN CAMPO	27
2.2.1. <i>Descrizione Euleriana</i>	28
2.2.2. <i>Descrizione Lagrangiana</i>	28
2.3. CLASSIFICAZIONE DEI MOTI	29
3. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI	30
3.1. I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI.....	30
3.2. TEOREMA DI REYNOLDS	31
3.3. CONSERVAZIONE DELLA MASSA	34
3.3.1. <i>Forma globale</i>	34
3.3.2. <i>Forma locale</i>	34
3.4. BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO	35
3.4.1. <i>Forma globale</i>	35
3.4.2. <i>Verso la forma locale</i>	37
3.5. TENSORE DELLE TENSIONI	37
3.6. EQUAZIONE DI CAUCHY	39
3.7. BILANCIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO	39
3.8. EQUAZIONI COSTITUTIVE	40
3.8.1. <i>Equazione di stato</i>	41
3.8.2. <i>Equazione di stato</i>	42
3.9. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES	43
3.9.1. <i>Equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale</i>	44

3.9.2. <i>Flussi paralleli</i>	45
3.10. EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA	48
3.11. EQUAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE	50
4. IDROSTATICA	54
4.1. DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI ALL'INTERNO DI UN LIQUIDO PESANTE IN QUIETE	54
4.2. SPINTE IDROSTATICHE SULLE SUPERFICIE	56
4.2.1. <i>Spinte su superficie piane</i>	56
4.2.2. <i>Spinte su superficie curve</i>	60
4.3. ALCUNE APPLICAZIONI DELL'IDROSTATICA	63
4.2.3. <i>Manometri a liquido</i>	63
4.2.4. <i>Spessore di una condotta circolare</i>	64
5. EQUAZIONI DELLE CORRENTI	65
5.1. FLUSSI QUASI-UNIDIMENSIONALI	65
5.2. CONSERVAZIONE DELLA MASSA	67
5.3. EQUAZIONE DELL'ENERGIA PER LE CORRENTI	68
6. CORRENTI IN PRESSIONE	73
6.1. MOTO UNIFORME E PERMANENTE	73
6.1.1. <i>Generalità</i>	73
6.1.2. <i>Equazione di Darcy-Weisbach</i>	73
6.1.3. <i>Resistenza nelle condotte</i>	74
6.1.4. <i>Formule pratiche</i>	76
6.2. MOTO PERMANENTE	77
6.2.1. <i>Generalità</i>	77
6.2.2. <i>Variazioni graduali di sezione</i>	78
6.2.3. <i>Brusco allargamento</i>	78
6.2.4. <i>Brusco restringimento</i>	81
6.2.5. <i>Altre perdite di carico concentrate</i>	83
6.2.6. <i>Sbocco in un serbatoio</i>	84
6.2.7. <i>Imbocco di condotte</i>	85
6.2.8. <i>Pompe</i>	86
6.2.9. <i>Equazione dell'impianto</i>	89
6.2.10. <i>Grafico della linea dei carichi totali e della linea piezometrica</i>	90
7. APPLICAZIONI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI	93
7.1. EFFLUSSO LIBERO	93
7.2. VENTURIMETRO E ALTRI MISURATORI DI PORTATA	96
7.3. SPINTE DI GETTI	97
8. MOTI POTENZIALI	100
8.1. EQUAZIONE DELLA VORTICITÀ	100
8.2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA	101
8.2.1. <i>Moti irrotazionali</i>	101
8.2.2. <i>Potenziale</i>	102
8.2.3. <i>Equazione di Laplace</i>	103
8.2.4. <i>Condizioni al contorno</i>	103
8.2.5. <i>Equazione dell'energia meccanica</i>	104
8.2.6. <i>Funzione di corrente</i>	104
8.3. SOLUZIONI PARTICOLARI	107
8.3.1. <i>Flusso uniforme</i>	107
8.3.2. <i>Sorgente lineare</i>	107
8.3.3. <i>Vortice</i>	110
8.3.4. <i>Doppietta</i>	111
8.4. POTENZIALE COMPLESSO	113
8.4.1. <i>Potenziali complessi del moto uniforme, sorgente, vortice e doppietta</i>	114
8.4.2. <i>Cilindro investito da un flusso uniforme</i>	115
8.4.3. <i>Cilindro con circolazione</i>	118
8.4.4. <i>Azioni dinamiche sul cilindro</i>	121
8.4.5. <i>Condizioni di Cauchy-Riemann</i>	122
8.4.6. <i>Velocità complessa</i>	124
8.5. TRASFORMAZIONI CONFORMI	124

8.5.1. Flusso attorno ad un angolo	125
8.5.2. Campo di moto attorno ad un cilindro con circolazione investito da un flusso inclinato	126
8.6. PROFILI DI JOUKOWSKY	127
8.6.1. Trasformazione di Joukowski	127
8.6.2. Profilo piatto	127
8.6.3. Profilo ellittico	128
8.6.4. Profilo sottile	129
8.6.5. Profilo simmetrico	129
8.6.6. Profilo di Joukowski	130
8.6.7. Condizione di Kutta	131
9. STRATO LIMITE	135
9.1. EQUAZIONE DI PRANDTL	135
9.2. STATO DI TENSIONE	139
9.3. SPESSORE DELLO STRATO LIMITE	140
9.3.1. Spessore di spostamento	140
9.3.2. Spessore di quantità di moto	141
9.4. RESISTENZA DI UNA LASTRA PIANA	142
9.4.1. Soluzione di Blasius	143
9.5. SEPARAZIONE DELLO STRATO LIMITE	146
10. TURBOLENZA	149
10.1. DEFINIZIONE	149
10.2. DESCRIZIONE STATISTICA DELLA TURBOLENZA	151
10.2.1. Media di insieme e media temporale	151
10.2.2. Densità di probabilità	152
10.2.3. Momenti di ordine superiore	153
10.2.4. Correlazioni	154
10.2.5. Spettri di potenza	155
10.3. LE SCALE DELLA TURBOLENZA	155
10.3.1. Scale integrali	156
10.3.2. Scala di Taylor	156
10.4. IPOTESI DI TAYLOR	158
10.5. EQUAZIONI PER LE QUANTITÀ MEDIE	158
10.5.1. Decomposizione di Reynolds	158
10.5.2. Equazione di bilancio della massa	159
10.5.3. Equazione di Reynolds	159
10.6. IPOTESI DI BOUSSINESQ	161
10.7. EQUAZIONI GLOBALI PER I FLUSSI TURBOLENTI	162
10.7.1. Conservazione della massa	162
10.7.2. Bilancio della quantità di moto	163
11. STRATO LIMITE TURBOLENTO	165
11.1. TRANSIZIONE DELLO STRATO LIMITE	165
11.2. EQUAZIONI PER LO STRATO LIMITE TURBOLENTO	167
11.3. SOTTOSTRATO LAMINARE	170
11.4. NUCLEO	171
11.5. STRATO DI EQUILIBRIO	171
11.6. PARETI FLUIDODINAMICAMENTE SCABRE	172

INTRODUZIONE: DEFINIZIONE DI FLUIDO

Possiamo definire la Meccanica dei Fluidi come quella disciplina che studia il comportamento dei fluidi. Si tratta, in effetti, di una vasta classe di fenomeni che hanno una notevole rilevanza applicativa nei settori più diversi dell'ingegneria. Saranno innanzitutto ricavate le equazioni generali a partire dai principi fondamentali della meccanica; si poserà poi l'attenzione sui problemi relativi ai fluidi in quiete e su di una classe di flussi che hanno particolare rilievo applicativo: le correnti. Si tratta di flussi che si svolgono secondo una direzione preferenziale, nei quali la dimensione trasversale è molto inferiore allo sviluppo longitudinale. Essi si prestano quindi ad una trattazione monodimensionale, nella quale lo stato del fluido in una sezione della corrente è rappresentato in modo integrale con un solo valore per ogni grandezza fisica (velocità, pressione, ecc.); in questo modo tali grandezze vengono ad essere funzione della sola ascissa curvilinea misurata lungo lo sviluppo longitudinale della corrente. Questo tipo di trattazione ben si adatta allo studio di fenomeni come il moto dell'acqua all'interno di condotte, o quello dell'aria all'interno di un impianto di climatizzazione.

Nell'intraprendere questo percorso, il primo passo da compiere è chiarire con esattezza cosa si intende per fluido.

Per mettere in evidenza quali siano le caratteristiche peculiari dei fluidi immaginiamo di fare un esperimento: consideriamo due lastre piane parallele, poste ad una certa distanza tra loro (Figura 1). La lastra inferiore è fissata mentre quella superiore è in grado di scorrere rispetto all'altra. Proviamo inizialmente a riempire lo spazio compreso tra di esse con della gomma e, all'inizio dell'esperimento, applichiamo alla lastra superiore una forza costante $\mathbf{F}^1$. Osserveremo che la lastra superiore inizia a muoversi, prima rapidamente, poi sempre più lentamente fino a fermarsi. Quindi il materiale inizia a deformarsi, e tale deformazione inizialmente aumenta velocemente ma, dopo un certo intervallo di tempo, rimane pressoché costante sicché, al tendere del tempo all'infinito, tende ad assumere una configurazione di equilibrio come rappresentato nella Figura 1 pannelli (d, e, f). In particolare la il pannello (d) rappresenta la configurazione iniziale, e i pannelli (e) ed (f) rappresentano la configurazione in due istanti successivi all'applicazione della forza. Ripetiamo poi l'esperimento riempiendo l'intercapedine con acqua: in questo caso, quando viene applicata la forza $\mathbf{F}$, osserveremo che la lastra superiore inizia a muoversi ed accelera fino a raggiungere una velocità U costante. All'interno vi sarà una distribuzione di velocità crescente da zero in prossimità della lastra inferiore, fino ad U alla lastra superiore, come indicato nei pannelli a,b,c della Figura 1. In questo caso quindi il materiale non raggiunge una configurazione di equilibrio ma continua a deformarsi all'infinito.

¹ Indicheremo d'ora in avanti le quantità vettoriali con lettere in grassetto.

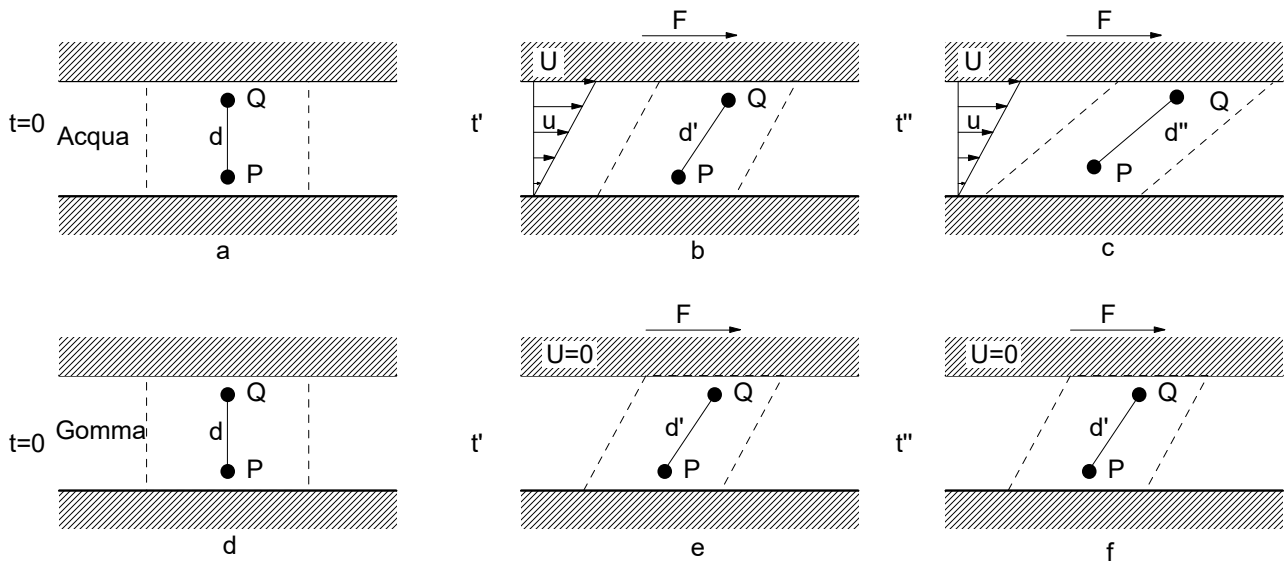


FIGURA 1

Ciò nondimeno la velocità con cui si deforma tende ad un valore finito. Per valutare la deformazione in modo quantitativo possiamo individuare due punti P e Q, solidali al materiale che riempie l'interstizio tra le due lastre, e misurare le variazioni relative della loro distanza:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}.$$

Per valutare invece la velocità di deformazione si potrà invece misurare la variazione relativa della distanza, per unità di tempo:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{d} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Osserveremo, per tali quantità, nel caso della gomma, :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \varepsilon \rightarrow \text{cost.} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow 0 \end{cases} ;$$

mentre nel caso dell'acqua:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \varepsilon \rightarrow \infty \\ \frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow \text{cost.} \end{cases} .$$

Si può concludere quindi che applicando alla gomma una sollecitazione costante nel tempo si ottiene, a regime, una deformazione costante ed una velocità di deformazione nulla. Ripetendo l'esperimento con diversi valori della forza, F , si potrà osservare inoltre che, tanto più grande è la forza, tanto maggiore è la deformazione. Questo è un comportamento tipico di un materiale solido. Applicando invece una sollecitazione costante all'acqua, dopo la fase transitoria, la deformazione aumenta indefinitamente, tendendo all'infinito, mentre la velocità di deformazione tende ad assumere un valore costante, finito. Ripetendo l'esperimento per diversi valori della sollecitazione si osserverà, in questo caso, che la velocità di deformazione è tanto più grande quanto maggiore è la sollecitazione. Prenderemo proprio questo comportamento come caratteristico di un fluido.

Possiamo pertanto definire *fluido* quel *mezzo continuo* per cui, in conseguenza di una sollecitazione costante, ad un tempo infinito corrisponde una velocità di deformazione finita e quindi misurabile.

Il concetto di mezzo continuo, sopra citato, è necessario per poter utilizzare gli strumenti del calcolo analitico nello studio di questi fenomeni. Si rende perciò necessario spendere qualche parola per chiarirlo e precisarlo. La materia che, come è noto è costituita da particelle elementari, ciò nondimeno sarà trattata in seguito come un mezzo continuo; si supporrà cioè che la massa sia distribuita con continuità nello spazio. Questo permetterà di considerare le grandezze fisiche che caratterizzano i fenomeni in gioco come funzioni continue reali dello spazio $\mathfrak{R}^3$ e del tempo. In effetti le caratteristiche del fluido, inteso come mezzo continuo saranno ottenute attraverso delle medie effettuate su di volumi molto piccoli, ΔV_p . La dimensione di questi volumetti corrisponde anche alla minima scala alla quale possiamo descrivere il comportamento di un fluido come mezzo continuo; questi volumetti devono essere sufficientemente piccoli rispetto alle scale dei fenomeni, da poter essere considerati di dimensione trascurabile, e le grandezze medie al loro interno costanti, ma grandi abbastanza da contenere un numero di particelle elementari così elevato che le medie siano statisticamente significative. L'ipotesi del continuo porta dunque ad ignorare la struttura della materia a livello atomico e la descrizione del moto a tale livello. Per tenere conto di questi moti vengono invece introdotte variabili termodinamiche come la temperatura la quale è legata all'energia cinetica media dei moti a livello atomico.

Si consideri un punto P, individuato dalla sua posizione $\mathbf{x}$, all'interno del fluido in esame, ed un volume ΔV che lo racchiude: indicata con ΔM la massa contenuta in ΔV , il limite:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (1)$$

se consideriamo la struttura atomica della materia non è una funzione continua delle variabili spaziali e dipende dal modo con cui si fa tendere il volume a zero, essendo funzione del comportamento delle particelle elementari che sono presenti nel volume. In effetti esiste ed è unico solo il limite per $\Delta V \rightarrow \Delta V_p$, con ΔV_p volumetto con le caratteristiche definite in precedenza. In questo caso infatti il numero di particelle elementari contenute nel volume è così grande da fare sì che la massa mediamente contenuta in esso sia indipendente dal comportamento delle singole particelle elementari e dal modo in cui il volume viene fatto tendere a ΔV_p . L'ipotesi di mezzo continuo consiste nel considerare il limite $\Delta V \rightarrow \Delta V_p$ equivalente al limite $\Delta V \rightarrow 0$. Essa difatti corrisponde a supporre che la particella fluida sia così piccola rispetto alla scala dei fenomeni che si stanno osservando, da poter essere considerata puntiforme. Si suppone inoltre che tale limite sia una funzione continua di classe C^n dello spazio e del tempo, Tale funzione, la *densità*, verrà indicata con $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_p} \frac{\Delta M}{\Delta V} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (1)$$

1. RICHIAMI DI ANALISI TENSORIALE

1.1. Introduzione

I fenomeni fisici sono rappresentabili in uno spazio vettoriale tridimensionale nel quale si suppone valida la geometria euclidea. Le quantità fisiche che caratterizzano i fenomeni sono dunque funzione delle coordinate di un generico punto (x_1, x_2, x_3) e del tempo, t .

In questo spazio le grandezze fisiche sono rappresentate attraverso entità matematiche diverse a seconda delle proprietà geometriche attraverso le quali sono definite:

- gli **scalari** sono definiti attraverso *un numero reale* associato ad un punto dello spazio²;
- i **vettori** sono definiti attraverso *un numero reale* associato ad un punto dello spazio e ad *una direzione orientata*³, e si definiscono in un sistema di riferimento attraverso 3 numeri reali (le componenti del vettore) organizzati in una matrice 3×1 ;

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};$$

- i **tensori** sono definiti attraverso un numero reale associato ad un punto dello spazio e a 2 *direzioni orientate*⁴, e sono definiti per mezzo di 9 numeri reali (le componenti del tensore), organizzati in una matrice 3×3 :

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

In modo più generale si può dire che la descrizione dei fenomeni è effettuata attraverso tensori di differente ordine, d , che, nello spazio a tre dimensioni, sono definiti mediante 3^d numeri reali (le componenti). Pertanto uno scalare può essere considerato un tensore di ordine zero; un vettore, un tensore di ordine 1, mentre i tensori di ordine 2 sono spesso chiamati semplicemente tensori.

Per poter utilizzare queste entità è necessario definire le operazioni che possono essere effettuate e le leggi secondo le quali si trasformano le loro componenti in seguito ad un cambiamento di sistema di riferimento.

² Esempi di quantità fisiche descritte da un campo scalare sono la temperatura o la pressione.

³ Esempi di quantità fisiche rappresentate da un campo vettoriale sono la forza, la velocità o l'accelerazione.

⁴ Come vedremo più avanti, sono descritte da un campo tensoriale gli sforzi interni a un fluido

1.2. Operazioni tra tensori

Richiamiamo brevemente le principali operazioni che possono essere effettuate con i tensori.

1.2.1. Somma

La somma può essere effettuata solo tra tensori dello stesso ordine e fornisce ancora un tensore dello stesso ordine degli addendi e che ha per componenti la somma delle componenti omologhe degli addendi:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow c_i = a_i + b_i \quad (\text{vettori})$$

oppure

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{tensori})$$

1.2.2. Moltiplicazione per uno scalare

Moltiplicare un tensore per uno scalare corrisponde a moltiplicare ciascuna componente del tensore per lo scalare:

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b} \Rightarrow c_i = \lambda b_i \quad (\text{vettori})$$

oppure

$$\underline{\underline{c}} = \lambda \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = \lambda b_{ij} \quad (\text{tensori})$$

1.2.3. Prodotto

Il prodotto tra tensori si effettua effettuando il consueto prodotto righe per colonne tra le matrici delle componenti. Se indichiamo con A, B e C, rispettivamente, le matrici delle componenti del tensore $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ e $\underline{\underline{c}}$, si ha:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \Rightarrow C = A B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1,3} a_{ik} b_{kj}$$

o, seguendo la notazione di Einstein:

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

secondo la quale si sottintende la sommatoria sugli indici ripetuti allo stesso membro di una equazione, se tale indice non compare anche nell'altro membro dell'equazione⁵.

Secondo le stesse regole si moltiplica un vettore per un tensore:

$$\mathbf{c} = \underline{\underline{a}} \mathbf{b} \Rightarrow c_i = \sum_{j=1,3} a_{ij} b_j = a_{ij} b_j.$$

1.2.4. Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due tensori è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe:

⁵ usando la notazione di Einstein, il prodotto righe per colonne tra matrici si ottiene ripetendo gli indici interni contigui, sui quali sono sottintese le somme, mentre il primo e l'ultimo indice sono relativi, rispettivamente all'indice di riga e di colonna. Per esempio: $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \underline{\underline{c}}$ diventa: $d_{ij} = a_{im} b_{mn} c_{nj}$ con le somme sottintese sugli indici m ed n.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow c = \sum_{j=1,3} a_j b_j = a_j b_j \quad (\text{vettori})$$

1.3. Operatore di Kronecker

Il delta di Kronecker, δ_{ij} , che si può riconoscere essere un tensore del secondo ordine, è definito in modo che, in qualsiasi sistema di riferimento, risulti:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j; \quad (2)$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j.$$

La matrice delle sue componenti non è altro che la matrice identità:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se si moltiplica δ_{ij} per un tensore caratterizzato dall'avere uno dei pedici coincidente con uno dei pedici del delta di Kronecker, si produce una variazione del pedice del tensore stesso:

$$a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij} \quad (3)$$

Infatti, poiché l'indice i è ripetuto, sono sottintese le somme, quindi sviluppando:

$$a_{ik} \delta_{kj} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1} \cdot \delta_{1j} + a_{i2} \cdot \delta_{2j} + a_{i3} \cdot \delta_{3j}. \quad (4)$$

Dei tre termini δ_{ij} sappiamo già che solo uno è diverso da zero: quello nel quale i due indici dell'operatore di Kronecker sono uguali, cioè quello in cui $k=j$. Quindi nella sommatoria precedente rimane solo il termine $a_{ij} \cdot \delta_{jj} = a_{ij} \cdot 1$.

1.4. Sistemi di riferimento ortonormali

In uno spazio tridimensionale tutti i vettori possono essere espressi come combinazione lineare di una terna di vettori, linearmente indipendenti tra loro, che costituiscono una base. Quindi, se $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ e $\mathbf{c}_3$ sono tali che il determinante:

$$\det(C_1 C_2 C_3) \neq 0$$

(avendo indicato con C_i la matrice colonna delle coordinate del vettore $\mathbf{c}_i$), allora, ogni vettore, $\mathbf{v}$ può essere espresso come:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{c}_i \quad (5)$$

ed i coefficienti v_i costituiscono le *componenti* del vettore $\mathbf{v}$ nel sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$.

Se i vettori della base sono ortogonali tra loro:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j &= 0 \text{ per } i \neq j \\ \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j &\neq 0 \text{ per } i = j \end{aligned} \quad (6)$$

il sistema si dice ortogonale. Se inoltre i vettori della base hanno modulo unitario (sono quindi dei *versori*):

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij} \quad (7)$$

allora la base viene detta *ortonormale*, ed il sistema di riferimento *cartesiano*. Nei capitoli successivi, tranne diversa indicazione, utilizzeremo sistemi di riferimento cartesiani.

1.5. Cambiamento di sistema di riferimento

Consideriamo due sistemi di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$ e $\{\mathbf{d}_i\}$ e cerchiamo la trasformazione che lega le componenti di un generico vettore, $\mathbf{v}$, nella base di partenza $\{\mathbf{c}_i\}$ a quelle nella nuova base $\{\mathbf{d}_i\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{c}_i \\ \mathbf{v} &= v'_i \mathbf{d}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

avendo indicato con l'apice le componenti del vettore nel sistema di riferimento $\{\mathbf{d}_i\}$. Per ricavare le componenti di $\mathbf{v}$ nel sistema di riferimento $\{\mathbf{d}_i\}$, a partire dalle sue componenti in $\{\mathbf{c}_i\}$ dobbiamo conoscere la trasformazione T tale che:

$$v'_i = T_{ij} v_j \quad (9)$$

ovvero:

$$v_i = R_{ij} v'_j \quad (10)$$

avendo indicato con R la trasformazione inversa di T : $R = T^{-1}$.

Per individuare la forma che assume T è sufficiente applicare la trasformazione ad un vettore della base $\mathbf{c}_i$. Innanzitutto notiamo che le componenti di $\mathbf{c}_i$ nel sistema di riferimento di cui fa parte sono tutte nulle, tranne la i -esima che è unitaria. Quindi, se indichiamo con c_{ij} la j -esima componente dell' i -esimo vettore della base, avremo che $c_{ij} = \delta_{ij}$. Se, usando la 9, trasformiamo le componenti dell' i -esimo vettore di base otteniamo:

$$c'_{ij} = T_{jk} \delta_{ik} = T_{ji}. \quad (11)$$

Quindi la matrice T ha per colonne le componenti dei vettori $\mathbf{c}_i$ rispetto alla base $\{\mathbf{d}_i\}$. Con un ragionamento analogo è possibile concludere che la matrice di trasformazione inversa, R , ha come colonne le componenti dei vettori, $\mathbf{d}_i$, del nuovo sistema di riferimento, espresse rispetto al vecchio sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$.

Se ci limitiamo a cambiamenti tra sistemi di riferimento ortonormali è possibile dimostrare che le matrici di trasformazione devono essere *ortogonali*:

$$T^t = T^{-1} \quad (12)$$

cioè la matrice trasposta deve coincidere con la matrice della trasformazione inversa. Inoltre il determinante, $\det(T)$, deve essere unitario con il segno positivo per trasformazioni che passano da sistemi di riferimento destrorsi ad altri sistemi di riferimento destrorsi e da sistemi di riferimento sinistrorsi ad altri sistemi di riferimento sinistrorsi, mentre il segno negativo è proprio delle trasformazioni che passano da sistemi destrorsi a sistemi sinistrorsi e viceversa.

Per determinare come si trasformano le componenti di un tensore è sufficiente imporre che i suoi effetti sull'applicazione ad un vettore non dipendano dal sistema di riferimento. Supponiamo ad esempio che un tensore $\underline{a}$ trasformi un vettore $\mathbf{b}$ in un vettore $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \underline{\underline{a}} \mathbf{b} \quad (13)$$

Se, come di consueto, indichiamo con lettere maiuscole le matrici delle componenti nel sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$, e con un apice quelle nel sistema $\{\mathbf{d}_i\}$, l'equazione precedente diventa:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (14)$$

nel sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$, e

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}' \mathbf{B}' \quad (15)$$

nel sistema di riferimento $\{\mathbf{d}_i\}$. Sostituendo l'equazione (9) nella (13):

$$\mathbf{R} \mathbf{V}' = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{B}'$$

e moltiplicando a sinistra per $\mathbf{R}^{-1}$ si ottiene:

$$(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}) \mathbf{V}' = \mathbf{V}' = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}) \mathbf{B}', \quad (16)$$

poiché $\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$. Confrontando, infine, la (15) con la (14) è facile verificare che il termine tra parentesi rappresenta proprio l'espressione cercata delle componenti di $\underline{\underline{a}}$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}. \quad (17)$$

Se la trasformazione è ortogonale si ha $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t$ e la relazione precedente diventa, scritta per componenti:

$$a'_{ij} = \mathbf{R}^{-1}_{ik} a_{km} \mathbf{R}_{mj} = \mathbf{R}_{ki} a_{km} \mathbf{R}_{mj}. \quad (18)$$

1.6. Proprietà di simmetria di un tensore

Ogni tensore può essere decomposto in tensori che godono di particolari proprietà di simmetria. Come vedremo nel seguito, alle proprietà di simmetria dei tensori corrispondono proprietà delle grandezze fisiche che essi rappresentano.

Innanzitutto consideriamo la decomposizione di un tensore nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica. Se $\underline{\underline{a}}$ è un generico tensore di componenti a_{ij} , possiamo sempre scrivere:

$$a_{ij} = 1/2 (a_{ij} + a_{ji}) + 1/2 (a_{ij} - a_{ji}) \quad (19)$$

nella quale:

$1/2(a_{ij} + a_{ji}) = \text{sym}(\underline{\underline{a}})_{ij}$ è la *parte simmetrica* di $\underline{\underline{a}}$; $\text{sym}(\underline{\underline{a}})_{ij} = \text{sym}(\underline{\underline{a}})_{ji}$, mentre

$1/2(a_{ij} - a_{ji}) = \text{skew}(\underline{\underline{a}})_{ij}$ è la *parte antisimmetrica*: $\text{skew}(\underline{\underline{a}})_{ij} = -\text{skew}(\underline{\underline{a}})_{ji}$.

Analogamente è possibile scomporre un tensore in una parte sferica ed una deviatoria:

$$a_{ij} = 1/3 \text{tr}(\underline{\underline{a}}) \delta_{ij} + (a_{ij} - 1/3 \text{tr}(\underline{\underline{a}}) \delta_{ij}) \quad (20)$$

avendo indicato con $\text{tr}(\underline{\underline{a}}) = a_{ii}$ (somme per $i=1,2,3$ sottintese) la traccia di $\underline{\underline{a}}$. Il primo termine a secondo membro indica la *parte sferica* di $\underline{\underline{a}}$, ed ha la proprietà che le sue componenti non variano al variare del sistema di riferimento, mentre il secondo termine, racchiuso tra parentesi, rappresenta la sua *parte deviatoria*.

1.7. Prodotto vettoriale

Sulla base delle precedenti definizioni è possibile introdurre il *prodotto vettoriale*:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (21)$$

il quale si può calcolare attraverso la relazione formale:

$$\mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Bisogna però osservare che il risultato di un prodotto vettoriale non è un vettore ma uno *pseudo-vettore* in quanto non è invariante per tutti i cambiamenti di sistema di riferimento. In particolare, il prodotto vettoriale cambia verso passando da un sistema di riferimento destrorso ad uno sinistrorso e viceversa.

1.8. Autovalori ed autovettori

Dato un tensore del secondo ordine $\underline{\underline{a}}$, si vuole trovare il vettore $\mathbf{b}$ per cui risulti:

$$\underline{\underline{a}} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b} \quad (22)$$

$\mathbf{b}$ è detto *autovettore*, λ è detto *autovalore*. La relazione precedente può anche essere scritta per componenti:

$$a_{ij} b_j = \lambda b_i; \quad \underline{\underline{a}} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b} \quad (23)$$

Per determinare le componenti di $\mathbf{b}$, si deve risolvere il sistema lineare omogeneo $(\underline{\underline{a}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = 0 \\ a_{21}b_1 + (a_{22} - \lambda)b_2 + a_{23}b_3 = 0 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + (a_{33} - \lambda)b_3 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Il sistema ha una soluzione non banale se il determinante ad esso associato è uguale a zero:

$$\det(\underline{\underline{a}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad (25)$$

I valori di λ per cui è verificata la precedente relazione, si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (26)$$

essendo:

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{a}}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii} \quad (27)$$

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{a}})$$

I_1 , I_2 e I_3 sono quantità scalari che non cambiano al variare del sistema di riferimento: gli *invarianti del tensore*. Gli autovalori λ che si ottengono dalla soluzione dell'equazione caratteristica, possono essere, in generale, numeri reali o complessi; nel caso di tensori simmetrici si può dimostrare che:

- gli autovalori sono reali;
- gli autovettori sono fra di loro ortogonali; poiché gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, essi definiscono un sistema di riferimento cartesiano detto *sistema di riferimento principale* per quel tensore;
- nel sistema di riferimento principale, le uniche componenti differenti da zero del tensore $\underline{a}$, sono quelle della diagonale principale e coincidono con gli autovalori:

$$\underline{a} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad (28)$$

1.9. Campi tensoriali

Si parlerà di campo tensoriale se in ogni punto di un dominio D è definito il tensore; quando cioè sono assegnate tutte le componenti del tensore in funzione della posizione $x \in D$.

Si definisce l'operatore vettoriale differenziale ∇ (leggi: *nabla*):

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \quad (29)$$

∇ può operare:

- su un campo scalare ϕ , ottenendo il vettore gradiente:

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x_1 \\ \partial\phi/\partial x_2 \\ \partial\phi/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \\ \phi_{,3} \end{pmatrix}; \quad (30)$$

avendo utilizzato la notazione compatta per le derivate parziali, secondo la quale $\partial a / \partial x_i = a_{,i}$.

- su un vettore $\mathbf{a}$ mediante prodotto scalare, ottenendo uno scalare che è la *divergenza* di $\mathbf{a}$:

$$\text{div}(\mathbf{a}) = \nabla \cdot \mathbf{a} = \partial a_j / \partial x_j = a_{j,j} \quad (31)$$

se un campo ha divergenza nulla, è detto *solenoidale*;

- un vettore $\mathbf{a}$ mediante prodotto vettore, ottenendo il vettore *rotore* di $\mathbf{a}$:

$$\text{rot}(\mathbf{a}) = \nabla \times \mathbf{a} \quad (32)$$

se un campo vettoriale ha rotore nullo, è detto *irrotazionale*;

- su un vettore $\mathbf{a}$ ottenendo un tensore del secondo ordine la cui generica componente è definita da:

$$(\nabla \mathbf{a})_{ij} = \partial a_j / \partial x_i = a_{j,i}$$

Il gradiente di una funzione potenziale è diretto lungo la normale, identificata dal versore $\mathbf{n}$, delle superfici equipotenziali; infatti, indicato con $\mathbf{s}$ il versore che identifica una generica direzione, la componente di $\mathbf{a} = \nabla\varphi$ lungo $\mathbf{s}$ è data da:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = a_i \frac{dx_i}{ds} = a_i \cos\alpha_{is} = a_i s_i \quad (33)$$

se $\mathbf{s}$ è contenuta nel piano tangente, risulta:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (34)$$

quindi il vettore $\mathbf{a}$ è diretto secondo la normale $\mathbf{n}$.

Si dimostra che un campo potenziale è irrotazionale e, viceversa, che un campo irrotazionale è potenziale.

Per un campo irrotazionale e solenoidale il *laplaciano*, del potenziale:

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi \quad (35)$$

è uguale a zero.

1.10. Teoremi di Green e Stokes

Se F è una funzione definita in tutti i punti di un dominio limitato V racchiuso dalla superficie chiusa S , risulta (*teorema di Green*):

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x_i} dV = \iint_S F n_i dS \quad (36)$$

essendo, così come nel seguito, $\mathbf{n}$ la normale alla superficie esterna al volume.

Se sono definite in tutto il dominio le componenti di un vettore $\mathbf{a}$, applicando il teorema di Green per le tre componenti di $\mathbf{a}$ si ottiene il *teorema della divergenza*:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \iiint_V \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dV = \iint_S a_j n_j dS = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (37)$$

l'integrale di superficie è il flusso di $\mathbf{a}$ attraverso la superficie S . Usando la notazione compatta per le derivate il teorema della divergenza si scrive:

$$\boxed{\iiint_V a_{j,j} dV = \iint_S a_j n_j dS} \quad (38)$$

Infine, assegnata una linea chiusa L , con versore tangente $\mathbf{s}$, in un campo D in tutti i punti del quale risulti definito il vettore $\mathbf{a}$ ed una superficie aperta S in D avente come contorno L , risulta (*teorema di Stokes*):

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} dl = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (39)$$

la quale stabilisce che: la circuitazione di $\mathbf{a}$ (il primo membro dell'equazione) è uguale al flusso del rotore di $\mathbf{a}$ attraverso una qualsiasi superficie delimitata da L .

1.11. Coordinate curvilinee

Siano x_i le coordinate di un generico punto in una terna cartesiana ortogonale, individuata dai versori $\mathbf{c}_i$, ed y_j le coordinate del medesimo punto in una terna curvilinea ortogonale individuata dai versori $\mathbf{b}_j$. Si suppone che il determinante Jacobiano della trasformazione $J = \det(x_{i,j})$ non si annulli e che siano di classe C^n le funzioni che stabiliscono la corrispondenza biunivoca tra le due terne:

$$x_i = x_i(y_j) ; \quad y_j = y_j(x_i). \quad (40)$$

Le superfici ove $y_j = \text{cost.}$ sono dette superfici coordinate, l'intersezione di ciascuna coppia di superfici coordinate definisce una curva coordinata. Nel caso di sistemi ortogonali, che sono gli unici che in seguito considereremo, le intersezioni delle curve coordinate formano tra loro un angolo retto.

Il vettore $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j}$ è tangente alla curva coordinata e quindi :

$$\mathbf{b}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} / \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} \right| \quad (41)$$

(si ricorda che, comparando l'indice j anche a primo membro, in questo caso non si sottintende la sommatoria sull'indice j ripetuto, secondo la notazione di Einstein). Posto:

$$h_j = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} \right| \quad (42)$$

risulta:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} = h_j \mathbf{b}_j \quad (43)$$

Le quantità h_j sono detti fattori di scala ed il verso di $\mathbf{b}_j$ è quello in cui risulta crescente y_j .

Poiché anche il gradiente di y_j è ortogonale alle superfici in cui y_j è costante, risulta (nel caso di coordinate curvilinee ortogonali):

$$\mathbf{b}_j = \nabla y_j / |\nabla y_j| \quad (44)$$

L'arco di curva $d\mathbf{x}$ è dato da:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} dy_j = h_j \mathbf{b}_j dy_j \quad (45)$$

pertanto la lunghezza dell'arco si ottiene dalla relazione:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = h_j^2 dy_j^2 \quad (46)$$

L'elemento di volume dV (essendo $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = 1$) è dato da:

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = h_1 \mathbf{b}_1 dy_1 \cdot h_2 \mathbf{b}_2 dy_2 \times h_3 \mathbf{b}_3 dy_3 = h_1 h_2 h_3 dy_1 dy_2 dy_3 \quad (47)$$

Si vogliono ora valutare le componenti f_j del gradiente di uno scalare ψ nel sistema di coordinate curvilinee:

$$\nabla\psi = f_j \mathbf{b}_j \quad (48)$$

poiché:

$$d\psi = \nabla\psi \cdot d\mathbf{x} = f_i h_i dy_i \quad (49)$$

il differenziale di ψ è dato anche da:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y_i} dy_i \quad (50)$$

eguagliando risulta:

$$f_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial\psi}{\partial y_j} \quad (51)$$

quindi:

$$\nabla = \frac{\mathbf{b}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (52)$$

Applicando la relazione precedente prendendo come funzione potenziale y_i , si ha:

$$\nabla y_i = \frac{\mathbf{b}_i}{h_i} \quad (53)$$

Poiché:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = h_2 h_3 \nabla y_2 \times \nabla y_3 \quad (54)$$

$$\nabla \cdot \nabla y_2 \times \nabla y_3 = 0 \quad (55)$$

la divergenza del vettore $a_1 \mathbf{b}_1$ risulta:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a_1 \mathbf{b}_1) &= \nabla \cdot (a_1 h_2 h_3 \nabla y_2 \times \nabla y_3) = \\ &= [\nabla(a_1 h_2 h_3)] \cdot \left[\frac{\mathbf{b}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{b}_3}{h_3} \right] + (a_1 h_2 h_3) \nabla \cdot [\nabla y_2 \times \nabla y_3] = \\ &= [\nabla(a_1 h_2 h_3)] \cdot \frac{\mathbf{b}_1}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(a_1 h_2 h_3)}{\partial y_1} \end{aligned} \quad (56)$$

Quindi la divergenza di un vettore è data da:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (a_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial y_2} (a_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial y_3} (a_3 h_1 h_2) \right] \quad (57)$$

In modo analogo si dimostra che il rotore ed il laplaciano sono dati da:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{b}_1 & h_2 \mathbf{b}_2 & h_3 \mathbf{b}_3 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ h_1 \mathbf{a}_1 & h_2 \mathbf{a}_2 & h_3 \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \quad (58)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{h_2 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{h_2 h_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_3} \right) \right] \quad (59)$$

1.11.1. Coordinate cilindriche

Siano ρ , ϕ e z le coordinate cilindriche (fig. 1); risulta:

$$x_1 = \rho \cos \phi ; \quad x_2 = \rho \sin \phi ; \quad x_3 = z \quad (60)$$

con: $\rho \geq 0; \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \quad -\infty < z < +\infty \quad (61)$

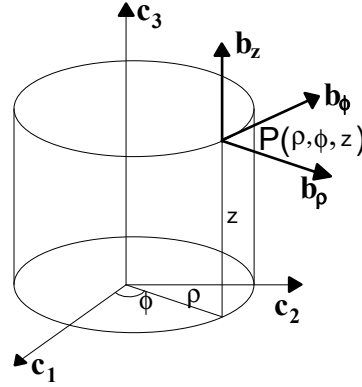


FIGURA 2

Pertanto:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1 \quad (62)$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \phi} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi} = \rho \quad (63)$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial z} \right)^2} = 1 \quad (64)$$

Quindi:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{b}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{b}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{b}_z \quad (65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho a_z) \right] \quad (66)$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho a_\phi) \right) \mathbf{b}_\rho + \left(\rho \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \rho \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{b}_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\phi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{b}_z \right] \quad (67)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

1.11.2. Coordinate sferiche

Siano ρ, θ e ϕ le coordinate sferiche definite come riportato in Figura 3. Risulta:

$$x_1 = \rho \sin \theta \cos \phi; \quad x_2 = \rho \sin \theta \sin \phi; \quad x_3 = \rho \cos \theta \quad (68)$$

con: $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Pertanto:

$$h_\rho = 1; h_\phi = \rho \sin \theta; h_\theta = \rho \quad (69)$$

quindi:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{b}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{b}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{b}_\phi \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \sin \theta a_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho a_\theta) \right] \mathbf{e}_\rho + \left[\frac{\partial a_\rho}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sin \theta a_\phi) \right] \rho \mathbf{e}_\theta + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\theta) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \right] \rho \sin \theta \mathbf{e}_\phi \right\} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \quad (72)$$

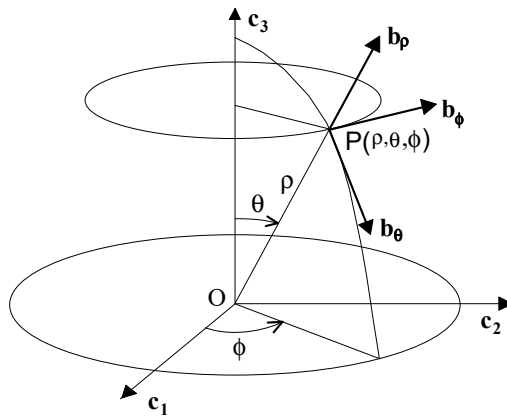


FIGURA 3

2. CINEMATICA DEI FLUIDI

2.1. Cinematica locale e tensore gradiente di velocità

La descrizione del comportamento cinematico di un fluido, e quindi di un mezzo continuo, richiede di essere in grado di descrivere il moto in un intorno infinitesimo di un punto qualsiasi del dominio che stiamo studiando. Consideriamo perciò un generico punto, O , ed un volumetto infinitesimo intorno ad esso, tale che la velocità al suo interno possa essere approssimata con uno sviluppo di Taylor al prim'ordine nell'intorno di O . Seguendo la consuetudine chiameremo tale volumetto *particella fluida*⁶. Scegliamo quindi una terna di assi di riferimento che, ad un certo istante, ha origine in O e osserviamo il moto del fluido per un intervallo di tempo Δt .

L'elementino di materia fluida (altrimenti detto *punto materiale*) inizialmente situato in O , durante l'intervallo di tempo Δt , si sposta fino al punto O' con velocità $(\mathbf{u})_O$:

$$OO' = (\mathbf{u})_O \Delta t \quad (73)$$

Contemporaneamente, un generico punto P appartenente alla particella fluida, individuato dalla sua posizione $\mathbf{x}$ nell'intorno di O , si sposta in P' con velocità $\mathbf{u}$ (Figura 4):

$$PP' = \mathbf{u} \Delta t \quad (74)$$

La velocità $\mathbf{u}$, generalmente diversa da $(\mathbf{u})_O$, si ottiene come sviluppo in serie nell'intorno dell'origine:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u})_O + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right)_O x_j + \dots \quad (75)$$

o, per componenti:

$$u_i = (u_i)_O + (u_{i,j})_O x_j + \dots \quad (76)$$

⁶ senza nessun riferimento alle particelle elementari che costituiscono la materia

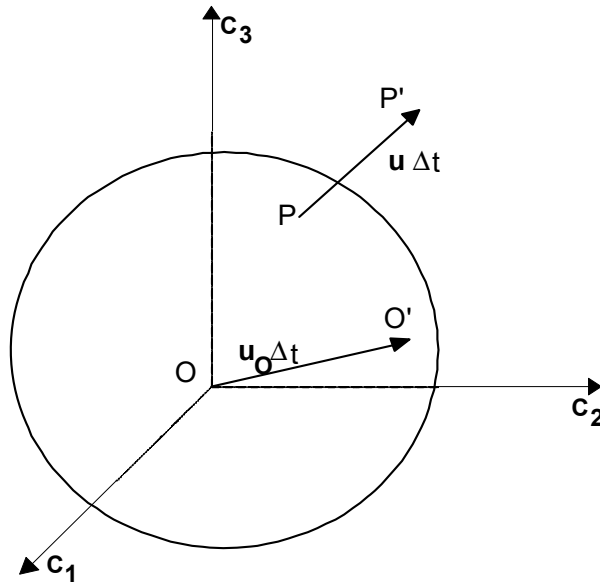


FIGURA 4

Lo spostamento di un generico punto di una particella fluida è dunque descritto dal tensore gradiente di velocità valutato nel punto O (sarà in seguito omissa il pedice O):

$$\nabla \mathbf{u}^t = \begin{vmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \partial u_1 / \partial x_2 & \partial u_1 / \partial x_3 \\ \partial u_2 / \partial x_1 & \partial u_2 / \partial x_2 & \partial u_2 / \partial x_3 \\ \partial u_3 / \partial x_1 & \partial u_3 / \partial x_2 & \partial u_3 / \partial x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{vmatrix} = \underline{\underline{r}} + \underline{\underline{e}} \quad (77)$$

Il tensore gradiente di velocità può essere decomposto nella somma di due tensori, uno antisimmetrico $\underline{\underline{r}} = \text{skew}(\nabla \mathbf{u}^t)$ ed uno simmetrico $\underline{\underline{e}} = \text{sym}(\nabla \mathbf{u}^t)$:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \quad (78)$$

Quindi la velocità del generico punto di coordinate (x_1, x_2, x_3) di una particella è data da:

$$u_i = (u_i)_O + r_{ij} x_j + e_{ij} x_j \quad (79)$$

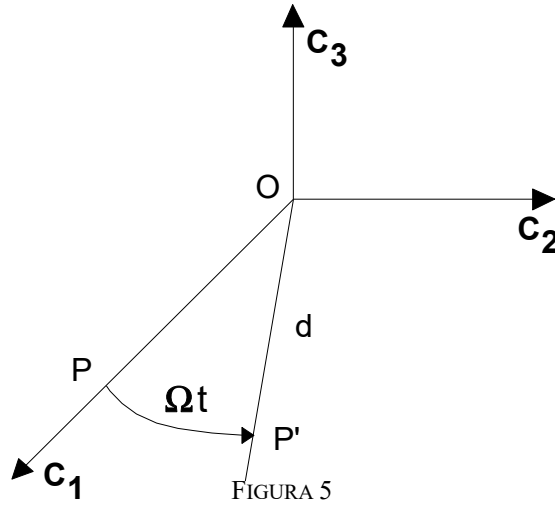
Vedremo in seguito che la parte antisimmetrica $\underline{\underline{r}}$ rappresenta la velocità di rotazione rigida, mentre la parte simmetrica $\underline{\underline{e}}$ rappresenta la velocità di deformazione. Il moto può essere considerato, pertanto, come la somma di:

- una traslazione con la velocità del baricentro della particella;
- una rotazione rigida descritta dal tensore $\underline{\underline{r}}$;
- una velocità di deformazione descritta dal tensore $\underline{\underline{e}}$.

Sul primo addendo non ci sono ulteriori commenti da fare, mentre il significato del secondo e del terzo saranno discussi nel seguito.

2.1.1. Rotazione rigida

Per prima cosa dimostriamo che il tensore $\underline{\underline{r}}$ rappresenta una rotazione rigida. Si consideri un moto di rotazione rigida infinitesima attorno a O, il teorema di Eulero mostra che la rotazione rigida, oltre al punto O, mantiene fissi tutti i punti di una retta passante per O: l'asse di rotazione.



Senza perdere di generalità, si può assumere come asse 3 l'asse di una rotazione che avviene con velocità angolare Ω (Figura 5). Indicato con d la distanza dall'asse di rotazione di un generico punto P inizialmente posto sull'asse c_1 , le relazioni che descrivono il suo moto, sono:

$$x_1 = d \cos \Omega t; \quad x_2 = d \sin \Omega t; \quad x_3 = \text{cost}; \quad (80)$$

quindi:

$$u_1 = -\Omega d \sin \Omega t = -\Omega x_2; \quad u_2 = \Omega d \cos \Omega t = \Omega x_1; \quad u_3 = 0; \quad (81)$$

Il tensore simmetrico $\underline{\underline{e}}$ ha tutte le componenti nulle. Il tensore antisimmetrico, $\underline{\underline{r}}$, risulta:

$$\underline{\underline{r}} = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (82)$$

È quindi stabilito che i termini $r_{12} = -r_{21}$ rappresentano una velocità rotazione rigida attorno all'asse x_3 . Ripetendo lo stesso ragionamento per una rotazione all'asse x_2 , si ottiene⁷ che gli elementi $r_{13} = -r_{31}$ rappresentano una velocità di rotazione rigida intorno all'asse x_2 . Analogamente si dimostra che gli elementi $r_{23} = -r_{32}$ rappresentano una velocità di rotazione rigida attorno all'asse x_1 . Se ne deduce che il moto descritto da un tensore antisimmetrico è quello di una rotazione rigida.

Le proprietà di rotazione locale di un fluido sono descritte spesso attraverso la *vorticità* del campo, che è data da:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot}(\mathbf{u}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (83)$$

Essa è in stretta relazione con il tensore $\underline{\underline{r}}$, infatti, confrontando le definizioni si ricava che:

$$\underline{\underline{r}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

⁷ è sufficiente ripetere i passaggi precedenti dopo aver cambiato numero di indice agli assi

Nell'esempio fatto in precedenza, di rotazione rigida intorno all'asse $\mathbf{c}_3$, solo la componente ω_3 sarebbe diversa da zero, e pari a:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ -\Omega x_2 & \Omega x_1 & 0 \end{vmatrix} = 2\Omega \mathbf{c}_3$$

2.1.2. Velocità di deformazione

Supponiamo ora, di scegliere un sistema di riferimento che trasla con O, e ruota alla stessa velocità del fluido. La velocità del punto O, $\mathbf{u}(O) = \mathbf{0}$, e il tensore velocità di rotazione risultano nulli, $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{0}}$. Il moto è allora descritto dal solo tensore simmetrico, $\nabla \mathbf{u}^t = \underline{\mathbf{e}}$, e la velocità di un generico punto si scrive:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 \\ u_2 &= e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 \\ u_3 &= e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 \end{aligned} \quad (85)$$

il moto risulta inoltre irrotazionale. Scegliamo ora due punti, un punto P sull'asse $\mathbf{c}_1$ e un punto Q sull'asse $\mathbf{c}_2$ e studiamo come si modificano in un intervallo di tempo Δt infinitesimo i due segmenti materiali OP e OQ. Con riferimento alla Figura 6, risulta che la velocità di un punto P, di coordinate $(x_1, 0, 0)$, che si trova all'istante iniziale sull'asse $\mathbf{c}_1$ è data da:

$$\begin{aligned} u_1(P) &= e_{11}x_1 + e_{12}0 + e_{13}0; \\ u_2(P) &= e_{21}x_1 + e_{22}0 + e_{23}0; \\ u_3(P) &= e_{31}x_1 + e_{32}0 + e_{33}0; \end{aligned} \quad (86)$$

analogamente per il punto Q di coordinate $(0, x_2, 0)$ che si trova sull'asse $\mathbf{c}_2$ la velocità risulta:

$$\begin{aligned} u_1(Q) &= e_{11}0 + e_{12}x_2 + e_{13}0; \\ u_2(Q) &= e_{21}0 + e_{22}x_2 + e_{23}0; \\ u_3(Q) &= e_{31}0 + e_{32}x_2 + e_{33}0; \end{aligned} \quad (87)$$

Valutiamo per prima cosa la variazione di lunghezza dei segmenti OP e OQ nell'intervallo di tempo considerato. Il segmento OP, diventerà il segmento OP' e la sua lunghezza sarà:

$$OP' = \frac{x'_1}{\cos(\Delta\alpha_p)} \cong x'_1 = x_1 + (\Delta x_1)_p.$$

Dobbiamo infatti considerare che, in quanto in un intervallo di tempo infinitesimo, l'angolo di rotazione del segmento materiale OP, $\Delta\alpha_p$, è molto piccolo e quindi $\cos(\Delta\alpha_p) = 1$. $(\Delta x_1)_p$ rappresenta quindi la variazione di lunghezza del segmento OP nell'intervallo di tempo Δt . Analogo ragionamento sarà possibile formulare per calcolare la lunghezza del segmento OQ':

$$OQ' = \frac{x'_2}{\cos(\Delta\alpha_q)} \cong x'_2 = x_2 + (\Delta x_2)_q$$

Dalla quale si evince che $(\Delta x_2)_q$ rappresenta quindi la variazione di lunghezza del segmento OP nello stesso intervallo di tempo. D'altra parte, gli spostamenti che avvengono in un intervallo di tempo Δt , saranno pari alla velocità del punto considerato per il tempo trascorso:

$$\begin{aligned}(\Delta x_1)_P &= u_1(P) \Delta t = e_{11} x_1 \Delta t; \\ (\Delta x_2)_Q &= u_2(Q) \Delta t = e_{22} x_2 \Delta t;\end{aligned}$$

ricavando dalla precedente i termini della diagonale principale:

$$e_{11} = \frac{1}{x_1} \frac{(\Delta x_1)_P}{\Delta t} \cong \frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt}; e_{22} = \frac{1}{x_2} \frac{(\Delta x_2)_Q}{\Delta t} \cong \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} \quad (88)$$

essi risultano essere, rispettivamente, le velocità di allungamento relativo lungo gli assi coordinati dei segmenti OP e OQ.

Calcoliamo ora di quanto varia l'angolo, α , compreso tra i due segmenti. Inizialmente esso sarà retto: $\alpha = \pi/2$. Dopo un tempo Δt , i due segmenti OP' e OQ' formeranno tra loro un angolo $\alpha' = \pi/2 + \Delta\alpha_Q - \Delta\alpha_P$. Le due rotazioni dei segmenti si possono calcolare come:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_P &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{(\Delta x_2)_P}{x'_1} \right) \cong \frac{(\Delta x_2)_P}{x'_1} \\ \Delta\alpha_Q &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{-(\Delta x_1)_Q}{x'_2} \right) \cong -\frac{(\Delta x_1)_Q}{x'_2}\end{aligned} \quad (89)$$

avendo confuso l'angolo con la tangente. Consideriamo ora i rapporti all'ultimo membro delle due equazioni ottenute. I numeratori sono:

$$\begin{aligned}(\Delta x_2)_P &= u_2(P) \Delta t = e_{21} x_1 \Delta t; \\ (\Delta x_1)_Q &= u_1(Q) \Delta t = e_{12} x_2 \Delta t;\end{aligned}$$

avendo usato la (86) e la (87) per esprimere le velocità dei punti materiali. Nel denominatore, invece, è possibile trascurare la variazione di lunghezza avvenuta durante l'intervallo di tempo Δt : $x_i \approx x'_i$. Sulla base di queste considerazioni otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_P &= \frac{(\Delta x_2)_P}{x'_1} = \frac{e_{21} x_1 \Delta t}{x_1} = e_{21} \Delta t \\ \Delta\alpha_Q &= -\frac{(\Delta x_1)_Q}{x'_2} = \frac{e_{12} x_2 \Delta t}{x_2} = -e_{12} \Delta t\end{aligned} \quad (90)$$

La velocità di variazione dell'angolo tra i due segmenti è dunque:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{(\alpha' - \alpha)}{\Delta t} = -\Delta\alpha_P + \Delta\alpha_Q = -(e_{21} + e_{12}) = -2e_{12}. \quad (91)$$

poiché $e_{12} = e_{21}$ per la simmetria di $\underline{e}$. Più in generale si può concludere che le componenti del tensore e_{ij} , con $i \neq j$, rappresentano $1/2$ della velocità di variazione dell'angolo, inizialmente retto, formato dai punti che si trovano lungo gli assi $\mathbf{c}_i$ e $\mathbf{c}_j$.

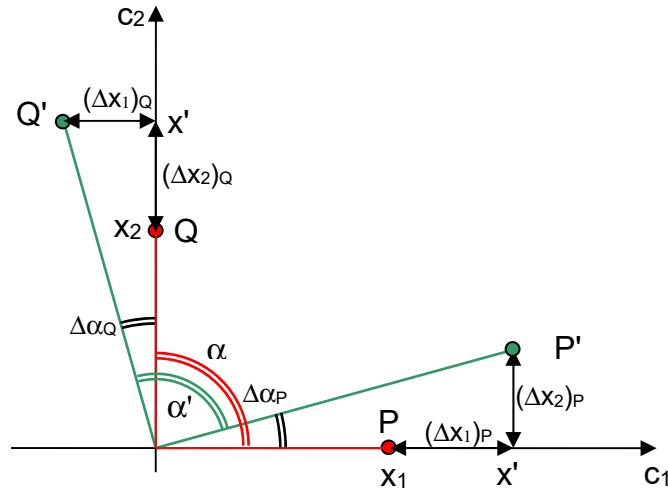


FIGURA 6

Infine studiamo le variazioni di volume di una particella fluida. Per farlo consideriamo 3 punti sugli assi coordinati: $P = (x_1, 0, 0)$ sull'asse c_1 , $Q = (0, x_2, 0)$ sull'asse c_2 , ed $R = (0, 0, x_3)$ sull'asse c_3 . A partire da questi punti costruiamo una particella di forma parallelepipedica con i lati paralleli agli assi della terna principale, e di volume $V = x_1 x_2 x_3$ (Figura 7).

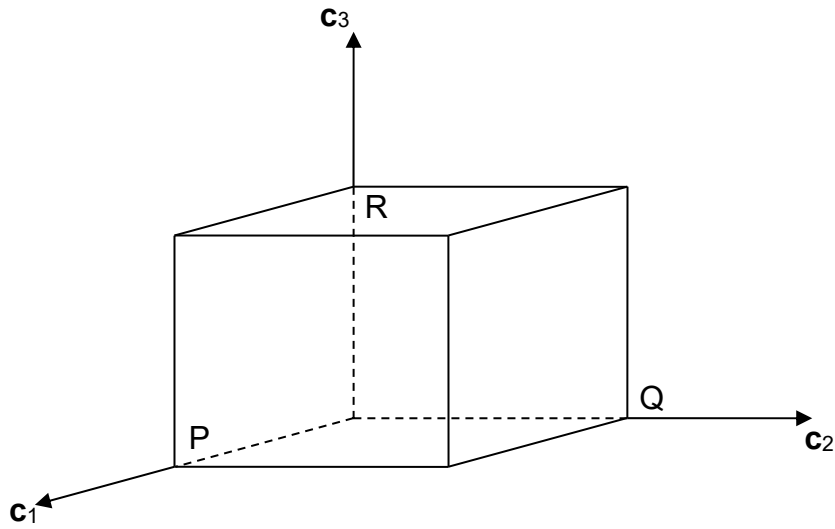


FIGURA 7

Dopo la deformazione, avvenuta nel tempo Δt , con ragionamenti del tutto simili a quelli condotti precedentemente si conclude che il volume diventa:

$$V' = x'_1 x'_2 x'_3 \quad (92)$$

le coordinate che compaiono a secondo membro, tenendo conto delle (86), (87) e delle analoghe per il punto R si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + (\Delta x_1)_P = x_1 + u_1(P) \Delta t = x_1 + e_{11} x_1 \Delta t; \\ x'_2 &= x_2 + (\Delta x_2)_Q = x_2 + u_2(Q) \Delta t = x_2 + e_{22} x_2 \Delta t; \\ x'_3 &= x_3 + (\Delta x_3)_R = x_3 + u_3(R) \Delta t = x_3 + e_{33} x_3 \Delta t; \end{aligned}$$

il volume dopo la variazione diventa quindi:

$$\begin{aligned} V' &= (x_1 + e_{11} x_1 \Delta t) (x_2 + e_{22} x_2 \Delta t) (x_3 + e_{33} x_3 \Delta t) = \\ &= x_1 x_2 x_3 (1 + e_{11} \Delta t) (1 + e_{22} \Delta t) (1 + e_{33} \Delta t) = \\ &= V + V(e_{11} + e_{22} + e_{33})\Delta t + o(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Notando che la somma dei termini all'interno della parentesi all'ultimo membro rappresenta la traccia di $\underline{e}$, e riorganizzando si ottiene:

$$\frac{1}{V} \frac{(V' - V)}{\Delta t} = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} \cong \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{tr}(\underline{e}). \quad (93)$$

La traccia del tensore gradiente della velocità, ha quindi il significato di velocità di variazione volumetrica relativa del fluido, ed è invariante per cambiamento di sistema di riferimento, pertanto il suo significato rimane valido in qualsiasi sistema di riferimento. Va notato che la traccia di $\underline{e}$ coincide con la divergenza del campo di velocità ed è anche pari alla traccia del gradiente di velocità trasposto:

$$\text{tr}(\underline{e}) = e_{jj} = u_{j,j} = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}^t) = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Nel caso di fluidi omogenei incompressibili, per i quali ogni porzione di fluido mantiene costante il suo volume, la velocità di variazione è nulla per cui deve essere nulla anche la divergenza, come sarà in seguito dimostrato anche per mezzo dell'equazione di bilancio della massa. Poiché la divergenza di $\mathbf{u}$, oltre ad essere la traccia del gradiente di velocità è anche la traccia del tensore velocità di deformazione, il risultato testé ottenuto consente una ulteriore scomposizione del tensore gradiente di velocità trasposto. Possiamo scomporre, infatti, $\underline{e}$ in parte sferica e parte deviatoria⁸:

$$\nabla \mathbf{u}^t = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{e}) \underline{\underline{I}} + \left(\underline{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{e}) \underline{\underline{I}} \right) + \underline{\underline{r}}; \quad (94)$$

ottenendo così la descrizione locale del moto come somma di tre termini: il primo rappresenta la velocità di variazione volumetrica relativa; il secondo, che per definizione ha traccia nulla, descrive una velocità di deformazione a volume costante; mentre il terzo, al solito, rappresenta la velocità di rotazione rigida.

2.2. Descrizione lagrangiana ed euleriana di un campo

Nella meccanica dei fluidi i fenomeni fisici sono descritti attraverso campi scalari o vettoriali che rappresentano le grandezze fisiche che caratterizzano il fenomeno. Se per esempio si intende studiare il moto convettivo di un fluido, le grandezze che lo descriveranno saranno un campo scalare, la temperatura, ed uno vettoriale, la velocità. La descrizione di questi campi può avvenire in due modi fondamentali:

- *lagrangiano* o materiale, secondo il quale si descrive la variazione temporale delle grandezze seguendo il moto di ciascuna particella fluida;
- *euleriano* o locale, secondo il quale, fissata una posizione, si descrive ciò che accade in quel punto al passare del tempo.

⁸ Ogni tensore $\underline{\underline{A}}$ può essere scomposto come: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{A}}) \underline{\underline{I}} + [\underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{A}}) \underline{\underline{I}}]$. Il primo termine rappresenta la parte sferica ed il secondo la parte deviatoria.

2.2.1. Descrizione Euleriana

Fissata una posizione $\mathbf{x}$, si osserva ciò che accade in quel punto al passare del tempo ad una grandezza A che caratterizza il comportamento del fluido. Una descrizione di questo tipo la otteniamo posizionando una sonda in grado di misurare la grandezza fisica di interesse (velocità, pressione, ecc...) in un punto fisso. Le variabili indipendenti sono dunque la posizione $\mathbf{x}$ ed il tempo:

$$A = A(\mathbf{x}, t).$$

La sua evoluzione temporale è descritta per mezzo della cosiddetta derivata *euleriana*, che si ottiene derivando rispetto al tempo il campo della grandezza A , mantenendo fissa la posizione dello spazio:

$$\left(\frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}=\text{cost.}} = A_{,t}.$$

2.2.2. Descrizione Lagrangiana

Per poter effettuare questo tipo di descrizione è necessario innanzitutto identificare univocamente ogni particella fluida. La scelta che viene convenzionalmente fatta è quella di identificare le particelle per mezzo della posizione, $\mathbf{x}_0$ che esse assumono in un istante di riferimento, t_0 , spesso scelto coincidente con l'istante iniziale.

Una volta identificata, la particella è seguita nel tempo, determinando, ad esempio, l'equazione della sua traiettoria:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t). \quad (95)$$

$\mathbf{X}$ indica la posizione al tempo t della particella fluida che, all'istante iniziale, si trovava nella posizione $\mathbf{x}_0$. Sono individuate nello stesso modo le altre grandezze relative alla particella: temperatura, pressione, ecc.. Per una generica grandezza A avremo:

$$a(\mathbf{x}_0, t) = A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t).$$

Avendo indicato con la minuscola il campo lagrangiano, ovvero funzione della particella $\mathbf{x}_0$ e del tempo, t . Le variabili indipendenti, in questa descrizione del moto, sono le tre coordinate iniziali $x_{0,i}$ ed il tempo, t .

La derivata *lagrangiana* (o materiale o sostanziale) di una assegnata grandezza, A , è definita dalla derivata parziale rispetto al tempo, avendo tenuta fissa la particella fluida cui si fa riferimento, quindi con $\mathbf{x}_0$ fissato:

$$\frac{Da(\mathbf{x}_0, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0=\text{cost.}}.$$

tenuto conto che $a(\mathbf{x}_0, t) = A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t)$, la derivata lagrangiana può essere scritta in funzione di derivate euleriane:

$$\frac{Da}{Dt} = \left(\frac{\partial A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0=\text{cost.}} = \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\text{cost.}} + \frac{\partial A}{\partial x_j} \Big|_{t=\text{cost.}} \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0=\text{cost.}} = A_{,t} + A_{,j} u_j = A_{,t} + \nabla A \cdot \mathbf{u} \quad (96)$$

avendo osservato che la derivata della posizione di una particella fluida rispetto al tempo corrisponde alla velocità del fluido:

$$u_j = \left. \frac{\partial x_j}{\partial t} \right|_{x_0 = \text{cost.}}$$

Vista l'importanza che riveste nella nostra trattazione, scriviamo esplicitamente la derivata lagrangiana della velocità, ovvero l'accelerazione del fluido:

$$a_i(x_0, t) = \left(\frac{\partial u_i(x_0, t)}{\partial t} \right)_{x_0 = \text{cost.}}$$

e, utilizzando le relazioni precedenti con $A = u_i$, si ottiene l'accelerazione:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = u_{i,t} + u_{i,j} u_j; \\ \mathbf{a} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (97)$$

2.3. Classificazione dei moti

A seconda del parametro considerato i moti di un fluido possono essere classificati in vario modo; alcune possibili classificazioni sono:

- *Tridimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da tutte le variabili indipendenti spaziali.
- *Bidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da due variabili indipendenti spaziali; se tali variabili sono due coordinate cartesiane si parla di moto piano; se tali variabili sono θ e r in coordinate cilindriche si parla di moto assialsimmetrico.
- *Unidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da una sola variabile spaziale indipendente; è questo il caso del moto in un condotto.
- *Permanenti o stazionari*: se le grandezze che caratterizzano il moto non dipendono dal tempo; in tal caso, in una descrizione euleriana, sono nulle le derivate spaziali rispetto al tempo.

Sono definiti inoltre i seguenti luoghi geometrici:

- *Traiettoria di una particella*: il luogo dei punti occupati in tempi successivi dalla stessa particella fluida;
- *Linea di corrente (o linea di flusso)*: è una linea che ha per tangente il vettore velocità in ogni punto;
- *Linea di fumo*: è il luogo dei punti occupati, ad un dato istante, dalle particelle che sono passate per uno stesso punto.

Nel caso di moto permanente i tre luoghi geometrici, precedentemente introdotti, coincidono.

3. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

3.1. I principi della meccanica dei fluidi

La meccanica dei fluidi è basata su due classi di ipotesi fondamentali dalle quali si parte per ottenere un sistema di equazioni differenziali chiuso, ovvero nel quale vi siano tante equazioni quante incognite: i) i *principi di bilancio*, che caratterizzano la dinamica dei fluidi come di tutti gli altri mezzi continui; ii) le *equazioni costitutive e di stato*, che stabiliscono delle relazioni tra stato tensionale e deformazioni (o meglio, velocità di deformazione) per ciascun diverso tipo di fluido.

I principi sui quali si basa la dinamica dei fluidi sono:

1. **Principio di conservazione della massa:** La massa di una qualsiasi porzione di fluido è costante. Sia V_m un volume costituito sempre dalla stessa porzione di materia⁹, che d'ora in poi sarà chiamato *volume materiale*, la sua massa è data da:

$$m = \int_{V_m(t)} \rho dV; \quad (98)$$

quindi, il principio può essere espresso come:

$$\boxed{\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0.} \quad (99)$$

2. **Principio di bilancio della quantità di moto** (Eulero, 1752): La variazione della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido è pari alla risultante delle forze esterne che agiscono sulla porzione di fluido stessa; considerando un volumetto infinitesimo dV , la sua massa è $dm = \rho dV$, perciò la sua quantità di moto è $d\mathbf{q} = \mathbf{u} dm = \rho \mathbf{u} dV$. Se consideriamo una porzione di fluido che occupa un volume materiale, V_m , la sua quantità di moto, $\mathbf{q}$, è quindi:

$$\mathbf{q} = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV \quad (100)$$

e, indicando con $\mathbf{R}$ la risultante delle forze esterne che agiscono su V_m , il principio può essere espresso come:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{R};} \quad (101)$$

3. **Principio di bilancio del momento della quantità di moto** (Eulero, 1775): La variazione del momento della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido

⁹ Un volume materiale contiene sempre la stessa porzione di fluido, dobbiamo quindi intendere che V_m coincide con la regione di spazio occupata sempre dalle stesse molecole di fluido (non solo lo stesso numero!). Se il fluido si muove, il volume materiale cambia conseguentemente nel tempo.

è pari al momento risultante delle forze esterne che agiscono sulla porzione di fluido stessa. Il momento della quantità di moto di un volume materiale, V_m , calcolato rispetto all'origine degli assi, è definito da:

$$\mathbf{k} = \int_{V_m(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV \quad (102)$$

e, indicando con $\mathbf{k}_e$ il momento risultante delle forze esterne che agiscono su V_m possiamo esprimere il principio come:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{k}_e} \quad (103)$$

I principi così enunciati non valgono solo per i fluidi ma per tutti i mezzi continui, dai soli elastici ai gas perfetti. Le derivate temporali che compaiono nelle equazioni sono *derivate lagrangiane* perché considerano la variazioni nel tempo calcolate sempre sulla stessa materia, ovvero seguendo il fluido nel suo moto. Il principio di conservazione della massa, affermando che la stessa porzione di fluido ha sempre la stessa massa, stabilisce che essa è una proprietà intrinseca della materia intesa come mezzo continuo. Il secondo principio, quello di bilancio della quantità di moto, stabilisce invece, come vedremo più avanti, a quali accelerazioni è soggetto un fluido sul quale agisce un determinato sistema di forze, e stabilisce inoltre che questa relazione si esplica attraverso una quantità fisica, la massa per unità di volume, ovvero la densità; quindi esso può essere considerato il principio che definisce la massa per i mezzi continui. Il principio di bilancio del momento della quantità di moto, infine, permette di stabilire alcune importanti caratteristiche di simmetria dello stato tensionale di un fluido.

3.2. Teorema di Reynolds

Quella data di anzi costituisce una formulazione lagrangiana dei principi, infatti le equazioni sopra scritte fanno riferimento non a regioni fisse dello spazio ma a porzioni di materia identificate con volumi materiali. Per passare ad una descrizione euleriana abbiamo bisogno di trovare un'espressione euleriana per la derivata lagrangiana di un integrale su di un volume V_m che dipende dal tempo; questa espressione ci è data dal *teorema del trasporto* o di Reynolds.

Se consideriamo l'integrale di una generica grandezza, A , in un volume materiale $V_m(t)$, racchiuso dalla superficie S_m , e indichiamo tale integrale con F :

$$F(t) = \int_{V_m(t)} A(t) dV \quad (104)$$

la sua derivata lagrangiana può essere calcolata applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale alla funzione F :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \frac{DF(t)}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t') - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t')} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t} \quad (105)$$

essendo $t' = t + \Delta t$. Definendo la variazione di volume nell'intervallo di tempo Δt : $\Delta V = V_m(t') - V_m(t)$, l'integrale su $V_m(t') = V_m(t) + \Delta V$ può essere scomposto in due: un'integrale su $V_m(t)$ ed uno esteso a ΔV :

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t)} A(t') dV + \int_{\Delta V_m} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t} = \\
&= \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV}_I + \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(t')}{\Delta t} dV}_{II}
\end{aligned} \tag{106}$$

Il termine I dell'ultimo membro rappresenta il limite per Δt che tende a zero del rapporto incrementale della grandezza A rispetto alla variabile t , eseguita su di un volume fisso, $V_c = V_m(t)$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV$$

V_c è un volume, detto *di controllo*, che non dipende dal tempo e che gode della proprietà di coincidere con V_m all'istante t . Il termine II può essere riscritto come un'integrale di superficie tenendo conto della Figura 8.

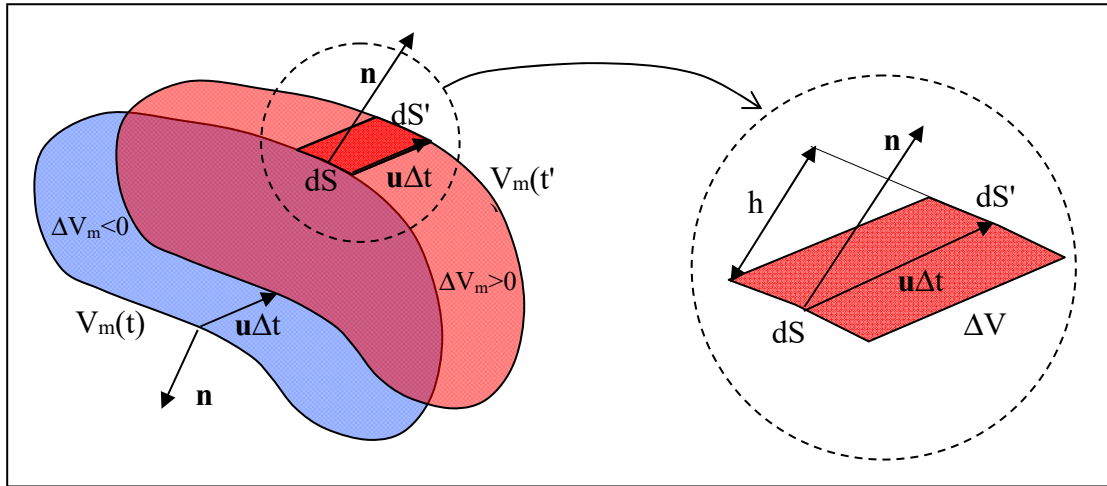


FIGURA 8

Consideriamo il volume materiale, $V_m(t)$, al tempo t (area campita in azzurro nella figura). Dopo l'intervallo di tempo Δt il volume si sarà spostato con il fluido diventando $V_m(t')$ (rosso chiaro in figura). Per ottenere il volume $V_m(t')$ dal volume $V_m(t)$ è necessario aggiungere la zona solo rossa in figura e sottrarre la regione solo azzurra. Mentre la regione nella quale sono sovrapposti i due colori è comune ai due volumi e non va né aggiunta né sottratta. La variazione di volume ΔV sarà quindi composta dalla regione solo rossa con segno positivo e da quella solo azzurra con segno negativo.

Sia dS un elementino della superficie del volume materiale, preso al tempo t ; dopo l'intervallo di tempo Δt , l'elementino di superficie materiale si sarà spostato con il fluido di una quantità $\mathbf{u} \Delta t$ diventando l'elementino dS' . In questo spostamento essa avrà spazzato un parallelepipedo infinitesimo, di volume dV , con base dS ed altezza $h = (\mathbf{u} \Delta t) \cdot \mathbf{n}$ (vedi l'inserito di Figura 8). Perciò il volumetto del parallelepipedo è:

$$dV = dS h = dS (\mathbf{u} \Delta t) \cdot \mathbf{n} \tag{107}$$

Il parallelepipedo dV è una porzione infinitesima del volume ΔV che, nell'esempio di Figura 8, ha valore positivo poiché, nella parte solo rossa l'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{n}$ è acuto e il loro prodotto scalare risulta positivo. Ripetendo lo stesso ragionamento dove l'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{n}$ è ottuso (parte inferiore della superficie in figura, solo azzurra), il prodotto scalare risulta $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ e dunque il volumetto ha

segno negativo in accordo con il segno che devono avere le due parti del volume ΔV secondo quanto osservato in precedenza. Osservando che, quando dS spazza l'intera superficie materiale, $S_m(t)$, il parallelepipedo costruito su di esso spazza l'intero volume ΔV , l'integrale II può essere riscritto come:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(t')}{\Delta t} dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{S_m(t)} \frac{A(t')}{\Delta t} \mathbf{u} \Delta t \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_m(t)} A(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS; \quad (108)$$

supponendo che A sia una funzione continua:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} A(t') = A(t). \quad (109)$$

Quest'ultima espressione può essere sostituita nella equazione (106), ricordando che il volume materiale al tempo t coincide con il volume di controllo e che quindi (*solo al tempo t*) $V_m(t) = V_c$ e $S_m(t) = S_c$:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{S_c} A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (110)$$

Il volume V_c non dipende dal tempo, quindi si può portare la derivata fuori dal segno di integrale, ottenendo la:

$$\boxed{\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV}_I = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} A dV}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}_{III}} \quad (111)$$

che è una **prima formulazione del teorema di Reynolds**. È importante notare che l'espressione $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dS$ rappresenta il volume di fluido che attraversa la superficie dS nell'unità di tempo. Infatti il fluido che attraversa l'elementino dS nel tempo dt ha per base dS e per altezza $(\mathbf{u} dt) \cdot \mathbf{n}$ (Figura 9). Moltiplicata per A , rappresenta quindi il flusso della proprietà fisica A attraverso dS .

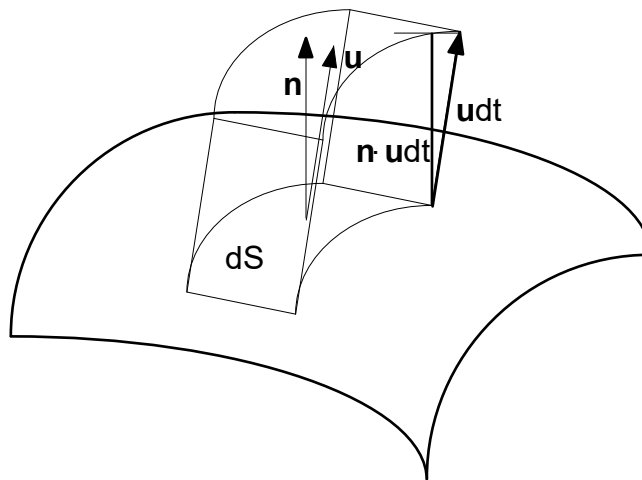


FIGURA 9

Pertanto la formulazione ora esposta del teorema di Reynolds può essere così letta: la variazione nell'unità di tempo della quantità A , integrata su di un volume materiale (termine I), è data dalla somma della variazione di A all'interno del volume di controllo (termine II) e del flusso di A attraverso la superficie S_c (termine III).

Nel caso in cui A ed $\mathbf{u}$ siano di classe C^1 , applicando il teorema di Green all'equazione (110) si ricava inoltre:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \int_{V_c} [A_{,t} + \nabla \cdot (A\mathbf{u})] dV = \int_{V_c} [A_{,t} + (Au_j)_{,j}] dV = \int_{V_c} \left[\underbrace{A_{,t} + u_j A_{,j}}_I + \underbrace{Au_{j,j}}_{II} \right] dV. \quad (112)$$

I primi due termini, I, coincidono con la derivata lagrangiana di A (vedi l'equazione (96)), mentre il termine II corrisponde ad A per la divergenza di $\mathbf{u}$; perciò otteniamo:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \int_{V_c} \left(\frac{DA}{Dt} + A \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV} \quad (113)$$

che costituisce la **seconda formulazione del teorema di Reynolds**. Essa consente di esprimere la derivata temporale di un integrale su di un volume materiale in una espressione nella quale compare un integrale su di un volume di controllo. In ultima analisi quindi ci permette di passare da una descrizione lagrangiana ad una euleriana del fenomeno.

3.3. Conservazione della massa

3.3.1. Forma globale

Il principio di conservazione della massa stabilisce che la massa, m , di un volume materiale, contenente quindi sempre le stesse particelle, rimane costante nel tempo:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0. \quad (114)$$

Applicando il teorema di Reynolds nella sua prima formulazione,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV}_{m_{,t}} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}_{\Phi_m} = 0 \quad (115)$$

si ottiene l'equazione di conservazione della massa in forma globale:

$$\boxed{m_{,t} + \Phi_m = 0}, \quad (116)$$

dove $m_{,t}$ è la variazione nell'unità di tempo della massa contenuta nel volume di controllo e con Φ_m è stato indicato il flusso di massa attraverso la superficie del volume di controllo.

3.3.2. Forma locale

Applicando invece il teorema di Reynolds nella sua seconda formulazione si ha:

$$\int_{V(t)} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV = 0. \quad (117)$$

Affinché la relazione precedente sia verificata per qualsiasi V , ipotizzando che ρ e $\mathbf{u}$ siano funzioni continue ed a derivata continua, occorre che la funzione integranda sia nulla in tutto il campo; si ottiene quindi l'equazione di conservazione della massa in forma locale, o come viene a volte chiamata, l'*equazione di continuità*:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (118)$$

che può anche essere riscritta:

$$\rho_{,t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (119)$$

Se $\rho = \text{cost.}$, cioè se il fluido è incomprimibile, il campo risulta essere solenoidale:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 ; \quad u_{j,j} = 0. \quad (120)$$

E' utile osservare che per ottenere l'equazione di bilancio della massa nella sua forma locale è stato necessario formulare l'ipotesi che sia la densità che la velocità siano funzioni continue, con derivata continua, nello spazio. Tale ipotesi non è invece richiesta per ottenere la formulazione globale, che quindi riveste un carattere di maggiore generalità essendo applicabile anche quando all'interno del volume di controllo siano presenti discontinuità. Ciò vale sia nella formulazione della conservazione della massa, che si sta qui trattando, sia nelle formulazioni analoghe per il bilancio della quantità di moto e del momento della quantità di moto che saranno ricavate nel seguito.

3.4. Bilancio della quantità di moto

3.4.1. Forma globale

La variazione della quantità di moto $\mathbf{q}$ del fluido contenuto in un volume materiale, V_m , composto sempre dalle stesse particelle, è pari alla risultante delle forze esterne $\mathbf{R}$:

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{R}. \quad (121)$$

Applicando il teorema di Reynolds nella prima formulazione:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} (\rho \mathbf{u}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (122)$$

o, per componenti:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} (\rho u_i) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho u_i) dV + \int_{S_c} (\rho u_i) u_j n_j dS. \quad (123)$$

Scomponiamo ora la risultante delle forze esterne, $\mathbf{R}$, in una parte dovuta alle forze proporzionali alla massa ed in una dovuta alle forze applicate alla superficie. Se consideriamo un generico elementino della superficie, ΔS , con normale $\mathbf{n}$ (esterna), sottoposto ad una forza di superficie $\Delta \mathbf{F}_s$, in congruenza con l'ipotesi del continuo esisterà e sarà funzione continua di classe C^n il limite:

$$\mathbf{t}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S} \quad (124)$$

che chiameremo *sforzo* relativo alla normale $\mathbf{n}$. Con riferimento alla Figura 10 $\mathbf{t}_n$ rappresenta la forza, per unità di superficie, esercitata dal fluido che si trova a contatto con la faccia positiva sul fluido a contatto con la faccia negativa.

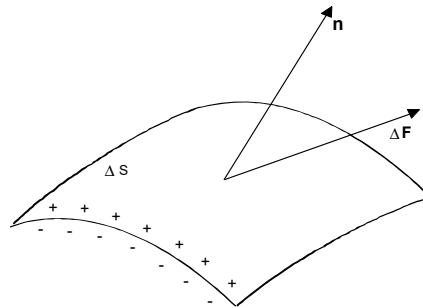


FIGURA 10

Analogamente esisterà e sarà funzione continua di classe C^n il limite:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_v}{\Delta m} \quad (125)$$

dove $\Delta \mathbf{F}_v$ sono le forze che agiscono su di un elementino di volume ΔV e Δm è la sua massa. Con queste posizioni il bilancio della quantità di moto diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS, \quad (126)$$

e ponendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{I} \quad \text{Variazione della quantità di moto contenuta nel volume di controllo}$$

$$\int_{S_c} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{M} \quad \text{Flusso di quantità di moto attraverso la superficie } S_c$$

$$\int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV = \mathbf{G} \quad \text{Risultante delle forze di massa agenti su } V_c$$

$$\int_{S_c} \mathbf{t}_n dS = \mathbf{\Pi} \quad \text{Risultante delle forze di superficie agenti su } S_c$$

si ottiene l'equazione della quantità di moto in forma globale:

$$\boxed{\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}} \quad (127)$$

cioè la risultante delle forze esterne (di massa e di superficie) applicate ad un volume di controllo uguaglia la somma della variazione nell'unità di tempo della quantità di moto contenuta nel volume di controllo e del flusso di quantità di moto attraverso la superficie che delimita il volume di controllo.

3.4.2. Verso la forma locale

Applichiamo il teorema di Reynolds nella sua seconda formulazione:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_c} \left(\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + (\rho \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = , \quad (128)$$

e sviluppiamo la derivata del prodotto del primo termine a secondo membro:

$$= \int_{V_c} \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV = \int_{V_c} \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \underbrace{\mathbf{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right)}_I \right] dV = \int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \quad (129)$$

essendo nullo, per la conservazione della massa (118), il termine I. Utilizzando, inoltre, la stessa decomposizione delle forze esterne del paragrafo precedente otteniamo:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS \quad (130)$$

Per poter scrivere un'equazione in forma differenziale è necessario trasformare l'integrale di superficie a secondo membro in un integrale di volume per poi ripetere il ragionamento già fatto per la conservazione della massa e trovare una relazione per la funzione integranda. Cerchiamo quindi un altro modo di descrivere lo stato di tensione alla superficie del volume di controllo, che ci consenta di applicare il teorema della divergenza all'integrale di superficie.

3.5. Tensore delle tensioni

Si consideri il tetraedro limitato dalle superfici di area S_i che giacciono sui piani coordinati e dalla superficie di area S_n , che giace sul piano individuato dalla normale $\mathbf{n}$ (detto *tetraedro di Cauchy*) (pannello di sinistra in Figura 11). Sia inoltre h la distanza tra la superficie S_n e l'origine.

Le normali alle superficie sono assunte positive quando sono uscenti dal volume considerato; pertanto le normali, $\mathbf{n}_i$, relative alle facce che giacciono sui piani coordinati sono opposte ai versori $\mathbf{c}_i$ che individuano gli assi coordinati.

Facciamo ora tendere $h \rightarrow 0$, in modo che il tetraedro diventi infinitesimo, e valutiamo l'ordine di grandezza dei singoli termini dell'equazione (130): i 2 integrali di volume sono proporzionali al volume V del tetraedro, e di conseguenza ad h^3 , mentre l'integrale di superficie è proporzionale all'area della superficie del tetraedro e quindi è proporzionale ad h^2 . Al limite per h che tende a zero i due integrali di volume saranno allora trascurabili rispetto a quello di superficie, e dovrà quindi essere soddisfatta la:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS = 0, \quad (131)$$

la quale, per il tetraedro di Cauchy, afferma che la somma delle forze di superficie agenti su ciascuna faccia deve annullarsi.

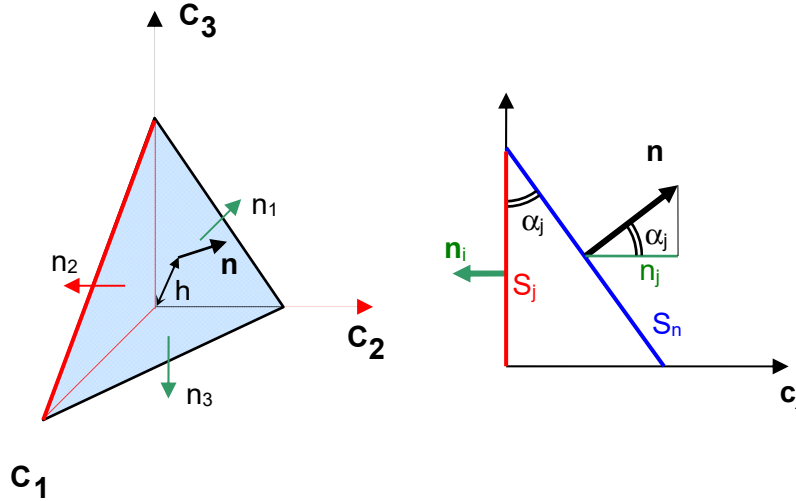


FIGURA 11

Lo sforzo relativo alla generica superficie S_j , con normale $\mathbf{c}_j$, sarà indicato con $\boldsymbol{\tau}_j$, e la sua i -esima componente con τ_{ij} ; le componenti di questi tre sforzi possono essere ordinate secondo gli elementi di una matrice nella quale la j -esima colonna contiene le tre componenti della tensione sul j -esimo piano coordinato $\boldsymbol{\tau}_j$:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_2 & \boldsymbol{\tau}_3 \\ | & | & | \end{vmatrix}. \quad (132)$$

In modo analogo indicheremo con $\boldsymbol{\tau}_n$ lo sforzo sulla quarta faccia, che ha per normale $\mathbf{n}$. Le $\boldsymbol{\tau}_i$ sono relative alle normali $\mathbf{c}_i$, le quali sono *interne* al tetraedro, e rappresentano quindi le forze che il fluido interno al tetraedro esercita sul fluido esterno. Esse sono uguali ed opposte alle sollecitazioni *esterne* che compaiono nel bilancio della quantità di moto sopra enunciato. Nella equazione (131) esse compariranno quindi con segno negativo e dovrà essere:

$$\boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_1 S_1 - \boldsymbol{\tau}_2 S_2 - \boldsymbol{\tau}_3 S_3 = \boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_i S_i = 0, \quad (133)$$

dividendo per S_n ed usando la convenzione di Einstein:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \frac{S_j}{S_n} \boldsymbol{\tau}_j, \quad (134)$$

Con riferimento al riquadro di destra della Figura 11, si osserva che $S_j = S_n \cos(\alpha_j)$ e, d'altra parte, $n_j = |\mathbf{n}| \cos(\alpha_j) = \cos(\alpha_j)^{10}$, dove α_j è l'angolo formato tra la normale $\mathbf{n}$ e il versore $\mathbf{c}_j$, ed il suo coseno è pari alla j -esima componente della normale $\mathbf{n}$. Quindi: $S_j / S_n = \cos(\alpha_j) = n_j$ e la tensione sulla superficie S_n risulta pari a:

$$\boldsymbol{\tau}_n = n_j \boldsymbol{\tau}_j \quad (135)$$

dove si ricorda che sono sottintese le somme sull'indice j . Utilizzando la matrice precedentemente definita e scrivendo l'equazione per componenti:

¹⁰ le componenti nella normale rappresentano infatti i coseni direttori della direzione considerata

$$\tau_{in} = \tau_{ij} n_j. \quad (136)$$

La matrice τ_{ij} rappresenta le componenti di un tensore, perché moltiplicata secondo le regole matriciali per le componenti di un vettore (n_j) fornisce sempre le componenti di un vettore (τ_{in}). Indicheremo questo tensore con $\underline{\tau}$, e lo chiameremo *tensore delle tensioni*. I suoi elementi saranno ordinati come indicato dalla (132). Attraverso di esso possiamo esprimere lo sforzo, $\mathbf{t}_n$, relativo ad un elemento di superficie con una generica normale $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{t}_n = \underline{\tau} \mathbf{n}. \quad (137)$$

Questa relazione, che stabilisce l'esistenza del tensore delle tensioni, rappresenta il *teorema fondamentale di Cauchy* (Cauchy, 1822).

3.6. Equazione di Cauchy

Riprendiamo il percorso verso una formulazione locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto, esprimendo gli sforzi attraverso il tensore delle tensioni nella (130):

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \underline{\tau} \mathbf{n} dS \quad (138)$$

così da poter finalmente applicare il teorema della divergenza:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{V_c} \nabla \cdot \underline{\tau} dV. \quad (139)$$

Questa relazione deve essere valida per qualsiasi volume di controllo V_c e, se ipotizziamo che le funzioni integrande siano continue, deve sussistere anche tra le funzioni integrande:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\tau}. \quad (140)$$

La (140), è detta *equazione di Cauchy* e rappresenta la forma locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto. Sviluppando la derivata lagrangiana possiamo riscriverla, per componenti:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho u_{i,t} + \rho u_{i,j} u_j &= \rho f_i + \tau_{ij,j} \end{aligned} \quad (141)$$

3.7. Bilancio del momento della quantità di moto

Per ottenere l'equazione di bilancio del momento della quantità di moto si segue la stessa procedura utilizzata per il bilancio della quantità di moto.

Applicando all'equazione di bilancio sul volume materiale la prima formulazione del teorema di Reynolds si ottiene la forma globale:

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \underbrace{- \int_{S_c} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Flusso uscente del momento della QdM}} + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS}_{\text{Momento delle forze di superficie}} + \underbrace{\int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV}_{\text{Momento delle forze di massa}} \quad (142)$$

Per ottenere la forma locale si segue un percorso analogo a quello utilizzato nei due casi precedenti: si applica la seconda formulazione del teorema di Reynolds, si introduce il tensore delle tensioni ed infine si usa il teorema della divergenza, giungendo ad una equazione in cui si hanno solo integrali estesi al volume di controllo. Considerando che se le funzioni integrande sono continue, la relazione ottenuta deve valere anche per le funzioni integrande si ottiene la forma locale, la quale si riduce semplicemente a:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^t \quad (143)$$

Questa equazione stabilisce che per soddisfare localmente il bilancio del momento della quantità di moto è sufficiente che il tensore delle tensioni sia simmetrico, una volta ammessa questa simmetria, non ci sarà bisogno di fare ulteriori riferimenti ad esso.

3.8. Equazioni costitutive

Come si è accennato nell'introduzione, per chiudere il generale problema della meccanica dei fluidi, oltre alle equazioni di bilancio, che rappresentano i principi fondamentali della meccanica, abbiamo bisogno di equazioni che stabiliscano, per ciascun tipo di fluido, la relazione che c'è tra stato di tensione e stato di deformazione.

In genere uno stato di sollecitazione applicato ad un corpo produce una deformazione ed una variazione della deformazione nel tempo, cioè una velocità di deformazione. Sono definiti *solidi* quei mezzi continui nei quali, ad uno stato tensionale costante corrisponde una deformazione costante, finita, al limite per $t \rightarrow \infty$. Sono definiti *fluidi* quei mezzi continui nei quali uno stato tensionale costante produce una variazione della deformazione nel tempo ovvero una velocità di deformazione costante, finita, per $t \rightarrow \infty$.

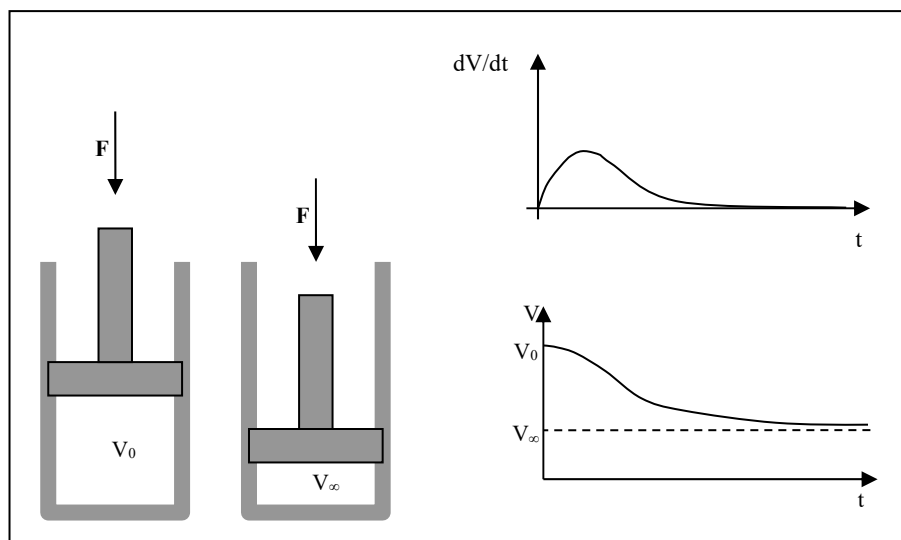


FIGURA 12

I fluidi che interessano le applicazioni più comuni della meccanica dei fluidi (acqua, aria, ecc.) rientrano tutti nella classe dei *fluidi Newtoniani*. Questi sono mezzi continui che hanno due tipi di

comportamento diverso: uno per le variazioni di volume e l'altro per le deformazioni a volume costante. Se proviamo infatti ad imporre una variazione di volume ad una porzione di fluido, osserveremo che, per una assegnata sollecitazione si ottiene una variazione di volume costante. Possiamo immaginare, ad esempio, di avere una certa quantità di aria¹¹ contenuta all'interno di un cilindro (Figura 12), ed applicare una forza costante F al pistone. Il volume tenderà inizialmente a ridursi, ma per $t \rightarrow \infty$ rimarrà costante. Avremo quindi un comportamento asintotico nel quale la deformazione tende ad un valore finito, costante mentre la velocità di deformazione tende a zero. Ripetendo l'esperimento con forze di valore diverso, troveremo, asintoticamente, velocità di deformazione comunque nulle, mentre il valore della deformazione raggiunta (la diminuzione di volume) sarà tanto più grande quanto maggiore è la forza. Si conclude, per ciò che riguarda le deformazioni volumetriche, che per i fluidi sussiste una relazione tra stato di sollecitazione e deformazione.

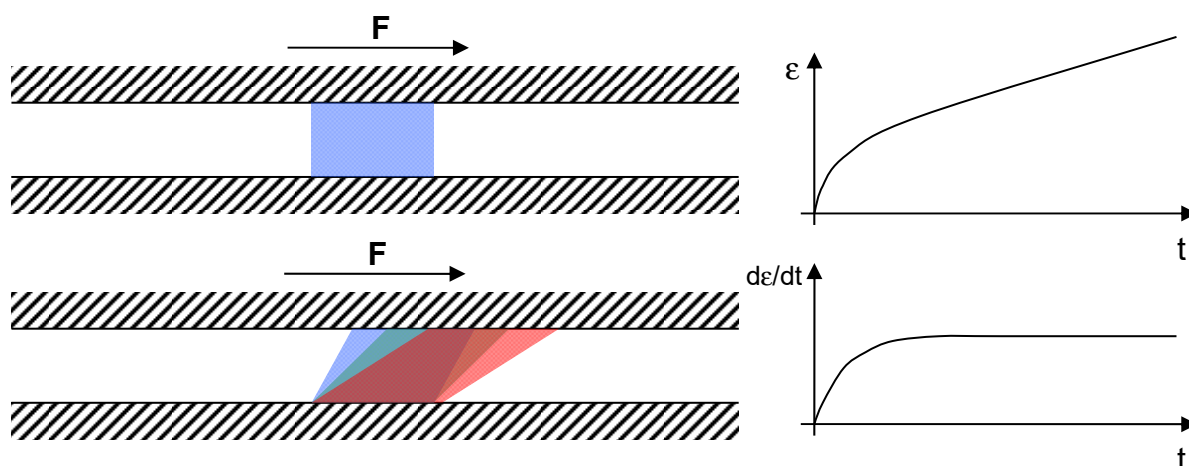


FIGURA 13

Se invece proviamo a deformare il fluido mantenendo costante il suo volume il comportamento sarà diverso. Immaginiamo di condurre l'esperimento ideale, già descritto nell'introduzione, e rappresentato in Figura 13, nel quale si immagina di avere un fluido, per esempio aria, nello spazio tra due lastre piane infinitamente estese, e di applicare una forza costante alla lastra superiore, che si può muovere liberamente, mentre quella inferiore è fissa. Concentriamo l'attenzione su di un parallelepipedo inizialmente retto e misuriamo la deformazione angolare, ϵ , e la sua derivata rispetto al tempo. Osserveremo che, per $t \rightarrow \infty$, mantenendo costante la sollecitazione costante, l'aria continua a deformarsi indefinitamente ($\epsilon \rightarrow \infty$), mentre la velocità di deformazione, $d\epsilon/dt$ tende ad un valore, finito, costante. Ripetendo l'esperimento con forze di intensità diversa osserveremo che la deformazione tende comunque ad aumentare indefinitamente, mentre la velocità di deformazione assume valori asintotici finiti, tanto più grandi quanto maggiori sono le forze applicate. Si conclude che, per ciò che riguarda le deformazioni a volume costante, per i fluidi, sussiste una relazione tra sollecitazione e velocità di deformazione. Avremo quindi due diverse relazioni: la prima per le variazioni volumetriche è detta *equazione di stato*, la seconda per le deformazioni a volume costante è detta *equazione costitutiva*.

3.8.1. Equazione di stato

Sappiamo, dalla cinematica locale del moto, che le variazioni volumetriche sono descritte dalla parte sferica del tensore velocità di deformazione. Noi ammetteremo perciò che sussista una

¹¹ potremmo scegliere anche l'acqua, l'unica differenza sarebbe che variazioni di volume sarebbero molto più piccole

relazione, detta *equazione di stato*, tra variazioni di volume e stato di sollecitazione normale. Se definiamo la pressione come l'opposto della parte sferica del tensore delle tensioni¹²:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \quad (144)$$

l'equazione di stato sarà, in generale, della forma:

$$\rho = \rho(p, \text{variabili termodinamiche}) \quad (145)$$

La densità, ρ , è adatta a misurare le variazioni volumetriche in quanto essa non è altro se non l'inverso del volume specifico del fluido, ovvero il volume occupato per unità di massa. Nel caso di fluidi incompressibili questa equazione assume la forma limite:

$$\rho = \text{cost.};$$

la quale stabilisce che non c'è variazione di volume del fluido quale che sia la sollecitazione assegnata. Nel caso di un gas perfetto invece l'equazione di stato è:

$$p = \rho RT \quad (146)$$

dove R è la costante dei gas perfetti e T la temperatura assoluta.

3.8.2. Equazione di stato

Per ciò che riguarda invece la deformazione a volume costante, i fluidi Newtoniani, che considereremo in questo corso, sono caratterizzati da una relazione *lineare omogenea ed isotropa* tra velocità di deformazione a volume costante e sollecitazione. Per scriverla ricordiamo innanzitutto che la velocità di deformazione a volume costante è data dalla parte deviatoria del tensore velocità di deformazione, $\text{dev}(\underline{\underline{e}})$, (vedi equazione (94)):

$$\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}}.$$

Si tratta di un tensore simmetrico a traccia nulla. Stabilire una relazione costitutiva isotropa implica che questo tensore debba essere legato alla sollecitazione da una funzione scalare (quindi che si comporta allo stesso modo in tutte le direzioni dello spazio); il fatto poi che la relazione sia lineare ci dice che questo legame deve essere costituito semplicemente da una costante moltiplicativa la quale, per l'ipotesi di fluido omogeneo, deve essere una funzione delle variabili termodinamiche uguale in tutti i punti del campo. Avremo quindi un'equazione costitutiva del tipo:

$$\text{Sollecitazione} = \text{cost} \cdot \left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} \right);$$

È immediato osservare che, essendo il tensore a secondo membro una parte deviatoria, anche a primo membro non potrà che comparire la parte deviatoria del tensore delle tensioni. Se indichiamo con 2μ la costante moltiplicativa avremo dunque:

$$\underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{I}} = 2\mu \left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} \right); \quad (147)$$

¹² la pressione, come è definita nella termodinamica, rappresenta la forza esercitata dal fluido *interno* al volume di controllo, mentre il tensore $\underline{\underline{\tau}}$ rappresenta forze *esterne* al volume di controllo.

ovvero, introducendo la definizione di pressione:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{e}})\underline{\underline{I}}\right) \quad (148)$$

o, per componenti:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}(e_{kk}\delta_{ij})\right) \quad (149)$$

la quale rappresenta l'equazione costitutiva per i fluidi newtoniani (Stokes, 1845).

Il coefficiente μ , detto *viscosità dinamica* del fluido è, in generale funzione della temperatura. Le sue dimensioni sono: $[M][L^{-1}][T^{-1}]=[F][L^{-2}][T^{-1}]$, e per l'acqua vale:

$$\mu(\theta) = \frac{0.001785}{1 + 0.337 \cdot \theta + 0.000221 \cdot \theta^2} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}) \quad (150)$$

con la temperatura, θ , espressa in °C. A 20°C si ha: $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$. Per l'aria, sempre a 20°C, la viscosità è: $\mu = 1.808 \cdot 10^{-5} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$.

3.9. Equazioni di Navier-Stokes

Introdotta l'equazione costitutiva in quella di Cauchy, supponendo la viscosità μ costante, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i \left[-p\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{e}})\delta_{ij}\right) \right]_{,j} = \rho f_i - (p\delta_{ij})_{,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} - \frac{2}{3}\mu(u_{m,m}\delta_{ij})_{,j} = \\ &= \rho f_i - p_{,i} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} - \frac{2}{3}\mu u_{m,mi} = \rho f_i - p_{,i} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} - \frac{2}{3}\mu u_{j,ji} \end{aligned} \quad (151)$$

Il termine I, considerato che sono sottintese le somme sull'indice $j=1,3$ può essere sviluppato come:

$$(p\delta_{ij})_{,j} = p_{,1}\delta_{i1} + p_{,2}\delta_{i2} + p_{,3}\delta_{i3}.$$

Dei tre termini solo l'i-esimo è diverso da zero; perciò $(p\delta_{ij})_{,j} = p_{,i}$. Analogo ragionamento va fatto sul termine II: $\frac{2}{3}\mu(u_{m,m}\delta_{ij})_{,j} = \frac{2}{3}\mu(u_{m,m})_{,i}$ trattandosi anche in questo caso di una somma di termini del quale solo quello in cui $i=j$ è diverso da zero. Otteniamo quindi:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - p_{,i} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} - \frac{2}{3}\mu u_{m,mi} \quad (152)$$

Inoltre, ora che i termini sono separati, è possibile, senza alterare il risultato, cambiare il nome dell'indice m, sul quale ci sono le somme per $m=1,3$ con j, in questo modo è possibile sottrarre l'uno all'altro gli ultimi due termini ottenendo:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - p_{,i} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} - \frac{2}{3}\mu u_{j,ji} = \rho f_i - p_{,i} + \mu u_{i,jj} + \frac{1}{3}\mu u_{j,ji} \quad (153)$$

Dividendo per ρ e definita la *viscosità cinematica* $\nu = \mu/\rho$, si ricava l'*equazione di Navier-Stokes* (Stokes, 1845):

$$\begin{aligned}\frac{Du_i}{Dt} &= f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ \frac{Du_i}{Dt} &= f_i - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,jj} + \frac{1}{3} \nu u_{j,j,i}\end{aligned}\quad (154)$$

che in forma vettoriale diventa:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})}$$

3.9.1. Equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale

Per poter adimensionalizzare le equazioni Navier-Stokes è necessario innanzitutto scegliere 3 grandezze indipendenti fondamentali attraverso le quali sia possibile esprimere tutte le altre. Si deve poi scegliere una scala per ciascuna grandezza fondamentale. Nel nostro caso, una buona scelta può essere quella di considerare come grandezze fondamentali una scala delle velocità, U , una scala delle lunghezze, L , ed una scala delle densità ρ_0 . Per mezzo di queste tre grandezze possiamo definire una scala dei tempi $T = (L/U)$ e adimensionalizzare tutte le grandezze in gioco.

Consideriamo l'equazione di Navier-Stokes scritta nel caso in cui le uniche forze di massa siano quelle dovute al campo gravitazionale, $\mathbf{f} = -g\nabla z$, (z ascissa verticale diretta verso l'alto):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^T) \mathbf{u} = -\nabla g z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (155)$$

Definiamo le grandezze adimensionali di cui abbiamo bisogno:

$$x_i^* = x_i / L; \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} / U; \quad \rho^* = \rho / \rho_0; \quad p^* = p / (\rho_0 U^2); \quad t^* = t/T = t / (L / U).$$

le quali possono essere espresse nella forma utile alla sostituzione nell'equazione dimensionale:

$$x_i = x_i^* L; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U; \quad \rho = \rho^* \rho_0; \quad p = p^* (\rho_0 U^2); \quad t = t^* T = t^* (L / U).$$

Per esprimere le derivate in forma adimensionale ricordiamo che, essendo queste operatori lineari, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{1}{(L/U)} \frac{\partial}{\partial t^*} \\ \nabla &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1^* \\ \partial/\partial x_2^* \\ \partial/\partial x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla^*.\end{aligned}\quad (156)$$

Se sostituiamo nell'equazione precedente:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} \frac{U^2}{L} + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^* \frac{U^2}{L} = -g \nabla^* z^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* \frac{U^2}{L} + \frac{1}{3} \nu \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) \frac{U}{L^2} + \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \frac{U}{L^2} \quad (157)$$

e, dividendo entrambi i membri per U^2 / L , si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* = - \left[\frac{gL}{U^2} \right] \nabla^* z^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{1}{3} \left[\frac{\nu}{UL} \right] \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) + \frac{\nu}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (158)$$

nella quale possono essere riconosciuti 2 gruppi adimensionali:

$$\text{numero di Reynolds:} \quad R_e = \frac{UL}{\nu}$$

$$\text{numero di Froude} \quad F_r = \sqrt{\frac{U^2}{gL}}$$

che ci permettono di giungere alla forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \frac{1}{F_r^2} \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \frac{1}{R_e} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (159)$$

nella quale, per semplicità, sono stati omessi gli asterischi che indicano le grandezze adimensionali. Questa forma dell'equazione si presta anche alla interpretazione del significato dei gruppi adimensionali sopra identificati. Supponiamo infatti di aver scelto le scale delle grandezze in modo tale che tutte le grandezze adimensionali, nell'ambito del problema che stiamo considerando, siano di ordine 1, così come le loro derivate adimensionali. Nell'equazione precedente tutti i termini risultano di ordine 1 tranne i due gruppi adimensionali che possono invece assumere un ordine di grandezza qualunque.

Valutando l'ordine di grandezza del numero di Reynolds possiamo stimare quanto importanti siano gli ultimi due termini, quelli legati alla presenza della viscosità, rispetto ai termini a primo membro (che sono termini inerziali). Quindi il numero di Reynolds può essere interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze viscosi. In particolare se $R_e \gg 1$ i termini viscosi saranno trascurabili: la viscosità non influenza in modo significativo il fenomeno che si sta studiando. Se al contrario il numero di Reynolds, R_e , è di ordine 1 oppure minore, nel risolvere il problema, dovremo tenere conto degli effetti della viscosità.

L'ordine di grandezza del numero di Froude fornisce invece informazioni sull'importanza del termine gravitazionale, e può essere quindi interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze gravitazionali. Analogamente al caso precedente, se $F_r \gg 1$ il termine dovuto alle forze gravitazionali può essere trascurato: la presenza della gravità non influenza in modo significativo il nostro fenomeno.

In conclusione si può affermare che, se si fa una scelta oculata delle scale di un fenomeno, la valutazione dei due numeri adimensionali permette di stimare quale sia l'importanza della viscosità e della forza gravitazionale e sotto che condizioni queste possano essere eventualmente trascurate nella soluzione del problema che si sta trattando.

3.9.2. Flussi paralleli

Solo in alcuni casi particolari si può trovare una soluzione della equazione di Navier-Stokes in forma analitica; un caso particolarmente interessante è quello dei flussi paralleli. E' definito flusso parallelo quello in cui due componenti della velocità sono in tutto il campo uguali a zero:

$$u_1 \neq 0; \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (160)$$

Nelle ipotesi di:

- fluido incomprimibile;
- condizioni stazionarie;
- forze di massa gravitazionali: $\mathbf{f} = -\nabla(gz)$, con z ascissa verticale diretta verso l'alto,

l'equazione del bilancio di massa dà:

$$u_{1,1} = 0 \quad (161)$$

quindi la u_1 è funzione solo di x_2 e di x_3 ; proiettando le equazioni di Navier-Stokes sui tre assi, si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = -g \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_{,1} + \nu (u_{1,22} + u_{1,33}) \\ 0 = -g \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_{,2} \\ 0 = -g \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)_{,3} \end{cases} \quad (162)$$

Se introduciamo la quantità $h = p/\gamma + z$, detta *carico piezometrico*, con $\gamma = \rho g$ *peso specifico* del fluido, si può osservare che $h_{,2} = h_{,3} = 0$; quindi h risulta essere funzione unicamente di x_1 .

Si tratta di un risultato importante, che ha validità generale: ogni qual volta un flusso può essere localmente approssimato come uniforme, quindi con linee di corrente (e velocità) parallele tra di loro (si dice *gradualmente variato*), il carico piezometrico si mantiene costante sulle sezioni ortogonali alle linee di corrente (e quindi alla velocità). Tali sezioni prendono il nome di *sezioni regolari*.

La derivata del carico piezometrico nella direzione del moto, cambiata di segno, viene indicata con $i = -\partial h / \partial x_1$, ed è chiamata *pendenza piezometrica*. Il moto del fluido avviene nel senso dei carichi piezometrici decrescenti e quindi con pendenza piezometrica positiva.

Nel caso bidimensionale piano (*moto di Couette*), in cui tutto è uniforme anche in direzione x_3 , la dipendenza da x_3 cade e si ha:

$$h = h(x_1); \quad i = i(x_1); \quad u_1(x_2), \quad (163)$$

quindi:

$$-ig = \nu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2}. \quad (164)$$

Integrando due volte rispetto ad x_2 , e tenendo conto che i non dipende da x_2 si ha:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx_2} &= \left(\frac{-g}{\nu} \frac{dh}{dx_1} \right) x_2 + k_1; \\ u_1 &= \left(\frac{-gi}{\nu} \right) \frac{x_2^2}{2} + k_1 x_2 + k_2 \end{aligned} \quad (165)$$

La relazione che mostra come la distribuzione delle velocità all'interno del campo sia di tipo parabolico.

Le relazioni ottenute possono essere applicate al flusso che scorre fra due piastre distanti b ; nel caso in cui le piastre siano ferme, le condizioni al contorno sono (Figura 14):

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = 0 \quad (166)$$

dalle quali si determinano i valori di k_1 e k_2 ottenendo:

$$u_1(x_2) = \left(-\frac{ig}{2\nu} \right) (x_2 - b)x_2. \quad (167)$$

Ricordando l'equazione costitutiva (149), la componente in direzione $\mathbf{c}_1$ dello sforzo di taglio relativo ad una superficie con normale $\mathbf{c}_2$ è data da:

$$\tau_{12} = 2\mu e_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -i\gamma \left(x_2 - \frac{b}{2} \right) \quad (168)$$

Alle pareti risulta:

$$\begin{aligned} \tau_{12}(x_2 = 0) &= \frac{1}{2} i \cdot \gamma \cdot b; \\ \tau_{12}(x_2 = b) &= -\frac{1}{2} i \cdot \gamma \cdot b. \end{aligned} \quad (169)$$

Lo sforzo di taglio alla parete è legato alla pendenza piezometrica che bilancia la forza viscosa.

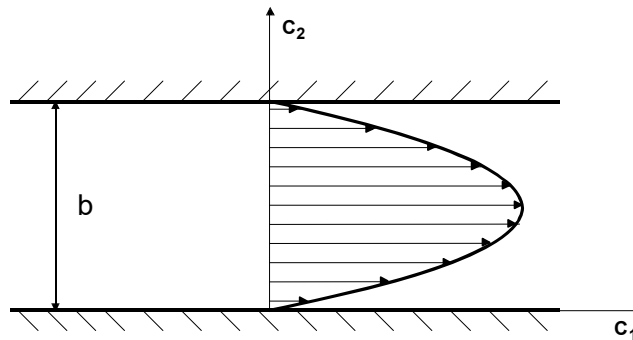


FIGURA 14

Nel caso in cui si abbia invece una parete mobile che scorre con velocità V parallelamente a sé stessa, si hanno le seguenti condizioni al contorno:

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = V \quad (170)$$

che permettono di valutare i valori delle costanti e ottenere l'equazione del profilo di velocità:

$$u_1 = \frac{-ig}{2\nu} \frac{x_2^2}{2} + \left(\frac{V}{b} + \frac{igb}{2\nu} \right) x_2 \quad (171)$$

La distribuzione delle velocità è ottenuta dalla somma di un termine parabolico e di un termine lineare. Quest'ultimo è quello che si avrebbe nel caso in cui una delle due piastre si muovesse parallelamente a se stessa con velocità V in assenza di gradiente di pressione ($i = 0$) (Figura 15).

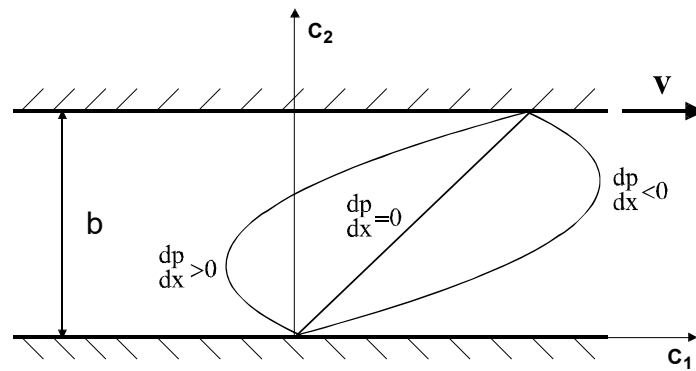


FIGURA 15

3.10. Equazione dell'energia meccanica

Cerchiamo una formulazione dell'equazione di Navier-Stokes nella quale compaia esplicitamente l'energia meccanica del fluido. Consideriamo un fluido incompressibile immerso in un campo gravitazionale. Sotto l'ipotesi di incompressibilità l'equazione di continuità si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{j,j} = 0 \quad (172)$$

quindi l'equazione di Navier-Stokes si può scrivere:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla gz - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (173)$$

poiché il penultimo termine della (155) è nullo. Quindi portando la densità, costante, sotto il segno di gradiente, e raccogliendo a fattor comune una g :

$$\mathbf{u}_{,t} + \underbrace{(\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u}}_I = -g \nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (174)$$

La derivata materiale che compare a primo membro può essere espressa in modo diverso applicando la formula del doppio prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i &= (a_j c_j) b_i - (a_j b_j) c_i \end{aligned} \quad (175)$$

alla i -esima componente¹³ del prodotto $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$:

$$(\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))_i = u_j u_{j,i} - u_j u_{i,j} = (\mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u})_i \quad (176)$$

l'ultimo termine dell'equazione precedente può essere scritto in termini di energia cinetica del fluido: $\frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} u_j u_j$, con le somme su j sottintese. Abbiamo infatti che la i -esima componente del gradiente dell'energia cinetica è: $\frac{1}{2} (\nabla u^2)_i = \frac{1}{2} (u_j^2)_{,i} = u_j u_{j,i} = (\mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}))_i$, sostituendo nella equazione precedente possiamo ricavare dalla (176) il termine I della (174)

ovvero:

$$(\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = \mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

¹³ il pedice senza virgola indica che si sta facendo riferimento ad una componente di un vettore

L'espressione della derivata lagrangiana, primo membro della (174), diventa quindi:

$$\mathbf{u}_{,t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (177)$$

Sostituendo la (177) nella (174) e raggruppando i termini sotto gradiente si ottiene:

$$\mathbf{u}_{,t} + g \nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (178)$$

La quantità tra parentesi tonde rappresenta l'energia meccanica per unità di peso associata al fluido ed è indicata con H ed è chiamata *carico totale*. Questa equazione rappresenta dunque l'*equazione dell'energia meccanica* per un fluido Newtoniano incompressibile, soggetto al campo gravitazionale:

$$\underbrace{\mathbf{u}_{,t}}_I + \underbrace{g \nabla H}_{II} = \underbrace{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}}_{III} + \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}_{IV}. \quad (179)$$

Il carico totale, ricordando la definizione di carico piezometrico, $h = z + p/\gamma$, risulta:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{u^2}{2g}.$$

L'equazione dell'energia meccanica ha una valenza generale, ma ha un interesse particolare identificare le condizioni sotto le quali l'energia si conserva. A questo scopo consideriamo l'equazioni sotto le seguenti ipotesi:

- a) Flusso stazionario
- b) Effetti della viscosità trascurabili ($Re \ll 1$)

Per l'ipotesi a) è nullo il termine I a primo membro, mentre per l'ipotesi b) si può trascurare il termine IV a secondo membro della (179). Si presentano due casi diversi che conducono a prevedere un valore di H costante, determinando due formulazioni del *Teorema di Bernoulli* (formulato da Daniel Bernoulli come principio nel 1738):

1. Nel caso di flusso *irrotazionale*, ovvero nel quale la vorticità si annulla, $\boldsymbol{\omega} = (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, il termine III a secondo membro è banalmente nullo e quindi l'equazione (179) si riduce alla *prima formulazione del teorema di Bernoulli*:

$$\nabla H = 0 \quad (180)$$

il quale, in questa formulazione, afferma che: *nel caso di un flusso stazionario, ed irrotazionale, con viscosità trascurabile, il carico totale si mantiene costante in tutto il campo.*

2. Se si osserva che il prodotto vettoriale è sempre ortogonale ad entrambi i fattori, si conclude immediatamente che il termine $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ è sempre ortogonale ad $\mathbf{u}$ (e quindi alle linee di corrente). Pertanto, *proiettando lungo una linea di corrente* l'equazione dell'energia meccanica, ovvero moltiplicando scalarmente per il versore della linea di corrente, $\mathbf{i}_s$, il primo termine a secondo membro non dà alcuna componente, quindi otteniamo la *seconda formulazione del teorema di Bernoulli*:

$$\nabla H \cdot \mathbf{i}_s = \frac{\partial H}{\partial s} = H_{,s} = 0, \quad (181)$$

la quale afferma che *in un flusso stazionario, nel caso si possa trascurare la viscosità, il carico totale si mantiene costante lungo le linee di corrente.*

3.11. Equazione dell'energia totale

I principi sopra enunciati sono sufficienti a risolvere tutti quei problemi nei quali l'unica forma di energia in gioco sia quella meccanica. Le variabili termodinamiche possono entrare in gioco nelle equazioni costitutive, per esempio introducendo una dipendenza della viscosità dalla temperatura ma, quando entra in gioco anche l'energia termica, è necessario fare riferimento anche al primo principio della termodinamica il quale permette di tenere conto anche dell'energia contenuta dal fluido a livello molecolare attraverso l'energia interna, U . Definiamo perciò, energia totale per unità di massa del fluido la somma dell'energia cinetica e dell'energia interna:

$$E = U + \frac{1}{2} u_i u_i = U + \frac{u^2}{2}$$

U è l'energia interna per l'unità di massa, legata all'energia cinetica a livello atomico, di cui si può tener conto nello schema di mezzo continuo solo attraverso la temperatura:

$$dU = c_v dT$$

nella quale c_v è il calore specifico a volume costante che nel caso generale dipende dalla temperatura.

Il primo principio della termodinamica afferma che: *la variazione per unità di tempo dell'energia totale di un volume materiale V_m , è pari alla somma del lavoro, L , compiuto dalle forze esterne nell'unità di tempo, e del flusso di calore per unità di tempo, C , che il sistema cede all'esterno:*

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho E dV = L - C.} \quad (182)$$

Il lavoro, L , compiuto dalle forze esterne nell'unità di tempo è considerato positivo quando lo scambio avviene verso il volume materiale, mentre il flusso di calore è considerato positivo quando il flusso avviene dal volume materiale verso l'esterno.

Applicando il teorema di Reynolds nella sua prima formulazione (110) al primo membro, e ricordando che, al tempo t , il volume di controllo e quello materiale coincidono, otteniamo un bilancio di energia totale su di un volume di controllo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho E dV + \int_{S_c} \rho E (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = L - C. \quad (183)$$

$E_{V,t} \qquad \Phi_E$

Ovvero *l'equazione di bilancio dell'energia totale in forma globale*, la quale afferma che la variazione nell'unità di tempo dell'energia totale contenuta nel volume di controllo (che indichiamo con $E_{V,t}$) è dovuta: i) al flusso di energia attraverso la superficie del volume di controllo (indicata con Φ_E); ii) al lavoro delle forze esterne ceduto al volume di controllo (L) e al flusso di calore C uscente dal volume di controllo:

$$\boxed{E_{V,t} = -\Phi_E + L - C}$$

Il lavoro, L , computo dalle forze esterne nell'unità di tempo può essere diviso nel contributo delle forze di massa ($d\mathbf{F}_m = \rho \mathbf{f} dV$) e delle forze di superficie ($d\mathbf{F}_s = \mathbf{t}_n dS$):

$$L = \int_{V_m} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{S_m} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} dS \quad (184)$$

in entrambi i termini, per ottenere il lavoro compiuto nell'unità di tempo, si moltiplica la forza infinitesima $d\mathbf{F}$ per lo spostamento per unità di tempo (la velocità $\mathbf{u}$). Il flusso di calore, invece, è considerato positivo quando il flusso avviene dal volume di controllo verso l'esterno e può essere diviso nel contributo del flusso per conduzione attraverso la superficie del volume materiale e quello per irraggiamento che avviene da ogni elemento di fluido interno al volume. Il flusso di calore per conduzione si calcola attraverso la *densità di flusso termico* $\mathbf{q}$, un vettore la cui i -esima componente, q_i , rappresenta la quantità di calore che fluisce in direzione x_i per unità di superficie e per unità di tempo:

$$q_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta C_i}{\Delta S_i} \quad (185)$$

nella quale ΔS_i è una superficie infinitesima con normale diretta secondo l'asse x_i , e ΔC_i indica il calore che la attraversa nell'unità di tempo. Avremo quindi:

$$C = \int_{S_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (186)$$

Sostituendo le espressioni di L e C nella (183), si ricava una nuova forma dell'equazione di bilancio dell'energia totale in forma globale:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho E dV \right] + \int_{S_c} \rho E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS &= \underbrace{\int_{V_c} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV}_I + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} dS}_{II} - \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS}_{III} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho E dV \right] + \int_{S_c} \rho E u_i \cdot n_i dS &= \underbrace{\int_{V_c} \rho f_i \cdot u_i dV}_I + \underbrace{\int_{S_c} t_{ni} u_i dS}_{II} - \underbrace{\int_{S_c} q_i n_i dS}_{III} \end{aligned}} \quad (187)$$

con:

- I) lavoro delle forze di massa;
- II) lavoro delle forze di superficie;
- III) flusso di calore scambiato attraverso la superficie del volume di controllo.

L'equazione precedente ha carattere generale e vale per qualsiasi mezzo continuo. Scriviamola ora nel caso di nostro interesse, ovvero per un fluido Newtoniano immerso nel campo gravitazionale. Nel termine I le forze di massa coincidono con il peso: $f_i = -gz_i$; nel termine II, le forze di superficie possono essere riscritte attraverso il teorema di Cauchy e l'equazione costitutiva per fluidi Newtoniani:

$$t_{ni} = \tau_{ij} n_j = \left[-p \delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(e_{ij}) \delta_{ij} \right) \right] n_j = -p n_i + \sigma_{ij} n_j; \quad (188)$$

nella quale, per convenienza, abbiamo indicato sinteticamente con σ_{ij} la parte dello stato di tensione dovuta alla viscosità. Nel termine III, la densità di flusso di calore $\mathbf{q}$ può essere espressa attraverso la legge di Fourier per la conduzione del calore:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= -K\nabla T \\ q_i &= -KT_{,i}\end{aligned}\quad (189)$$

ovvero un'equazione costitutiva che descrive la trasmissione del calore per conduzione. Il coefficiente K è detto *conducibilità termica* e descrive il comportamento termico del particolare fluido che stiamo considerando¹⁴, analogamente a quanto avviene per la viscosità in relazione agli sforzi. L'equazione di bilancio dell'energia diventa dunque:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho E dV \right] + \int_{S_c} \rho E u_i \cdot n_i dS &= - \int_{V_c} \rho (gz)_{,i} u_i dV - \int_{S_c} p (n_i u_i) dS + \int_{S_c} \sigma_{ij} u_i n_j dS + \int_{S_c} K T_{,i} n_i dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho E dV \right] + \int_{S_c} \rho E (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS &= - \int_{V_c} \rho \nabla(gz) \cdot \mathbf{u} dV - \int_{S_c} (p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \int_{S_c} (\underline{\underline{\sigma n}}) \cdot \mathbf{u} dS + \int_{S_c} K \nabla T \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}\quad (190)$$

nella quale le somme sono sottintese sia sull'indice i sia sull'indice j . Il significato dei termini è:

- I: Variazione dell'energia totale contenuta nel volume di controllo;
- II: Flusso di energia totale attraverso la superficie del volume di controllo;
- III: Lavoro delle forze gravitazionali;
- IV: Lavoro delle forze di pressione;
- V: Lavoro delle forze viscosi;
- VI: Flusso di calore attraverso la superficie del volume di controllo;

tutti i termini si intendono per unità di tempo. Infine, osserviamo che questa equazione può essere riorganizzata facendo apparire esplicitamente l'energia meccanica per unità di peso del fluido, ovvero il carico totale:

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z. \quad (191)$$

Per farlo è necessario innanzitutto riscrivere il lavoro delle forze gravitazionali, come un bilancio di energia potenziale. Consideriamo quindi la funzione integranda del termine III e sommiamo il termine di derivata rispetto al tempo che è nullo poiché il potenziale gravitazionale è costante:

$$\rho (gz)_{,i} u_i = \rho \left[(gz)_{,t} + (gz)_{,i} u_i \right] = \rho \frac{D(gz)}{Dt}; \quad (192)$$

sommiamo ora un termine nullo, in quanto contenente l'equazione di continuità (118), e riorganizziamo i termini usando la regola di derivazione del prodotto:

¹⁴ si assume un comportamento isotropo dei fluidi Newtoniani anche in relazione alla conduzione di calore.

$$\begin{aligned}
\rho(gz)_{,i} u_i &= \rho \frac{D(gz)}{Dt} = \rho \frac{D(gz)}{Dt} + \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho u_{i,i} \right) (gz) = \\
&= \rho \frac{D(gz)}{Dt} + \frac{D\rho}{Dt} (gz) + \rho(gz) u_{i,i} = \frac{D(\rho gz)}{Dt} + \rho gz u_{i,i}
\end{aligned} \quad (193)$$

e sviluppando la derivata Lagrangiana I all'ultimo membro e usando nuovamente la regola di derivazione del prodotto, si ha:

$$\rho(gz)_{,i} u_i = (\rho gz)_{,t} + (\rho gz)_{,i} u_i + (\rho gz) u_{i,i} = (\rho gz)_{,t} + (\rho gz u_i)_{,i} \quad (194)$$

Quindi il termine III può essere riscritto come:

$$- \int_{V_c} \rho(gz)_{,i} u_i dV = - \int_{V_c} (\rho gz)_{,t} dV - \int_{V_c} (\rho gz u_i)_{,i} dV = - \int_{V_c} (\rho gz)_{,t} dV - \int_{S_c} (\rho gz u_i) n_i dS; \quad (195)$$

avendo trasformato il secondo integrale di volume (I) in un integrale di superficie per mezzo del teorema della divergenza. Sostituendo nell'equazione (190), ricordando che l'energia totale è la somma dell'energia interna, U, e dell'energia cinetica, portando a primo membro il lavoro delle pressioni (II) e i termini derivanti dal lavoro delle forze di massa (III) espressi dall'equazione precedente, e infine sommando e sottraendo il termine I: $\int_{V_c} \frac{\partial p}{\partial t} dV$, otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho \left(U + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) dV \right] + \int_{S_c} \rho \left(U + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) u_i \cdot n_i dS = \int_{V_c} p_{,t} dV + \int_{S_c} u_i \sigma_{ij} n_j dS + \int_{S_c} K T_{,i} n_i dS$$

la quale, introducendo il carico totale H, assume la forma desiderata:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho(U + gH) dV \right] + \int_{S_c} \rho(U + gH) u_i \cdot n_i dS &= \int_{V_c} p_{,t} dV + \int_{S_c} u_i \sigma_{ij} n_j dS + \int_{S_c} K T_{,i} n_i dS \\
\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho(U + gH) dV \right] + \int_{S_c} \rho(U + gH) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{V_c} p_{,t} dV + \int_{S_c} \mathbf{u} \cdot (\underline{\underline{\sigma n}}) dS + \int_{S_c} K \nabla T \cdot \mathbf{n} dS
\end{aligned}
} \quad (196)$$

la quale permette di esprimere contemporaneamente il bilancio dell'energia meccanica e dell'energia interna del fluido contenuto in un volume di controllo. Il significato dei termini è:

- I: Variazione dell'energia interna e meccanica contenuta nel volume di controllo;
- II: Flusso di energia attraverso la superficie del volume di controllo;
- III: Non stazionarietà delle forze di pressione;
- IV: Lavoro delle forze viscosse sulla superficie del volume di controllo;
- V: Flusso di calore attraverso la superficie del volume di controllo;

tutti i termini si intendono per unità di tempo.

4. IDROSTATICA

4.1. Distribuzione delle pressioni all'interno di un liquido pesante in quiete

Un fluido si trova in quiete (condizione idrostatica) se esiste un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale la velocità e l'accelerazione del fluido sono ovunque nulle. Supporremo che il fluido sia un liquido incompressibile e che l'unica forza di massa agente sia la forza peso dotata di potenziale $-gz$ per cui:

$$\mathbf{f} = -\nabla gz \quad (197)$$

essendo z la quota geodetica di un generico punto.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ l'equazione costitutiva (148) si riduce a $\underline{\tau} = -p \underline{\mathbf{I}}$, quindi gli sforzi sono ovunque solo normali e coincidono con la pressione. Inoltre l'equazione di Navier-Stokes dà in questo caso:

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) = \mathbf{0}$$

quindi *all'interno di un fluido in quiete il carico piezometrico h è costante:*

$$\boxed{h = \frac{p}{\rho g} + z = \text{cost}} \quad (198)$$

È consuetudine scegliere l'origine delle pressioni in modo che la pressione si annulli in corrispondenza della pressione atmosferica; si indica quindi con p la pressione relativa riferita alla pressione atmosferica p_{atm} assunta come pressione di riferimento:

$$p = p_{\text{ass}} - p_{\text{atm}}.$$

Sarà, d'ora in poi, utilizzata la pressione relativa, e fatto esplicito riferimento nel caso in cui si intenda parlare di pressione assoluta invece che relativa. L'equazione (198) mostra che le superficie isobare sono dei piani orizzontali.

Il piano orizzontale, interno od esterno al fluido, in cui la pressione assoluta è uguale alla pressione atmosferica ($p = 0$) è detto *piano dei carichi idrostatici* (PCI). Il piano dei carichi idrostatici coincide, ove esista, con la superficie di separazione tra liquido ed atmosfera. La pressione relativa in un generico punto del fluido (Figura 16) è data dal prodotto del peso specifico, $\gamma = \rho g$, per la differenza di quota tra il piano dei carichi idrostatici ed il punto in esame, infatti:

$$p = \text{cost.} - \gamma z \quad (199)$$

Ponendo il valore della costante $\text{cost.} = \gamma z_0$, con z_0 quota alla quale la pressione relativa si annulla,

$$p = \gamma z_0 - \gamma z = \gamma(z_0 - z).$$

La differenza di quota ($z_0 - z$) prende il nome di *affondamento* ed sarà indicata con ζ . Di conseguenza la distribuzione di pressione in un liquido in quiete è descritta dall'equazione:

$$p = \gamma \zeta \quad (200)$$

Il rapporto p/γ , che ha le dimensioni di una lunghezza, è detto *altezza rappresentatrice della pressione* e rappresenta l'altezza di una colonna d'acqua (di peso specifico γ) che produce la pressione p . La retta delle pressioni forma con l'asse verticale un angolo $\alpha = \text{tg}^{-1}(\gamma)$ (Figura 16).

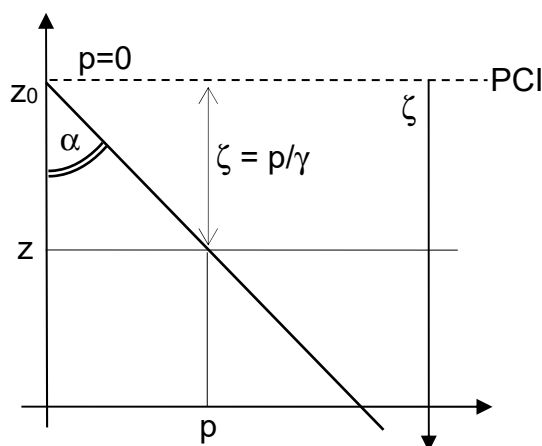


FIGURA 16

Nel caso siano sovrapposti due fluidi di densità diversa, ciascuno di essi ha il proprio piano dei carichi idrostatici, ottenuto prolungando l'andamento delle pressioni nel liquido considerato fino alla quota alla quale $p = 0$. Sarà quindi possibile definire due affondamenti: ζ_1 e ζ_2 , il primo definito nel liquido di peso specifico γ_1 , ed il secondo nel liquido di peso specifico γ_2 . Conseguentemente, nel liquido 1 la pressione sarà: $p = \gamma_1 \zeta_1$ mentre nel liquido 2 potrà essere calcolata come $p = \gamma_2 \zeta_2$.

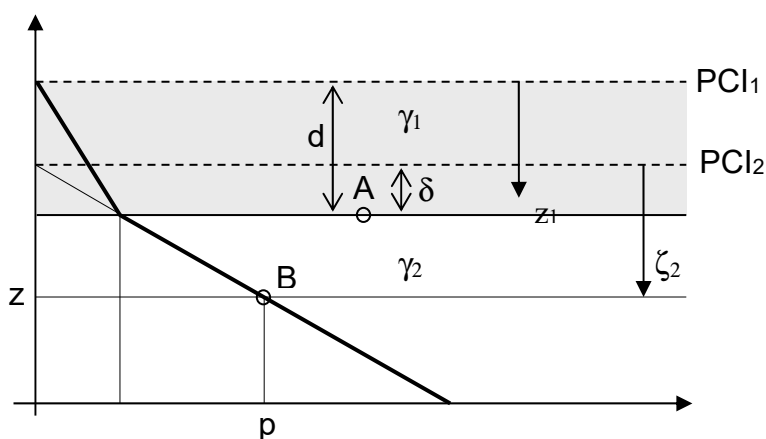


FIGURA 17

In Figura 17 è riportato l'andamento delle pressioni all'interno dei due liquidi pesanti. Conoscendo il piano dei carichi idrostatici del liquido 1 possiamo ricavare la posizione del piano PCI_2 . Sia d lo spessore del liquido di peso specifico inferiore, γ_1 , e consideriamo un punto A all'interfaccia tra 2 liquidi. Questo punto è a contatto con entrambi i liquidi, quindi si potrà calcolare la pressione utilizzando sia la formula per il liquido 1 sia quella per il liquido 2:

$$p_A = \gamma_1 \zeta_{1A} = \gamma_1 d$$

$$p_A = \gamma_2 \zeta_{2A} = \gamma_2 \delta$$

avendo indicato con δ la distanza tra l'interfaccia e il PCI₂ (Figura 17). Uguagliando le due espressioni è possibile ricavare δ :

$$\delta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} d$$

A partire dall'affondamento rispetto a PCI₁ e PCI₂ è possibile valutare la pressione nei punti all'interno dei due liquidi. In modo analogo si trovano le posizioni dei piani di carico relativo in presenza di più liquidi pesanti non miscibili.

4.2. Spinte idrostatiche sulle superficie

Il problema fondamentale dell'idrostatica è quello di calcolare gli effetti delle pressioni che un liquido esercita su di una superficie. Se una superficie è a contatto con un liquido, in ogni suo elementino infinitesimo, dS , agirà una forza elementare diretta come la normale alla superficie e di modulo pari alla pressione moltiplicata per l'areola dS :

$$d\mathbf{f} = p \mathbf{n} dS$$

Come noto dalla meccanica, questo sistema di forze è descritto in modo completo se conosciamo la sua risultante ed il suo momento risultante. Si definisce spinta idrostatica sulla superficie S la risultante delle pressioni, $\mathbf{\Pi}$, esercitate dal liquido che si trova sulla faccia positiva di S :

$$\mathbf{\Pi} = \int_S p \mathbf{n} dS = \int_S (\gamma \zeta) \mathbf{n} dS; \quad (201)$$

mentre il momento risultante, calcolato rispetto all'origine, è:

$$\mathbf{K} = \int_S \mathbf{x} \times (p \mathbf{n}) dS = \int_S \mathbf{x} \times (\gamma \zeta \mathbf{n}) dS \quad (202)$$

Per rappresentare i momenti generati dal sistema di pressioni è possibile fare riferimento, invece che al momento risultante, alla retta d'azione del sistema di forze, definita come quella retta lungo la quale deve agire la risultante, $\mathbf{\Pi}$, per determinare un momento, rispetto all'origine, pari a $\mathbf{K}$.

4.2.1. Spinte su superficie piane

Nel caso di superficie piane conviene utilizzare un sistema di riferimento cartesiano che abbia un asse definito dall'intersezione tra il piano dei carichi idrostatici ed il piano che contiene la superficie, detto *retta di sponda* (asse y), e l'altro, ortogonale al primo e giacente sul piano contenente la superficie, che risulta essere lungo una linea di massima pendenza (asse x); il terzo asse invece è diretto come la normale (Figura 18). Su ogni elementino, dS , della superficie agisce una forza diretta come la normale $\mathbf{n}$ e di modulo pari alla pressione per l'area dell'elementino: $p \mathbf{n} dS$; anche la risultante, $\mathbf{\Pi}$, sarà dunque orientata secondo la normale alla superficie e varrà:

$$\mathbf{\Pi} = \int_S p \mathbf{n} dS = V_{sp} \mathbf{n}. \quad (203)$$

$V_{sp} = \int_S p dS$ rappresenta, da un punto di vista geometrico, il volume di un solido che ha per base la superficie e per altezza, in ogni punto, la pressione p , detto *solido delle pressioni*¹⁵ (rappresentato in Figura 18).

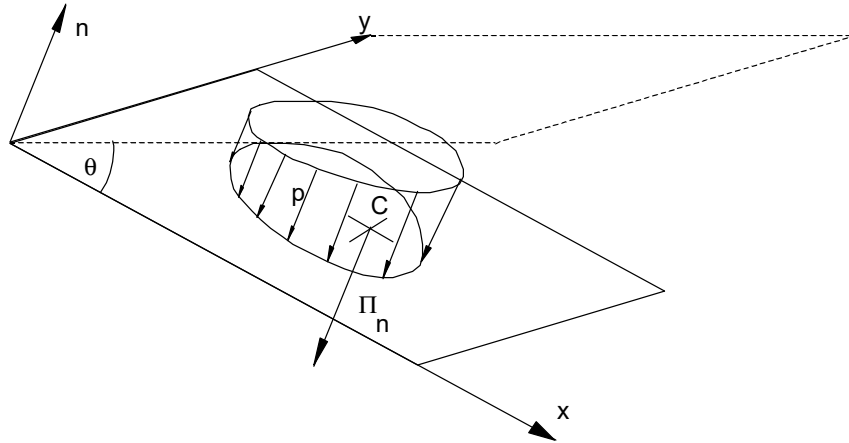


FIGURA 18

Oltre alla risultante, per caratterizzare il sistema di forze generato dal fluido sulla superficie considerata, è necessario calcolare il momento risultante. Nel sistema di riferimento scelto per questa trattazione risultano diverse da zero solo due componenti:

$$\begin{cases} K_x = \int_S p y dS \\ K_y = \int_S p x dS \end{cases} \quad (204)$$

Per individuare la retta d'azione è consuetudine far riferimento al cosiddetto *centro di spinta*, il quale è definito come quel punto della superficie nel quale occorre applicare la risultante per ottenere un momento pari a quello generato dal sistema nel suo complesso. Ponendo questa condizione,

$$\begin{cases} \Pi x_c = K_y \\ \Pi y_c = K_x \end{cases}$$

è possibile ricavare l'espressione delle sue coordinate:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{\Pi} \int_S p x dS \\ y_c = \frac{1}{\Pi} \int_S p y dS \end{cases} \quad (205)$$

Sempre nell'interpretazione geometrica introdotta precedentemente, se si osserva che Π coincide con il volume del solido delle pressioni, V_{sp} , e che p è l'altezza locale del solido, possiamo esprimere un elementino del solido di spinta come $dV = p dS$. Pertanto le equazioni precedenti

¹⁵ questa figura, nel caso si abbia a che fare con un solo liquido ($\gamma = \text{cost.}$) è anche detta *prisma di spinta*

possono essere lette anche come l'espressione delle coordinate, (x_{GSP}, y_{GSP}) , del baricentro di tale volume:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{1}{\Pi} \int_S p x dS = \frac{1}{V_{SP}} \int_{V_{SP}} x dV_{SP} = x_{GSP} \\ y_c = \frac{1}{\Pi} \int_S p y dS = \frac{1}{V_{SP}} \int_{V_{SP}} y dV_{SP} = y_{GSP} \end{array} \right. \quad (206)$$

Quindi, per conoscere la posizione del centro di spinta è sufficiente calcolare le coordinate del baricentro, C, del solido delle pressioni.

Riassumendo, secondo questa prima interpretazione geometrica:

- la spinta è normale alla superficie ed ha come modulo il volume del solido delle pressioni: $\Pi_n = V_{SP} \mathbf{n}$;
- le coordinate (x_c, y_c) del centro di spinta coincidono con le coordinate (x_{GSP}, y_{GSP}) del baricentro del solido delle pressioni.

Nel caso la spinta sia dovuta ad un solo liquido e quindi il peso specifico γ sia lo stesso in tutto il dominio, è possibile introdurre una ulteriore interpretazione delle espressioni della spinta e del centro di spinta, basata sulle caratteristiche geometriche non del volume di spinta ma della superficie stessa sulla quale la spinta viene esercitata. Esprimendo la pressione in funzione dell'affondamento: $p = \gamma \zeta$, e ricordando che, essendo γ costante, può essere portata fuori dal segno di integrale, l'espressione della spinta può quindi essere riscritta come:

$$\Pi = \int_S p dS = \gamma \int_S \zeta dS = \gamma \zeta_g S = p_g S$$

ovvero la risultante eguaglia il prodotto della pressione, p_g , calcolata all'affondamento, $\zeta_g = 1/S \int_S \zeta dS$, del centro di figura della superficie, moltiplicata per l'area della superficie stessa.

Per riscrivere l'espressione delle coordinate del centro di spinta è necessario notare, oltre al fatto che γ è costante che, nel sistema di riferimento scelto (Figura 18), la coordinata x e l'affondamento ζ sono legati dalla relazione:

$$\zeta = x \sin \theta;$$

essendo θ l'angolo formato tra il piano dei carichi idrostatici e quello che contiene la superficie. Alla luce di questa osservazione le (204) possono essere riscritte come:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{1}{\Pi} \int_S \gamma \zeta x dS = \frac{\int_S [\gamma (x \sin \theta) x] dS}{\int_S \gamma (x \sin \theta) dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{yy}}{M_y} \\ y_c = \frac{1}{\Pi} \int_S \gamma \zeta y dS = \frac{\int_S [\gamma (x \sin \theta) y] dS}{\int_S \gamma (x \sin \theta) dS} = \frac{\int_S x y dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{xy}}{M_y} \end{array} \right. ;$$

nelle quali I_{xx} rappresenta il momento d'inerzia della superficie S rispetto alla retta di sponda (ovvero l'asse y), I_{xy} il momento misto rispetto all'asse x ed y e $M_y = (x_g S)$ il momento statico

rispetto alla retta di sponda. Per mezzo del teorema di Huygens, che consente di esprimere i momenti d'inerzia rispetto ad assi generici mediante i momenti baricentrici:

$$\begin{cases} I_{yy} = x_g^2 S + I_{gyy} \\ I_{xy} = x_g y_g S + I_{gxy} \end{cases}$$

possiamo giungere ad una espressione delle coordinate del centro di spinta in funzione di quantità baricentriche:

$$\begin{cases} x_c = \frac{I_{yy}}{x_g S} = x_g + \frac{I_{gyy}}{M_y} \\ y_c = \frac{I_{xy}}{x_g S} = y_g + \frac{I_{gxy}}{M_y} \end{cases} \quad (207)$$

le quali possono essere lette asserendo che il centro di spinta è spostato rispetto al baricentro di una quantità pari al rapporto tra il momento d'inerzia baricentrico ed il momento statico rispetto alla retta di sponda. La prima delle due espressioni permette inoltre di osservare che, essendo x_g incrementata di una quantità definita positiva, ed essendo l'asse x orientato verso il basso, il centro di spinta si troverà sicuramente più in basso del baricentro della superficie S .

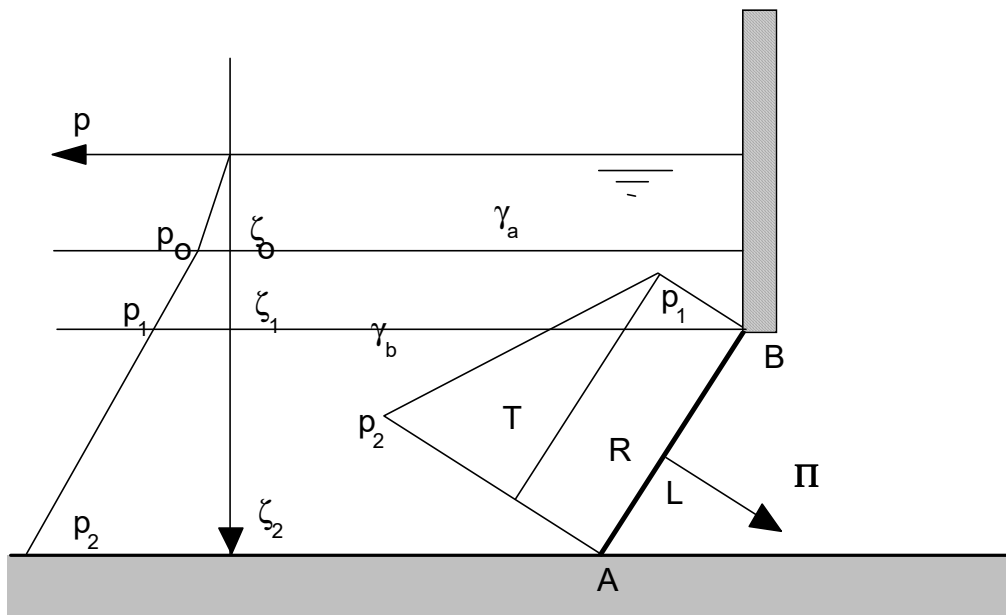


FIGURA 19

Si voglia calcolare, a titolo di esempio, la spinta sulla paratoia AB, di lunghezza L e profondità unitaria, determinata dalla sovrapposizione di due liquidi a densità diversa, γ_a e γ_b , che si trovano alla sua sinistra. L'andamento della pressione in funzione dell'affondamento, ζ , è rappresentato sulla sinistra dello schema di Figura 19, la pressione aumenta più rapidamente nel liquido sottostante, che ha peso specifico maggiore. Per il calcolo del volume del prisma di spinta, tenuto conto che esso è di profondità unitaria nella direzione ortogonale al foglio avremo che:

- all'interfaccia tra i due liquidi la pressione vale $p_0 = \gamma_a \zeta_0$;
- nel punto B della paratoia, di affondamento ζ_1 , la pressione vale $p_1 = p_0 + \gamma_b (\zeta_1 - \zeta_0)$;
- nel punto A della paratoia, di affondamento ζ_2 , la pressione vale $p_2 = p_0 + \gamma_b (\zeta_2 - \zeta_0)$;

- essendo la densità costante tra gli affondamenti ζ_1 e ζ_2 , la pressione varia linearmente tra A e B;

di conseguenza il solido delle pressioni, costruito sulla paratoia, è un trapezio rettangolo. La spinta per unità di lunghezza è data dall'area di questo trapezio:

$$\Pi_n = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) L \quad (208)$$

mentre il centro di spinta si trova nel baricentro di tale figura. Per calcolarne la posizione si può dividere il trapezio in un rettangolo, R, di area $A_R = p_1 L$, ed un triangolo, T, di area $A_T = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) L$. Il baricentro si trova come media pesata delle posizioni dei baricentri delle due figure. Avremo, misurando la coordinata x a partire dal punto B:

- baricentro del triangolo: $x_{gT} = \frac{2}{3} L$;
- baricentro del rettangolo: $x_{gR} = \frac{1}{2} L$;

da cui, essendo l'area del trapezio proprio Π_n , la posizione del baricentro del solido delle pressioni risulta:

$$x_g = \frac{x_{gT} A_T + x_{gR} A_R}{A_T + A_R} \quad (209)$$

la quale rappresenta l'espressione cercata per la posizione del centro di spinta.

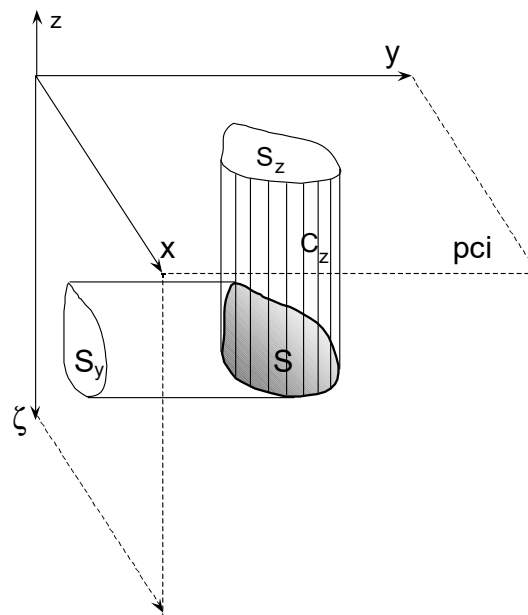


FIGURA 20

4.2.2. Spinte su superficie curve

Si consideri una superficie S all'interno del liquido. Attraverso la normale $\mathbf{n}$ alla superficie è possibile identificare una faccia positiva ed una negativa. Le componenti della spinta risultante rispetto ad un sistema di assi cartesiani che abbia l'asse z verticale, diretto verso l'alto sono:

$$\begin{cases} \Pi_x = \int_S p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_x) dS = \int_{S_x} p dS_x = \int_{S_x} \gamma \zeta dS \\ \Pi_y = \int_S p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_y) dS = \int_{S_y} p dS_y = \int_{S_y} \gamma \zeta dS \\ \Pi_z = \int_S p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_z) dS = \int_{S_z} p dS_z = \int_{S_z} \gamma \zeta dS \end{cases} \quad (210)$$

Nelle quali abbiamo tenuto conto che moltiplicare scalarmente $\mathbf{n} dS$ per un generico versore $\mathbf{i}$, corrisponde a proiettare la superficie dS su di un piano che ha $\mathbf{i}$ per normale:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_x) dS = dS_x$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_y) dS = dS_y$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_z) dS = dS_z$$

Le superficie S_x, S_y, S_z , sono le proiezioni di S sui piani che hanno per normali i tre assi coordinati (Figura 20).

Le (209) ci dicono che il sistema di pressioni sulla superficie curva è equivalente a 3 sistemi di pressioni: i primi due agiscono sulle superficie piane verticali S_x ed S_y , proiezione della superficie S su di un piano che ha per normale x o y , rispettivamente (Figura 20); il terzo sistema di forze si calcola invece osservando che nell'integrale che esprime Π_z , dS corrisponde alla base e ζ corrisponde all'altezza di un elementino del volume di un prisma, C_z , a generatrici verticali, compreso tra la superficie ed il piano dei carichi idrostatici. Integrando su S_z , che è la base del prisma, e moltiplicando per γ si ottiene il peso di tale prisma. La retta d'azione di questo sistema di forze ha la direzione della risultante e passa per il baricentro di detto cilindro.

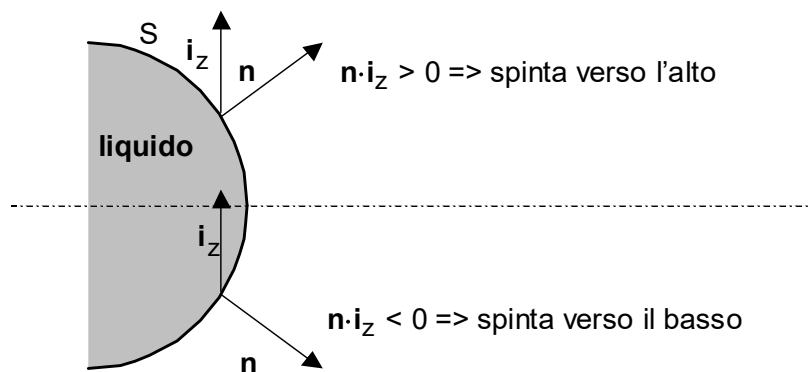


FIGURA 21

Per determinare se la spinta sarà diretta verso l'alto o verso il basso, è necessario confrontare la direzione della normale $\mathbf{n}$ con quella del versore $\mathbf{i}_z$, dell'asse z : se formano un angolo minore di $\pi/2$ il prodotto scalare sarà positivo e quindi la spinta sarà diretta verso l'alto (concordemente all'asse z), nel caso invece l'angolo formato tra i due vettori superi $\pi/2$, il prodotto scalare darà risultato negativo e la spinta sarà diretta discordemente all'asse z , cioè verso il basso (Figura 21). Considerazioni analoghe permettono di determinare se le componenti orizzontali della spinta sono concordi o meno agli assi. Si ottiene quindi, in generale, un sistema di 3 forze, con rette d'azione sghembe, che vanno composte tra loro per giungere all'espressione della risultante e del momento risultante. Utilizzando le regole ora descritte è possibile evincere che le pareti della superficie che

incontrano un numero pari di volte una retta orizzontale non contribuiscono alla spinta orizzontale. Quindi su di una superficie chiusa la risultante orizzontale della spinta è nulla.

Se invece una superficie è attraversata più volte da una retta verticale si può suddividere la superficie stessa in parti nelle quali $(\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n}) > 0$ e parti nelle quali $(\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n}) < 0$ e sommare algebricamente i contributi.

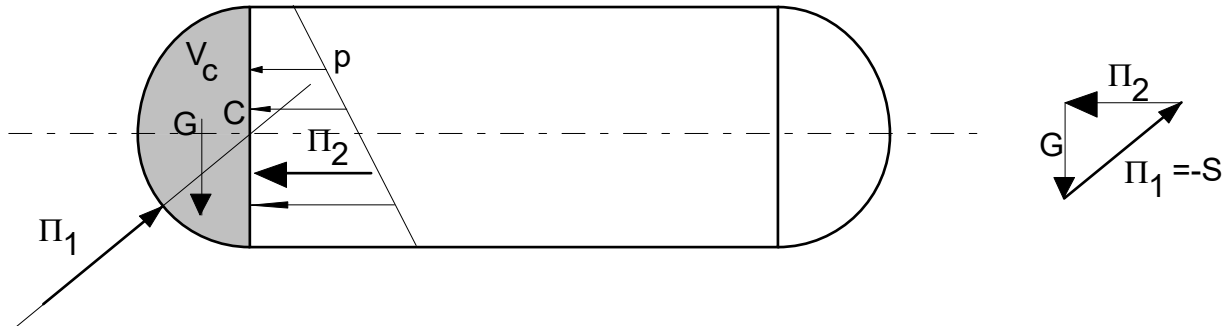


FIGURA 22

I ragionamenti fatti in precedenza propongono dei metodi di calcolo della risultante in alcuni casi di comune applicazione, bisogna osservare però che in molti casi è possibile calcolare la spinta di una superficie applicando l'equazione globale della quantità di moto (127) ad un opportuno volume di controllo. Nel caso idrostatico $\mathbf{I} = \mathbf{0}$, inoltre l'annullarsi del campo di velocità fa sì che anche il flusso di quantità di moto sia nullo: $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. L'equazione globale si riduce quindi a:

$$\boxed{\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{G} = \mathbf{0}} \quad (211)$$

la quale, in questa forma, è detta *equazione globale dell'idrostatica*.

Si consideri, a titolo di esempio, il serbatoio cilindrico, chiuso da due calotte semisferiche di Figura 22, riempito di un fluido pesante. Per determinare la spinta che il fluido esercita sulla calotta di sinistra si applica l'equazione globale al volume V_c :

$$\boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

nella quale $\boldsymbol{\Pi}_1$ rappresenta la spinta che la calotta esercita sul fluido, ed è quindi uguale ed opposto alla spinta, $\mathbf{S}$, che il fluido esercita sulla calotta: $\mathbf{S} = -\boldsymbol{\Pi}_1$; il secondo termine, $\boldsymbol{\Pi}_2$, è la risultante delle pressioni sulla superficie piana verticale di divisione tra calotta e cilindro; il terzo termine, $\mathbf{G}$, rappresenta il peso del fluido contenuto nel volume di controllo V_c . Sostituendo $\mathbf{S} = -\boldsymbol{\Pi}_1$ si ottiene l'espressione vettoriale per la spinta cercata:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\Pi}_2 + \mathbf{G}.$$

La retta d'azione $\mathbf{S}$ dovrà passare per il centro della semicirconferenza, C , poiché è risultante di azioni elementari sulla superficie della calotta le cui rette di azione si intersecano tutte in quel punto.

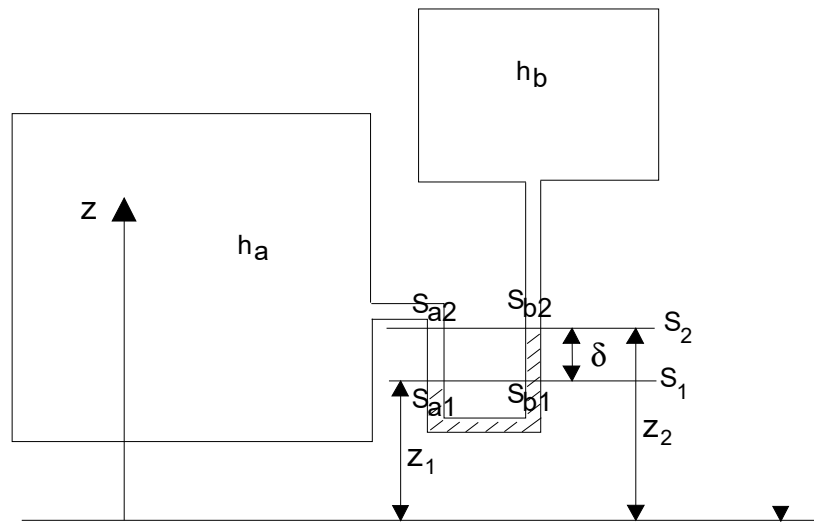


FIGURA 23

4.3. Alcune applicazioni dell'idrostatica

4.2.3. Manometri a liquido

Il manometro a liquido (con liquido manometrico di peso specifico γ_m) schematizzato in Figura 23 è utilizzato per valutare la pressione in un generico punto che si trova alla quota z all'interno di un recipiente. Il carico piezometrico, h , è costante in ciascuno dei due contenitori: quindi una volta noto il carico piezometrico è possibile ricavare la pressione a qualsiasi quota.

Consideriamo la sezione S_1 , che interseca i due rami del manometro alla stessa quota z_1 , su due superficie S_{a1} e S_{b1} . Le pressioni su queste due superficie sono uguali poiché sono entrambe alla stessa quota e a contatto con lo stesso liquido manometrico: $p_{a1} = p_{b1}$.

Nella sezione S_2 , che interseca i due rami del manometro alla stessa quota z_2 , su due superficie S_{a2} e S_{b2} , le pressioni saranno più basse a causa del minor affondamento e in ragione del peso specifico del fluido:

$$p_{a2} = p_{a1} - \gamma\delta; \quad p_{b2} = p_{b1} - \gamma_m\delta$$

ricavando p_{a1} e p_{b1} dalle precedenti, ed uguagliandole si ottiene:

$$(p_{a2} - p_{b2}) = (\gamma_m - \gamma)\delta \quad (212)$$

avendo indicato con γ il peso specifico del liquido. Nel caso in cui il ramo b del manometro sia a contatto con l'atmosfera si ha $p_b = p_{atm}$ e quindi la formula precedente fornisce la pressione relativa nel serbatoio a alla quota z_2 .

Sappiamo che all'interno di uno stesso liquido in quiete il carico piezometrico, $h = z + p/\gamma$, si mantiene costante. Di conseguenza, il carico che si ha in S_{a2} è lo stesso che si ha in tutto il serbatoio a (h_a); analogamente, il carico misurato in S_{b2} è lo stesso che si ha in tutto il serbatoio b (h_b). La differenza di carico piezometrico tra i due serbatoi risulta perciò è pari a:

$$h_a - h_b = \left(z_2 + \frac{p_{a2}}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_{b2}}{\gamma} \right) = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \delta. \quad (213)$$

4.2.4. Spessore di una condotta circolare

Data una condotta cilindrica con sezione circolare di diametro D e spessore e , si supponga di avere una distribuzione di pressione uniforme p all'interno del condotto. Si consideri un tratto di lunghezza L sezionato secondo un piano diametrale. Per l'equilibrio degli sforzi attraverso lo spessore della parete del tubo risulta (Figura 24):

$$2 \sigma e L = D p L \quad (214)$$

ove σ è lo sforzo cui è soggetta la parete della tubazione che non deve superare il carico di sicurezza del materiale di cui è costituita.

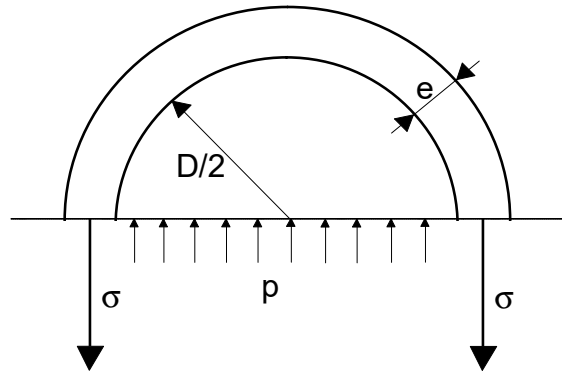


FIGURA 24

Se $\sigma_{\max}$ è il valore del carico di sicurezza per il materiale scelto per la condotta, si può ricavare lo spessore (*formula di Mariotte*) necessario a sopportare la pressione massima prevista $p_{\max}$:

$$e = \frac{D p_{\max}}{2 \sigma_{\max}} \quad (215)$$

5. EQUAZIONI DELLE CORRENTI

5.1. Flussi quasi-unidimensionali

Nelle applicazioni ingegneristiche si ha sovente a che fare con flussi dotati di una caratteristica comune: si svolgono fondamentalmente lungo una direzione preferenziale; inoltre, se si escludono alcuni tratti ben definiti, le variazioni lungo questa direzione sono sufficientemente graduali da poter essere trascurate, in modo da schematizzare il flusso come una successione di moti uniformi lungo tale direzione. In questo modo lo stato del fluido diventa funzione, oltre che del tempo, di una sola variabile spaziale: l'ascissa curvilinea, s , misurata lungo l'asse di questo tubo di fluido (Figura 25).

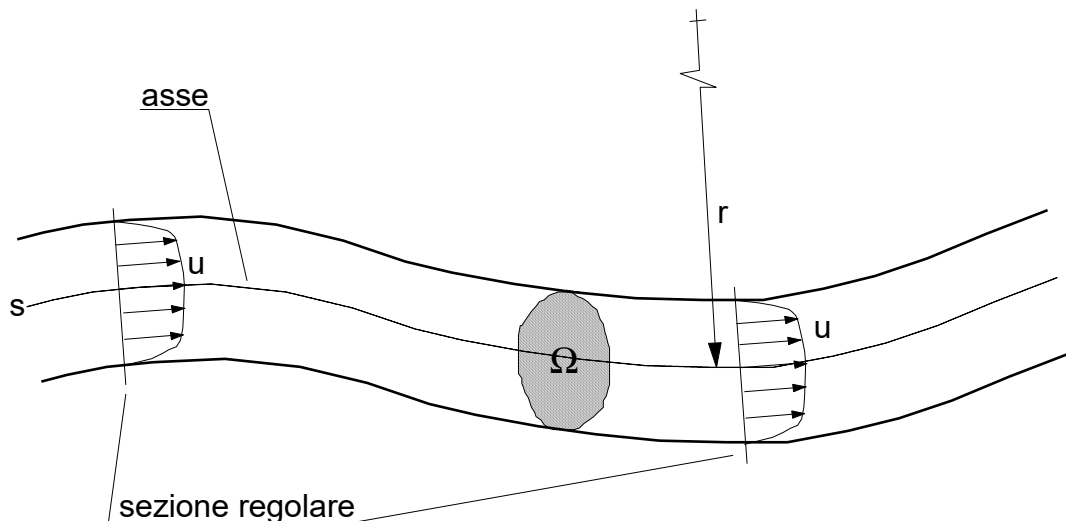


FIGURA 25

Per poter formalizzare le osservazioni sin qui fatte definiamo innanzitutto una *sezione regolare* come una sezione piana che sia normale alla velocità del fluido in ogni punto. Consideriamo un flusso tale che per ogni suo punto passi una ed una sola sezione regolare: potremo allora definire una ascissa curvilinea, s , misurata lungo una curva che sia ortogonale a tutte le sezioni regolari, e che le identifichi univocamente. Tale curva è detta *asse del moto*. Possiamo affermare che questo flusso è *gradualmente variato* se sono soddisfatte le due seguenti condizioni: in ogni suo punto il raggio di curvatura, r , dell'ascissa curvilinea deve essere molto maggiore della dimensione trasversale caratteristica del tubo di flusso nel quale scorre il fluido, $d = \sqrt{\Omega}$, con Ω area della generica sezione regolare:

$$\frac{\sqrt{\Omega}}{r} \ll 1; \quad (216)$$

inoltre la scala spaziale di variazione del fenomeno in direzione dell'ascissa curvilinea deve essere ovunque molto maggiore della dimensione trasversale, imponiamo cioè che non vi siano variazioni di sezione od altre cause di perturbazione del moto, come una transizione da laminare a turbolento, che impongano brusche variazioni delle caratteristiche del flusso lungo la direzione s .

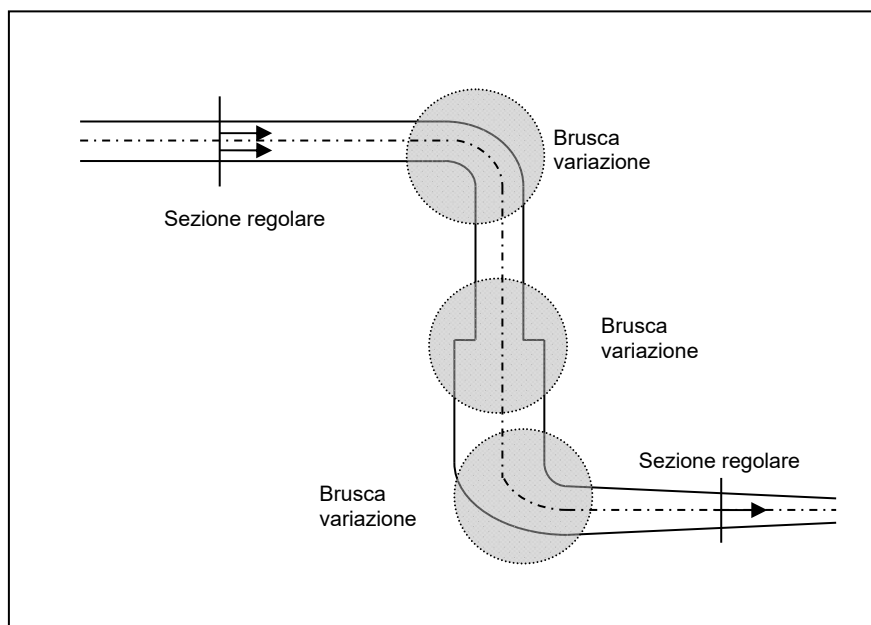


FIGURA 26

Un flusso nel quale sia definibile una ascissa curvilinea, nel senso sopra descritto, e che sia gradualmente variato è detto quasi-unidimensionale o *corrente fluida gradualmente variata* (zone in bianco nella Figura 26).

Naturalmente un flusso tra quelli presi ad esempio in precedenza può essere caratterizzato, per alcuni suoi tratti, da moto tridimensionale o da brusche variazioni dell'asse del moto (zone in grigio nella Figura 26); ciò non impedisce di giungere ad alcuni risultati interessanti. Definiremo allora, semplicemente, *corrente fluida*, un flusso caratterizzato dall'essere localmente quasi-unidimensionale, e di godere quindi delle proprietà sopra descritte, su almeno due sezioni regolari. Nella trattazione che segue imposteremo le equazioni per le correnti sotto le ipotesi di *fluido incomprimibile e moto stazionario*.

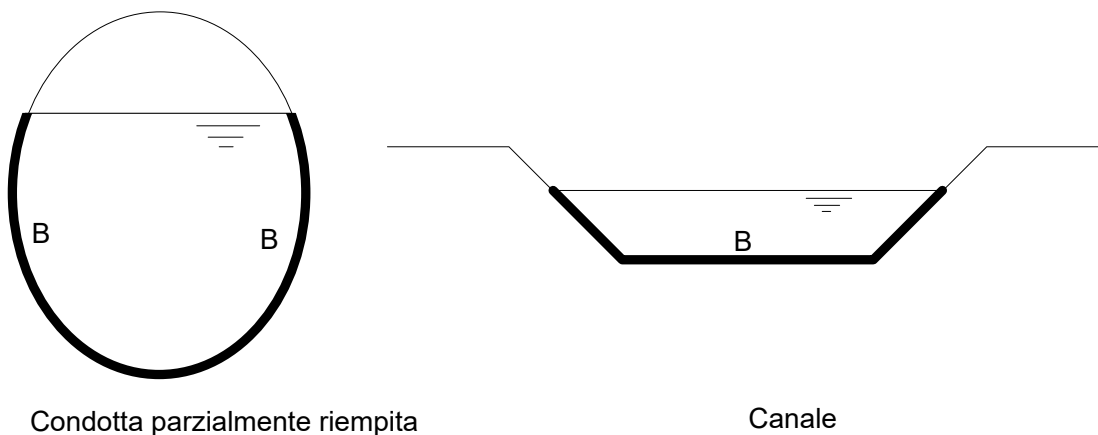


FIGURA 27

Nel caso in cui il fluido in questione sia un liquido, il contorno delle sezioni regolari può essere a contatto in parte con una superficie solida ed in parte con un aeriforme. La parte di interfaccia tra liquido ed aeriforme è detta *pelo libero*, la parte a contatto con la parete solida è detta *contorno bagnato*, B. In generale si distinguono due grandi classi di problemi: i moti nei quali esiste un pelo libero, ad esempio quello di un liquido in un canale, od in una condotta parzialmente riempita, che sono detti *moti a pelo libero* (Figura 27), ed i moti nei quali l'intero contorno è a contatto con una superficie solida, che sono detti *moti nelle condotte in pressione* sui quali ci concentreremo in questa sede.

5.2. Conservazione della massa

Per caratterizzare in modo unidimensionale le correnti dovremo descrivere il flusso in termini di quantità medie sulla sezione regolare. Naturalmente ciò è possibile solo dove il flusso è effettivamente unidimensionale, o quasi-unidimensionale, ovvero sulle sezioni regolari. Questo significa che in effetti noi siamo in grado di descrivere, in questa trattazione, lo stato del fluido solo in corrispondenza delle sezioni regolari, mentre ciò che accade nei tratti di moto tridimensionale potrà essere considerato solo in forma globale, come effetto complessivo sulla corrente tra una sezione regolare a monte ed una a valle della zona di tridimensionalità del moto. Anche le equazioni che esprimono i principi della meccanica dei fluidi andranno quindi riformulate in funzione di queste quantità medie e, per una corrente prenderanno la forma di equazioni di bilancio tra due sezioni regolari, mentre per una corrente gradualmente variata, che ha infinite sezioni regolari, potranno assumere una forma differenziale, che descrive il moto in qualsiasi punto della corrente.

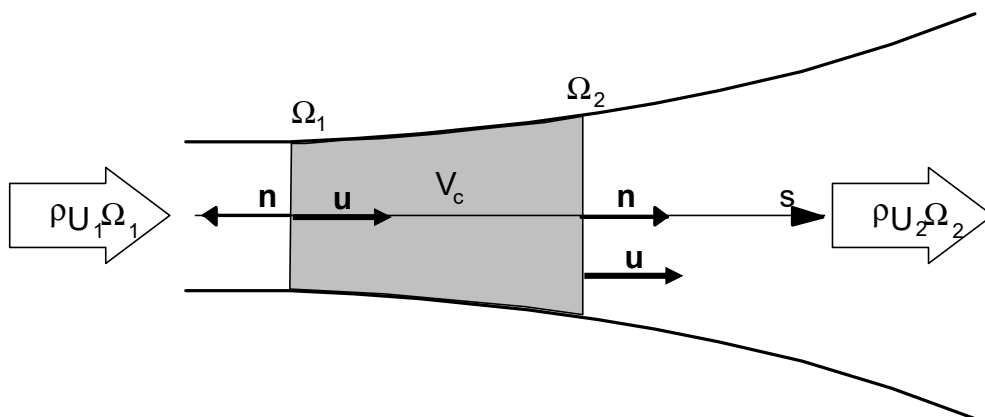


FIGURA 28

Per scrivere l'equazione di bilancio della massa per le correnti sarà sufficiente considerare un volume di controllo, V_c (Figura 28), il quale coincide con un tronco di corrente delimitato da due sezioni regolari, Ω_1 ed Ω_2 , ed applicare a questo l'equazione globale di conservazione della massa (116). Il flusso di massa totale, Φ_m , attraverso la superficie del volume di controllo può essere scomposto in tre contributi: Φ_L attraverso la superficie laterale, e Φ_1 e Φ_2 attraverso le sezioni Ω_1 ed Ω_2 , rispettivamente. La conservazione della massa, (116), si scriverà dunque:

$$m_{,t} + \Phi_m = \Phi_L + \Phi_1 + \Phi_2 = 0. \quad (217)$$

Avendo posto $m_{,t} = 0$ poiché stiamo considerando il caso di moto stazionario e scomposto il flusso di massa nei suoi contributi attraverso la superficie Ω_1 , la superficie Ω_2 e la superficie Ω_L . Poiché il contorno della corrente non cambia nel tempo, la velocità del fluido sarà ovunque tangente alla superficie laterale (normalmente costituita dalle pareti della condotta), quindi non vi sarà flusso di massa attraverso la superficie laterale ($\Phi_L = 0$). L'equazione precedente si riduce quindi a stabilire che il flusso attraverso la sezione Ω_1 è uguale ed opposto a quello attraverso la sezione Ω_2 :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

I due flussi possono essere espressi come:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{-u} dS = - \int_{\Omega_1} \rho u dS \\ \Phi_2 = \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{+u} dS = \int_{\Omega_2} \rho u dS \end{cases} \quad (218)$$

Ricordiamo che $\mathbf{n}$ rappresenta la normale uscente dal volume di controllo (Figura 28) e che, nell'ipotesi di sezione regolare, $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{n}$ hanno la stessa direzione sulle sezioni 1 e 2; quindi avremo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -u$ sulla sezione 1 dove $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{n}$ hanno verso opposto e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u$ sulla sezione 2, dove $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{n}$ sono concordi, possiamo scrivere:

$$- \int_{\Omega_1} u dS + \int_{\Omega_2} u dS = 0 \quad (219)$$

Per dare una descrizione integrale del fenomeno conviene introdurre la velocità media sulla sezione regolare:

$$U(s) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u dS; \quad (220)$$

e la *portata*, ovvero il flusso volumetrico attraverso una sezione Ω :

$$Q = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s dS. \quad (221)$$

Applicando la definizione di portata ad una sezione regolare, e tenendo conto del fatto che, in questo caso, la portata viene, per convenzione, definita in base alla normale, $\mathbf{n}_s$, equiversa al moto si ottiene:

$$Q = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s dS = \int_{\Omega} u dS = \Omega U. \quad (222)$$

Confrontando questa definizione con le (218) si ha che $\Phi_2 = \rho Q_2$, e $\Phi_1 = -\rho Q_1$. Se riprendiamo ora l'equazione di bilancio della massa, e la scriviamo in termini di portata, dividendo per la densità ρ , che è costante, otteniamo:

$$Q_1 = Q_2;$$

la quale stabilisce che la portata che fluisce attraverso qualsiasi sezione regolare di una corrente è la stessa, ovvero:

$$Q = U \Omega = \text{cost.} \quad (223)$$

5.3. Equazione dell'energia per le correnti

Per scrivere un bilancio di energia tra due sezioni regolari conviene procedere in modo diverso, calcolando un bilancio dell'energia trasportata dalla corrente per unità di tempo. Valuteremo inizialmente ciò che accade lungo una linea di corrente e poi integreremo su tutta la corrente.

Consideriamo a tal fine, sotto l'ipotesi di flusso stazionario e incompressibile, due sezioni regolari, Ω_1 ed Ω_2 , ed una linea di corrente che collega due punti di queste sezioni (Figura 29). Proiettiamo ora l'equazione di bilancio dell'energia meccanica (179), lungo questa linea di corrente:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{i}_s + g \nabla H \cdot \mathbf{i}_s = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i}_s + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_s$$

il primo termine a primo membro è nullo per la stazionarietà del flusso, mentre la proiezione del primo termine a secondo membro è nulla in quanto, come già osservato a suo tempo, tale termine è sempre ortogonale alla velocità e dunque al versore della linea di corrente $\mathbf{i}_s$; osservando infine che $\nabla H \cdot \mathbf{i}_s = \partial H / \partial s = H_{,s}$, otteniamo:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s \quad (224)$$

nella quale il secondo membro rappresenta la dissipazione viscosa. Integrando questa equazione, lungo la linea di corrente, tra la sezione 1 e la sezione 2 otteniamo una relazione tra i carichi totali:

$$\int_1^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = H_2 - H_1 = \int_1^2 \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds. \quad (225)$$

Consideriamo ora un tubo di flusso infinitesimo nell'intorno della linea di corrente; l'energia per unità di tempo trasportata da questa porzione di corrente (ovvero la sua potenza) è data dal prodotto dell'energia per unità di peso del fluido, H , per il peso del fluido che fluisce nell'unità di tempo, γdQ :

$$dP = H \gamma dQ. \quad (226)$$

Osservando che, per la conservazione della massa, la portata dQ è costante lungo tutto il tubo di flusso, e quindi si ha $dQ_1 = dQ_2 = dQ$, si può esprimere la differenza tra la potenza nella sezione 2 e quella nella sezione 1 (che corrisponde all'energia dissipata nell'unità di tempo lungo il tubo di flusso) come:

$$H_2 \gamma dQ - H_1 \gamma dQ = \left(\int_1^2 \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right) \gamma dQ$$

tenendo conto che $\nu = \mu/\rho$ e $\gamma = \rho g$, l'equazione diventa::

$$\gamma H_2 dQ - \gamma H_1 dQ = \left[\int_1^2 \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right] dQ$$

ed integrando sull'intera portata della corrente si giunge alla:

$$\gamma \int_Q H_2 dQ - \gamma \int_Q H_1 dQ = \int_Q \left[\int_1^2 \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right] dQ. \quad (227)$$

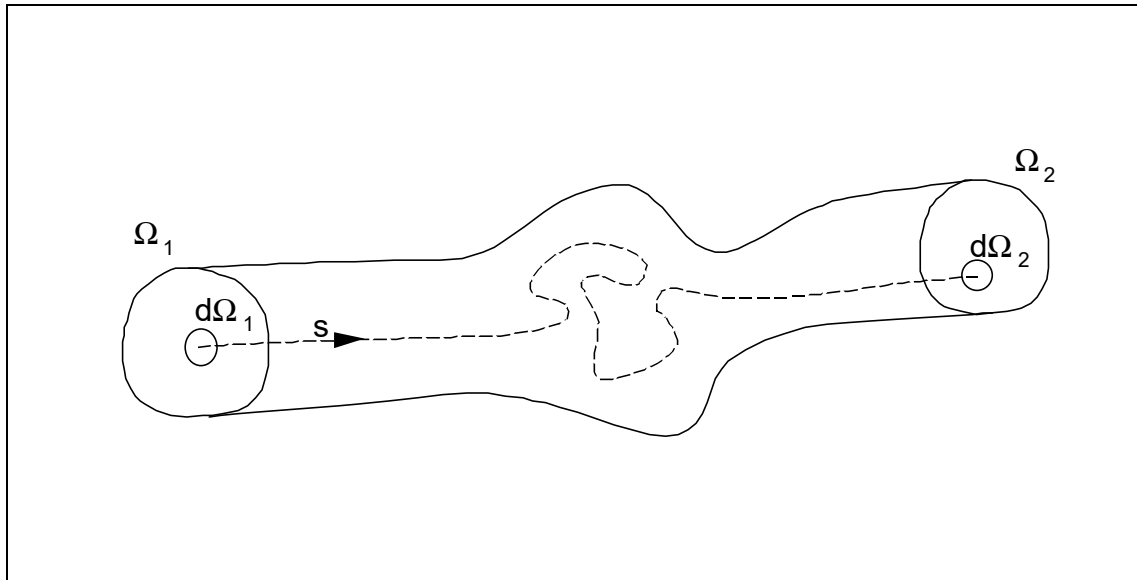


FIGURA 29

Consideriamo gli integrali a primo membro, ricordando che la portata che passa su ciascun tubo di flusso infinitesimo è $dQ = u \, d\Omega$ e tenendo presente la definizione di carico totale $H = h + u^2/2g$:

$$\int_Q H dQ = \int_{\Omega} H u d\Omega = \int_{\Omega} \left(h + \frac{u^2}{2g} \right) u d\Omega.$$

D'altra parte sappiamo che, nell'intorno di una sezione regolare, il flusso si comporta come se le linee di corrente fossero rettilinee, quindi valgono ancora su di essa le equazioni (162), scritte per i flussi paralleli, e possiamo concludere quindi, che *il carico piezometrico si mantiene costante sulle sezioni regolari* e può uscire dall'integrale di superficie. Alla luce di queste considerazioni, l'integrale precedente può essere scomposto in due termini:

$$\int_{\Omega} \left(h + \frac{u^2}{2g} \right) u d\Omega = h \underbrace{\int_{\Omega} u d\Omega}_Q + \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega = hQ + \alpha \frac{U^2}{2g} Q \quad (228)$$

dove α è un coefficiente, detto *coefficiente di Coriolis*¹⁶, introdotto al fine di esprimere anche il secondo integrale in funzione di quantità medie e, in particolare, della velocità media sulla sezione, U . La sua espressione è:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega}. \quad (229)$$

Per mezzo della (228) possiamo scrivere la (227) come:

¹⁶ Il coefficiente Coriolis, o coefficiente di ragguglio per l'energia cinetica tiene conto della forma del profilo di velocità: $\alpha = 1$ nel caso in cui la velocità sia uniforme, e pari alla velocità media, su tutta la sezione, mentre si discosta, anche sensibilmente, dall'unità nel caso di distribuzioni fortemente non uniformi. È utile osservare che nel caso, frequente, di moto turbolento, la velocità è quasi ovunque sulla sezione molto vicina alla velocità media e quindi $\alpha \sim 1$; altrettanto non si può dire invece nel caso di moto laminare, poiché il profilo di velocità è parabolico e quindi fortemente non uniforme.

$$\gamma \left(h_2 + \alpha \frac{U_2^2}{2g} \right) Q - \gamma \left(h_1 + \alpha \frac{U_1^2}{2g} \right) Q; \quad (230)$$

la quale è funzione delle sole quantità medie sulle sezioni regolari. Consideriamo ora il secondo membro della (227); scambiando gli integrali si ha:

$$\int_Q \left[\int_1^2 \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right] dQ = \int_1^2 \left[\int_Q \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s dQ \right] ds = \int_1^2 \left[\int_\Omega \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s u d\Omega \right] ds = -\gamma Q \int_1^2 \epsilon_v ds; \quad (231)$$

avendo introdotto la quantità:

$$\epsilon_v = -\frac{1}{\Omega} \int_\Omega \frac{v}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s \frac{u}{U} d\Omega. \quad (232)$$

che altro non è se non la dissipazione media sulla sezione della corrente, per unità di lunghezza. Trattandosi di dissipazione, l'integrale che vi compare sarà, generalmente, negativo; il segno meno nella definizione è dunque inserito in modo che la quantità ϵ_v risulti positiva. Sostituendo infine la (231) nella (227) e dividendo per γQ si ottiene la cercata relazione tra l'energia meccanica della corrente nella sezione 1 e quella nella sezione 2:

$$\left(h_1 + \alpha \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \alpha \frac{U_2^2}{2g} \right) = \int_1^2 \epsilon_v ds \quad (233)$$

Questa equazione, che rappresenta l'*equazione dell'energia per le correnti* può essere riscritta in termini di carico totale per la corrente,

$$H = h + \alpha \frac{U^2}{2g}, \quad (234)$$

come:

$$H_1 - H_2 = \int_1^2 \epsilon_v ds. \quad (235)$$

Questa equazione permette di valutare la variazione di energia della corrente tra due qualsiasi sezioni regolari di una corrente, senza nessuna ipotesi sul tratto di flusso che intercorre tra tali sezioni: si tratta in effetti di una formulazione globale del bilancio di energia. Se invece si sta considerando un tratto in cui la corrente è gradualmente variata è possibile scrivere una equazione differenziale che vale in tutti i punti della corrente, giungendo cioè ad una formulazione locale. Per farlo è sufficiente scrivere l'equazione (235) tra due sezioni regolari infinitamente vicine (Figura 30).

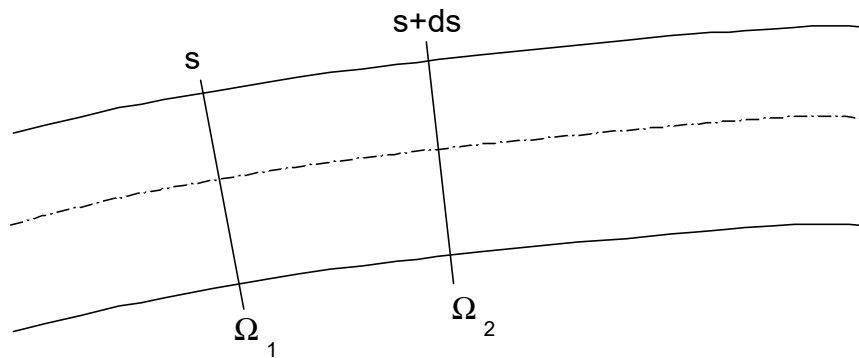


FIGURA 30

Poniamo $H_1 = H$, $H_2 = H + dH$ e la dissipazione viscosa nel tratto infinitesimo ds pari a $\epsilon_v ds$; avremo:

$$H - H - dH = \epsilon_v ds$$

e, dividendo per ds otteniamo la relazione differenziale cercata:

$$-\frac{\partial H}{\partial s} = \epsilon_v \quad (236)$$

Il termine a primo membro rappresenta la *perdita di carico totale per unità di lunghezza* e viene usualmente indicato con:

$$\boxed{J = -\frac{\partial H}{\partial s}} \quad (237)$$

In questo modo possiamo scrivere la forma finale dell'equazione dell'energia per le correnti in forma locale:

$$\boxed{J = \epsilon_v} \quad (238)$$

Naturalmente per poter calcolare la differenza di carico totale, sia utilizzando la forma locale che quella globale, sarebbe necessario conoscere ϵ_v . Bisogna osservare però che il termine di dissipazione non è stato possibile esprimerlo in termini di quantità medie sulla sezione, e sarebbe quindi necessario conoscere l'intero campo di velocità tridimensionale per poterlo determinare. Questo, da una parte, è in contrasto con lo spirito della trattazione delle correnti fatta finora, il cui scopo è di giungere ad una formulazione monodimensionale, dall'altra è di fatto impossibile nella quasi totalità dei problemi che si pongono nella pratica; per stimare le perdite di carico si farà allora riferimento a formule empiriche o semiempiriche basate su risultati sperimentali e sull'analisi dimensionale.

6. CORRENTI IN PRESSIONE

Come citato in precedenza, i classici problemi che si affrontano per mezzo dello schema delle correnti si dividono in due grandi categorie: i flussi di liquidi la cui superficie laterale è interamente delimitata da superficie solide, che vengono detti moti nelle condotte in pressione, ed i flussi che hanno almeno una parte della superficie laterale a contatto con un aeriforme, che sono detti moti a pelo libero. In questa sede, ci concentreremo sui moti nelle condotte in pressione.

6.1. Moto uniforme e permanente

6.1.1. Generalità

Consideriamo il flusso stazionario (permanente) di un fluido incomprimibile attraverso una condotta cilindrica (moto uniforme), l'equazione dell'energia per le correnti (238) afferma che la perdita di carico per unità di lunghezza è bilanciata dalla dissipazione ad opera delle forze viscosi:

$$j = \varepsilon_v \quad (239)$$

L'equazione di conservazione della massa (223) afferma che la portata attraverso qualsiasi sezione regolare deve essere la stessa:

$$Q = \text{cost.} \quad (240)$$

Se la portata è costante, essendo la condotta cilindrica, anche la velocità $U = Q/\Omega$ risulta costante, e rimanendo costante l'altezza cinetica $U^2/2g$, avremo che, nel caso in esame:

$$\boxed{i = j} \quad (241)$$

Quindi, nel caso di moto stazionario ed uniforme, la pendenza piezometrica, i , eguaglia le perdite di carico dovute alle forze viscosi, j .

6.1.2. Equazione di Darcy-Weisbach

L'equazione dell'energia per le correnti gradualmente variate stabilisce un legame tra le perdite di energia meccanica per unità di lunghezza, j , e la dissipazione viscosa ε_v . Quest'ultima, però, dipende sia dal regime di moto che dalle caratteristiche di scabrezza della parete a contatto con il fluido e, in generale, non è possibile determinarla per via analitica. Si utilizza allora l'analisi dimensionale che permette di esprimere le perdite di carico in funzione di coefficienti che possono essere determinati sperimentalmente.

Scegliamo innanzitutto come grandezze fondamentali la lunghezza, la densità e la velocità; in un problema come quello che stiamo affrontando, legato alle condizioni al contorno alla parete, la scala

delle lunghezze che influenza il fenomeno è il diametro della tubazione, D , la scala delle densità è l'unica densità in gioco ρ , mentre la velocità caratteristica è la velocità media sulla sezione regolare, U . Per mezzo di queste grandezze è possibile adimensionalizzare la dissipazione viscosa:

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}} \quad (242)$$

Il coefficiente λ , è detto *coefficiente di resistenza* e rappresenta la dissipazione viscosa, per unità di lunghezza, adimensionale. In effetti λ rappresenta la porzione di energia cinetica dissipata dalla corrente per ogni diametro percorso. Il coefficiente di resistenza deve essere funzione dei gruppi adimensionali che caratterizzano il problema: se le pareti del condotto sono fluidodinamicamente lisce, l'unico gruppo influente sarà il numero di Reynolds, $Re = DU/v$; nel caso di parete fluidodinamicamente scabra, invece, essendo in gioco anche le caratteristiche della parete, oltre che dal già citato numero di Reynolds dipenderà anche dal rapporto $\varepsilon_r = \varepsilon/D$ detto *scabrezza relativa*. I due gruppi adimensionali diventano quindi, in questo caso di notevole rilievo pratico, $Re = DU/v$ e ε_r/D . Sostituendo l'espressione (242) nella (239) si ottiene l'*equazione di Darcy-Weisbach*:

$$\boxed{j = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}} \quad (243)$$

che esprime le perdite di carico per unità di lunghezza in funzione del parametro adimensionale λ . Per poter conoscere le perdite di carico nel condotto è sufficiente determinare, sperimentalmente o analiticamente, il valore di λ al variare di Re e di ε_r/D .

6.1.3. Resistenza nelle condotte

Nel caso di moto laminare in tubi tondi è possibile integrare le equazioni di Navier-Stokes, determinare il profilo di velocità che risulta parabolico e, da questo il coefficiente λ , che risulta inversamente proporzionale al numero di Reynolds:

$$\boxed{\lambda = 64 \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{64}{Re}} \quad (244)$$

Nel caso di moto turbolento invece non è possibile trovare una soluzione analitica e bisogna dunque riferirsi ai dati sperimentali.

In Figura 31 sono riportati i risultati di esperimenti condotti su tubi tondi resi artificialmente scabri per mezzo di sferette di diametro controllato pari ad ε (Nikuradse, 1933). Nel grafico è riportato, in scala bilogarithmica, il coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds, per diversi valori della scabrezza adimensionale.

Si osserva che per bassi valori del numero di Reynolds il moto è laminare ed il coefficiente di resistenza è inversamente proporzionale ad esso (tratto rettilineo nella scala bilogarithmica). Raggiunto un valore critico, Re_c , il moto diventa turbolento ed il coefficiente λ aumenta bruscamente. Aumentando ancora il numero di Reynolds il coefficiente scende lungo la curva che caratterizza i tubi fluidodinamicamente lisci: si tratta di un regime di flusso nel quale le scabrezze della parete sono completamente ricomprese in una zona prossima alla parete, detta sottostrato laminare, nella quale gli effetti della viscosità smorzano tutte le perturbazioni generate dalla presenza delle asperità; anche in questo tratto, come nel precedente, $\lambda = \lambda(Re)$. All'aumentare del numero di Reynolds però lo spessore del sottostrato laminare diminuisce e, oltre un certo numero di Reynolds, le asperità della parete emergono dal sottostrato laminare e le perturbazioni che esse

generano non sono più smorzate. Avviene quella che si chiama una transizione verso condizioni di parete fluidodinamicamente scabra che comporta un aumento di λ . Si può notare che, maggiore è la scabrezza, minore è il numero di Reynolds a cui avviene la transizione. In questa zona $\lambda = \lambda(R_e, \epsilon_r)$. Infine, oltre un certo numero di Reynolds, il coefficiente di resistenza diventa indipendente da R_e : $\lambda = \lambda(\epsilon_r)$. In queste condizioni parla di *turbolenza completamente sviluppata*.

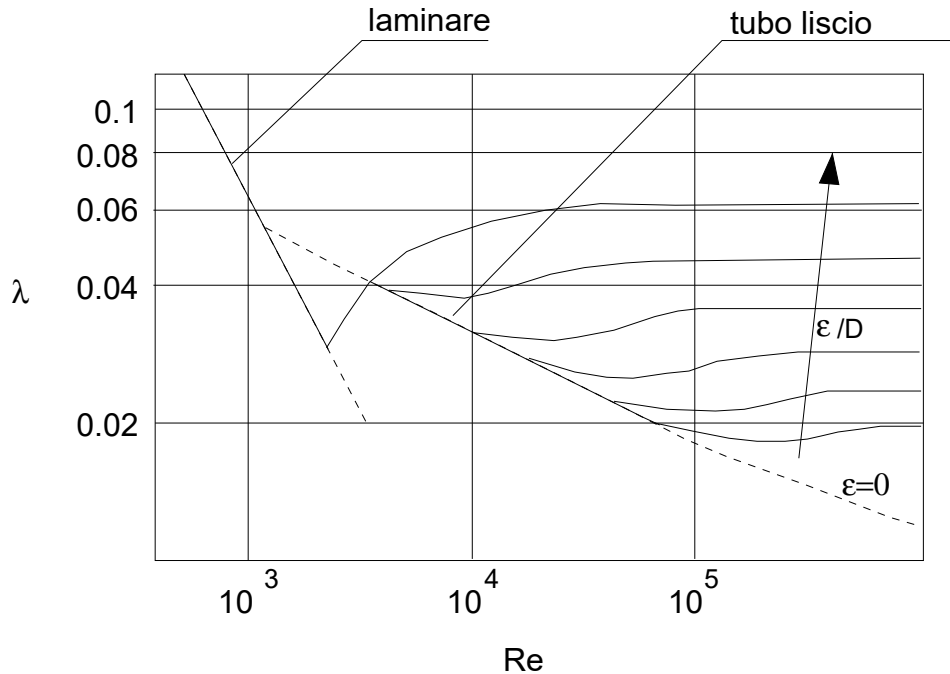


FIGURA 31

In generale però, nei tubi prodotti industrialmente, la scabrezza non è omogenea e, per definire una dimensione caratteristica delle asperità della parete, si fa riferimento al concetto di scabrezza equivalente. Per definire tale grandezza è innanzitutto necessario ricordare che, per $R_e \gg 1$ il coefficiente di resistenza λ non dipende più dal numero di Reynolds ma solo dalla scabrezza. Definiamo perciò la scala delle scabrezze, chiamata scabrezza equivalente, a partire dai suoi effetti sul flusso: *si definisce scabrezza equivalente, ϵ_e , il diametro delle sferette che rivestono un tubo tondo (del tipo di Nikuradse) il quale dà lo stesso valore di λ del tubo commerciale considerato in condizioni di turbolenza completamente sviluppata (cioè per $R_e \gg 1$).*

La scabrezza equivalente di una superficie dipende dal materiale di cui è costituita e dal tipo di lavorazione con la quale è stata ottenuta. La Tabella 1 riporta alcuni valori tipici di riferimento per dei materiali comuni.

Tipo di condotta	Scabrezza equivalente (mm)
Vetro	0.001
Acciaio laminato nuovo	0.05
Acciaio laminato arrugginito	0.15÷0.25
Acciaio laminato incrostato	1.5÷3
Cemento liscio	0.3÷0.8
Cemento naturale	3

TABELLA 1

Si traccia allora un diagramma detto di Moody, valido per tubi commerciali, in cui le curve sono tracciate in funzione della scabrezza relativa, $\epsilon_r = \epsilon_e / D$ (Figura 32). Dopo la zona a regime laminare, possiamo individuare una zona critica, all'interno della quale avviene la transizione a

regime turbolento. Per valori più alti del numero di Reynolds si trova la cosiddetta zona di transizione nella quale $\lambda = \lambda(R_e, \epsilon_r)$. Il cambiamento da regime di parete liscia a quello di parete scabra avviene in modo più graduale, con un raccordo continuo tra le due pendenze, senza che λ raggiunga un minimo in prossimità della transizione per poi aumentare prima di raggiungere la condizione di turbolenza completamente sviluppata, come accade nel caso di scabrezza uniforme nel diagramma di Nikuradtse.

Per valori più alti del numero di Reynolds si trova la cosiddetta zona di regime assolutamente turbolento, nella quale $\lambda = \lambda(\epsilon_r)$. Colebrook ha proposto una relazione semiempirica che permette di calcolare con buona approssimazione il coefficiente di resistenza sia in caso di parete liscia che scabra:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon_r}{3.71D} \right). \quad (245)$$

Questa formula infatti è molto simile a quella per parete liscia se $\epsilon_r \rightarrow 0$ e tende invece a quella per parete scabra in regime assolutamente turbolento se $R_e \rightarrow \infty$.

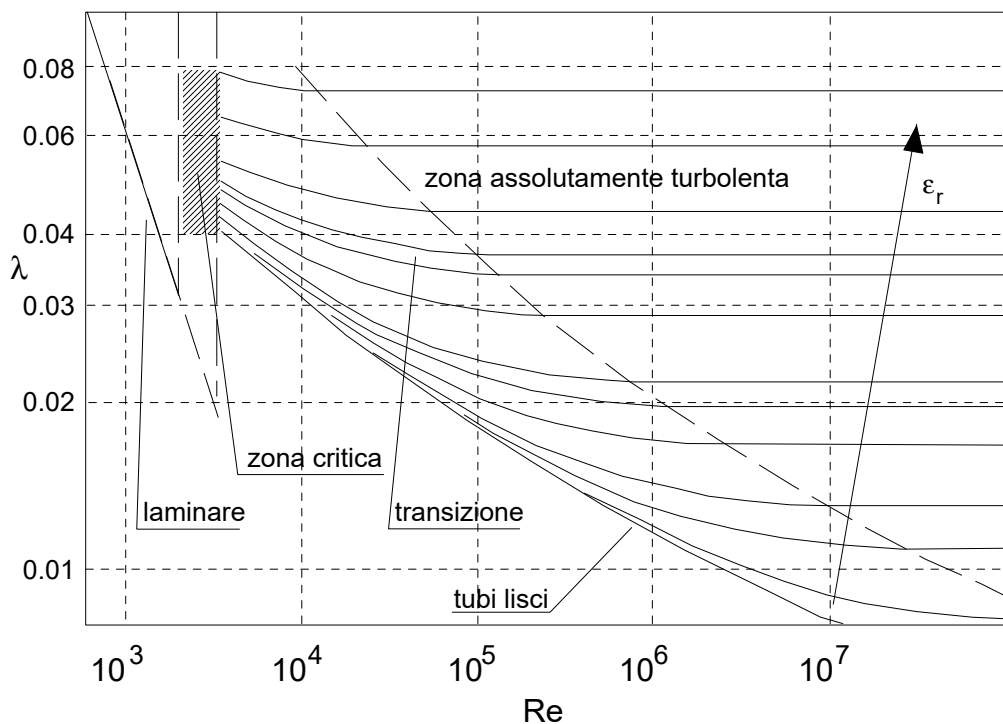


FIGURA 32

6.1.4. Formule pratiche

Le formule sinora riportate per i vari regimi di moto turbolento hanno delle espressioni derivate in modo analitico dalla forma dei profili di velocità, solo i coefficienti che compaiono sono stati determinati sperimentalmente, per questo motivo esse si adattano meglio di ogni altra ai risultati sperimentali per ampi campi di variazione dei parametri in gioco. D'altra parte esse hanno uno svantaggio fondamentale: sono tutte espresse in forma implicita, quindi vanno risolte iterativamente, per tentativi. Per superare questo problema sono state proposte diverse formule che approssimano le precedenti con sufficiente precisione ma che hanno la caratteristica di essere esplicite.

Esistono formule pratiche che coprono i diversi regimi di moto descritti in precedenza, in questa sede tuttavia riporteremo quelle valide in regime assolutamente turbolento che sono quelle di più frequente applicazione.

6.1.4.1. Formula di Darcy

La portata, nel caso di tubi tondi si può scrivere come:

$$Q = \Omega U = \frac{\pi D^2}{4} U$$

e l'equazione di Darcy-Weisbach diventa:

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{8\lambda}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} \quad (246)$$

e, definendo il coefficiente dimensionale $\beta_r = \frac{8\lambda}{g\pi^2}$ otteniamo la *formula di Darcy*:

$$j = \beta_r \frac{Q^2}{D^5} \quad (247)$$

che può dirsi equivalente a quella di Darcy-Weisbach, se scritta per tubi tondi. Per valutare β_r sono state proposte diverse formule empiriche, valide in condizioni assolutamente turbolente, qui riportiamo quella di Gauckler-Strickler:

$$\beta_r = \frac{10.3}{k_s^2 D^{1/3}} \quad (248)$$

Nella quale k_s è un indice di scabrezza che aumenta al diminuire della scabrezza del tubo ed ha dimensioni $[m^{1/3} s^{-1}]$. I suoi valori tipici per condotte realizzate nei materiali più comuni sono riportate in Tabella 2.

Tipo di tubo	$k_s (m^{1/3} s^{-1})$
Vetro, Ottone, Rame trafilato	liscio
Acciaio nuovo	100
Acciaio usato	90
Cemento intonacato nuovo	100
Cemento intonacato usato	70

TABELLA 2

6.2. Moto permanente

6.2.1. Generalità

Nel paragrafo precedente è stato affrontato il problema del moto permanente all'interno di condotte che avessero sezione costante. In molti tratti di un impianto idraulico tuttavia la sezione varia più o meno bruscamente, ed è dunque necessario affrontare il problema in modo leggermente diverso. Classifichiamo innanzitutto i problemi che si possono presentare in due grandi categorie: quella dei moti in presenza di variazioni graduali di sezione, che saranno affrontati per mezzo delle equazioni delle correnti, e quella delle brusche variazioni di sezione, per le quali l'ipotesi di quasi-unidimensionalità non è valida e che dovranno essere risolti con strumenti diversi.

6.2.2. Variazioni graduali di sezione

Anche nel caso in cui la corrente non sia cilindrica ma abbia delle variazioni graduali di sezione lungo il suo percorso le equazioni che reggono il moto sono le stesse. L'equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial(U\Omega)}{\partial s} = 0; \quad (249)$$

e l'equazione dell'energia per le correnti:

$$-\frac{\partial H}{\partial s} = \varepsilon_v. \quad (250)$$

Come nel caso precedente, lo schema monodimensionale non è in grado di fornire informazioni sulle perdite di carico legate alla viscosità. Per determinarle si ipotizza che, essendo le variazioni di sezione graduali, in ogni punto, s , della condotta le perdite di carico siano le stesse che si avrebbero in una condotta uniforme con sezione pari a quella che si ha in quel punto, $\Omega(s)$. Naturalmente queste ipotesi sono valide finché non siano presenti zone di ricircolazione turbolenta che comportino ulteriori perdite di carico, come nel caso di distacco dello strato limite. Questo problema è particolarmente sentito nei tratti in cui c'è allargamento della condotta, nei quali il gradiente avverso di pressione favorisce il distacco della vena. Per questo motivo sono ammissibili angoli fino a $20^\circ \div 25^\circ$ nelle condotte convergenti mentre solo fino a $6^\circ \div 7^\circ$ se la condotta è divergente. Per determinare le perdite di carico nel tratto in cui varia il diametro sarà quindi necessario integrare l'equazione (250), stimando le perdite di carico in ogni sezione per mezzo di una delle relazioni empiriche precedentemente descritte e tenendo conto del fatto che queste variano di sezione in sezione in conseguenza della variazione del diametro. Per esempio, utilizzando la formula di Darcy, per ottenere l'andamento del carico totale, sarebbe necessario integrare la:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\beta_r(D(s)) \frac{Q^2}{D^5(s)},$$

nella quale è necessario conoscere la funzione $D(s)$ che descrive come varia il diametro lungo la condotta.

6.2.3. Brusco allargamento

Si consideri il caso in cui si verifichi un brusco allargamento in una corrente in pressione con l'area della sezione trasversale che con discontinuità passa da Ω_1 ad Ω_2 , (Figura 33). Si proietti lungo l'asse della corrente l'equazione integrale di bilancio della quantità di moto (127) relativa al volume, V_c , compreso tra la sezione 1, immediatamente a monte dell'allargamento, e la sezione 2, a valle, dove il moto riprende ad essere regolare, distante Δs dalla sezione 1. Con questa scelta sia Ω_1 che Ω_2 sono sezioni regolari. Per far questo formuliamo le seguenti ipotesi:

- perdite di carico dovute agli sforzi tangenziali sulla superficie laterale del volume di controllo trascurabili;
- stato di tensione normale sulle superficie regolari $\tau_{ss} \cong -p$, supponiamo cioè che la pressione sia molto maggiore degli altri termini che compaiono nell'equazione costitutiva;
- distribuzione idrostatica della pressione sulla sezione in 1 della condotta, che ha area $\Omega_2 - \Omega_1$, a causa del forte rimescolamento dovuto al ricircolo che si genera in prossimità di quella zona; anche in questa zona supponiamo $\tau_{ss} \cong -p$.

Valutiamo quindi l'equazione globale di bilancio della quantità di moto proiettata lungo l'asse della corrente:

$$\mathbf{I}_s + \mathbf{M}_s = \mathbf{G}_s + \mathbf{\Pi}_s. \quad (251)$$

Il primo termine è nullo in quanto il fenomeno è ipotizzato stazionario, quindi la quantità di moto contenuta nel volume di controllo è costante. Il secondo termine, che rappresenta il flusso di quantità di moto uscente attraverso la superficie del volume di controllo, può essere scomposto in tre contributi: il flusso attraverso la sezione 1, M_1 , quello attraverso la sezione 2, M_2 , e quello attraverso la superficie laterale, M_L . Quest'ultimo termine è evidentemente nullo in quanto non c'è flusso di massa attraverso le pareti laterali del condotto considerato, quello attraverso la sezione 1 è invece:

$$M_1 = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} (\underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}_{-u}) d\Omega \cdot \mathbf{i}_s = -\rho \int_{\Omega_1} u^2 d\Omega;$$

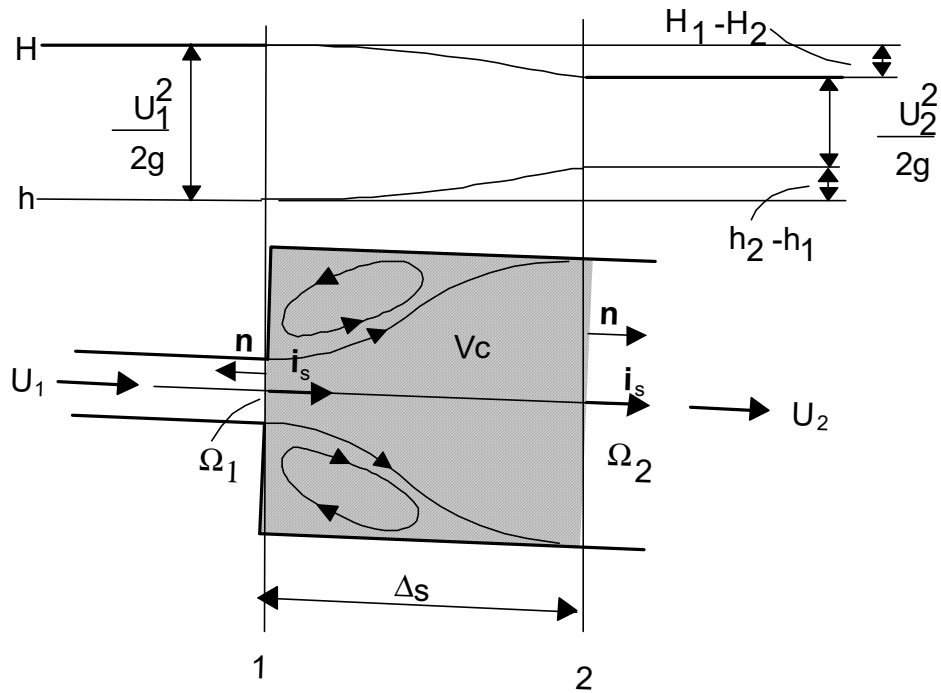


FIGURA 33

avendo indicato con $\mathbf{i}_s$ il versore dell'asse della corrente e con $\mathbf{n}$ la normale esterna a V_c , ed avendo tenuto conto del fatto che la sezione è regolare e quindi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_s = u$, mentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -u$. Introducendo il coefficiente di ragguaglio per la quantità di moto¹⁷:

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} \quad (252)$$

il flusso può essere espresso per mezzo della velocità media sulla sezione:

$$M_1 = -\beta \rho U_1^2 \Omega_1.$$

¹⁷ β è l'analogo, per la quantità di moto, del coefficiente di Coriolis α per l'energia cinetica

Analogamente il flusso sulla sezione 2 può essere espresso come:

$$M_2 = \beta \rho U_2^2 \Omega_2;$$

avendo tenuto conto del fatto che, questa volta, la normale esterna, $\mathbf{n}$, è concorde con la velocità e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = +u$

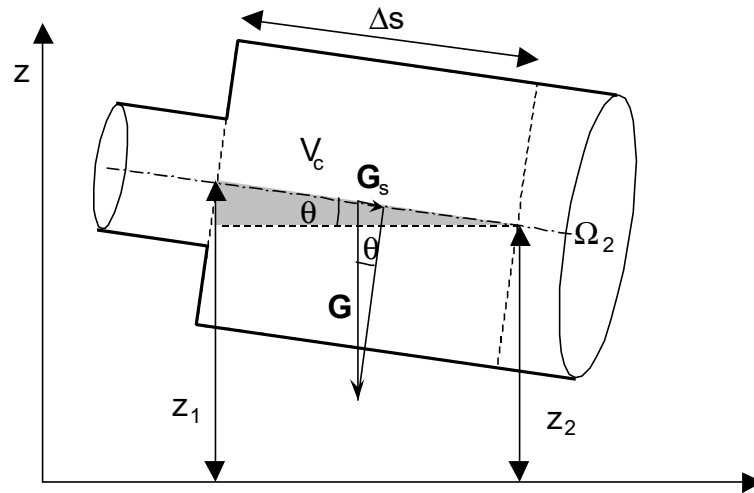


FIGURA 34

Quindi il flusso di quantità di moto, proiettato lungo s , risulta:

$$M_s = M_1 + M_2 = -\beta \rho U_1^2 \Omega_1 + \beta \rho U_2^2 \Omega_2. \quad (253)$$

La risultante delle forze di massa, $\mathbf{G}$, è diretta verso il basso ed ha modulo pari al peso del volume di controllo $\gamma V_c = \gamma \Omega_2 \Delta s$. La sua componente lungo l'asse della condotta è

$$G_s = \gamma \Omega_2 \Delta s \sin \theta;$$

nella quale θ indica l'inclinazione dell'asse della condotta rispetto all'orizzontale. D'altra parte, osservando il triangolo rettangolo campito in grigio nella Figura 34, si evince che

$$(z_1 - z_2) = \Delta s \sin \theta,$$

e sostituendo nella precedente si ottiene:

$$G_s = \gamma (z_1 - z_2) \Omega_2 \quad (254)$$

La componente lungo l'asse della risultante delle forze di superficie esterne che agiscono sul volume di controllo può essere anch'essa scomposta nella somma di tre contributi, sulle sezioni 1 e 2 e sulla superficie laterale. Sulla superficie laterale, il contributo in direzione dell'asse è fornito dalle tensioni tangenziali che, per ipotesi, sono trascurabili. Sulle sezioni 1 e 2 invece il contributo in direzione assiale è dato dalle tensioni normali tra le quali, per ipotesi, prevale la pressione. Tenendo conto che si è supposto che la distribuzione delle pressioni sia idrostatica su tutta la sezione 1, anche nella corona circolare corrispondente alla zona di ricircolo, mentre sulla sezione 2 è senz'altro idrostatica in quanto si tratta di una sezione regolare, si può scrivere il contributo delle forze di superficie in direzione assiale usando le formule dell'idrostatica:

$$\Pi_s = p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2. \quad (255)$$

Sostituendo le (253), (254) nella (251) si ottiene infine:

$$-\beta \rho U_1^2 \Omega_1 + \beta \rho U_2^2 \Omega_2 = \rho g \Omega_2 (z_1 - z_2) + p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2,$$

dividendo per $\rho g \Omega_2$, e ricordando la definizione di carico piezometrico, $h = z + p/\gamma$, si ottiene:

$$h_1 - h_2 = -\frac{\beta}{g} U_2 (U_1 - U_2); \quad (256)$$

questa, tenendo conto dell'equazione di conservazione della massa:

$$U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = Q. \quad (257)$$

diventa:

$$h_1 - h_2 = \frac{\beta}{g} U_2^2 \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right), \quad (258)$$

dalla quale si evince che, in corrispondenza di un brusco allargamento di sezione, essendo $\Omega_2 > \Omega_1$, si ha sempre un innalzamento della quota piezometrica.

Calcoliamo la perdita di carico totale:

$$H_1 - H_2 = h_1 - h_2 + \frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2), \quad (259)$$

supponendo $\beta = 1$, come è ragionevole fare nel caso di moto turbolento, e sostituendovi la precedente:

$$H_1 - H_2 = \frac{U_2^2}{g} \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{U_2^2}{2g} = \eta \frac{U_2^2}{2g} \quad (260)$$

che è detta *relazione di Bordà* e permette di valutare la perdita di carico concentrata nel caso di brusca espansione. η , che è detto *coefficiente di perdita di carico*, rappresenta la frazione dell'altezza cinetica a valle che si perde in corrispondenza del brusco allargamento di sezione.

6.2.4. Brusco restringimento

In questo caso la corrente va restringendosi verso valle fino a raggiungere una sezione contratta poco più a valle del restringimento (Figura 35) e non sono più applicabili le ipotesi fatte nel caso di brusco allargamento.

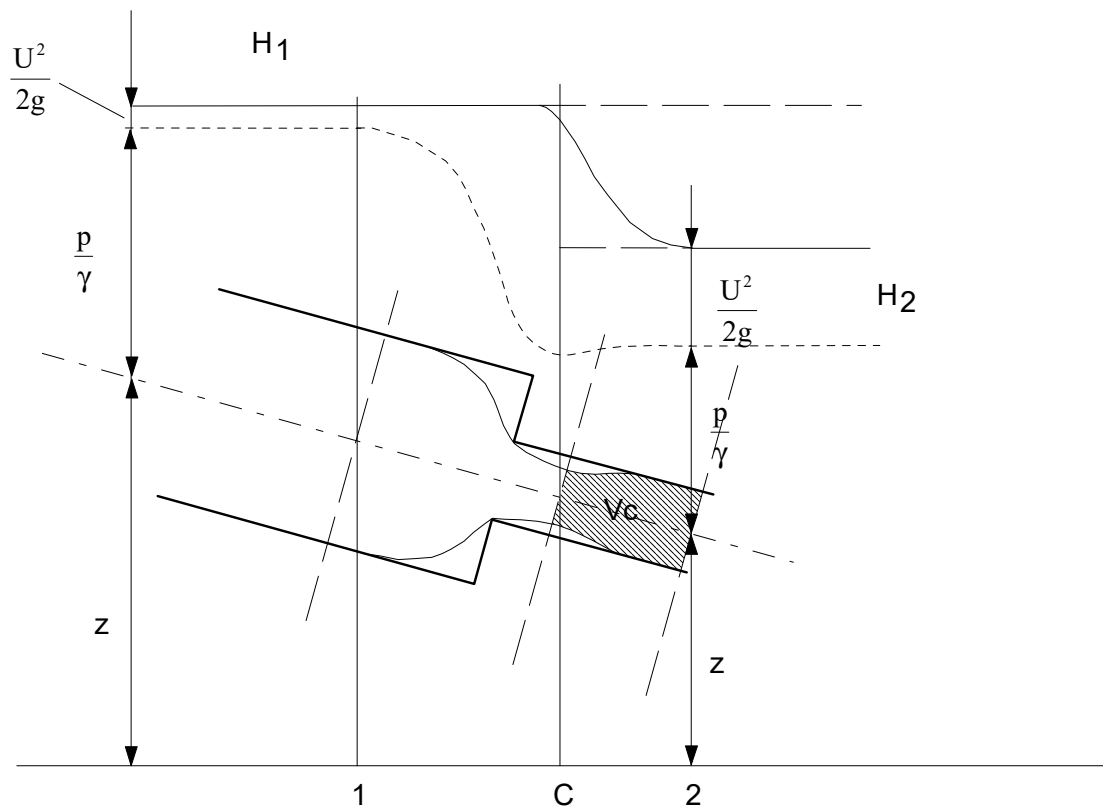


FIGURA 35

Dobbiamo quindi esprimere la perdita di carico come frazione dell'altezza cinetica a valle del fenomeno introducendo un coefficiente di perdita di carico η :

$$H_1 - H_2 = \eta \frac{U^2}{2g}. \quad (261)$$

Un grafico del coefficiente di perdita di carico, η , determinato sperimentalmente in funzione del rapporto di sezione, $k = \Omega_2 / \Omega_1$, in condizioni, di turbolenza completamente sviluppata, è riportato in Figura 36.

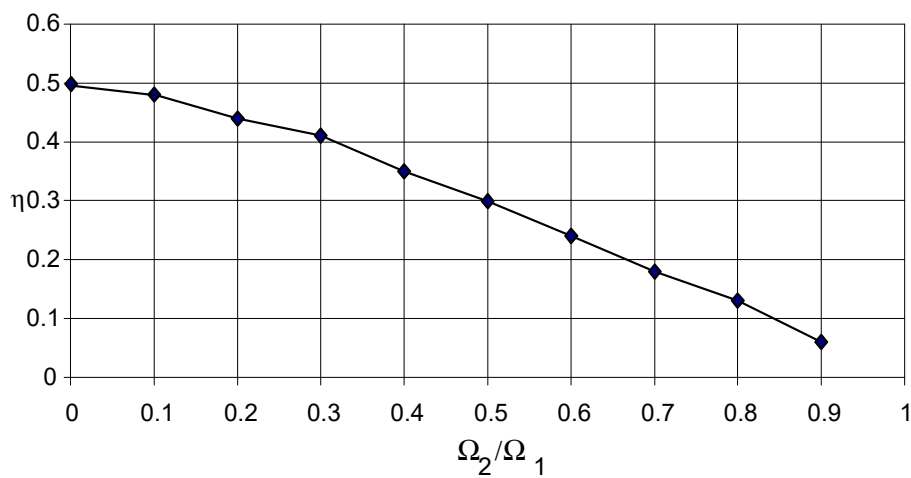
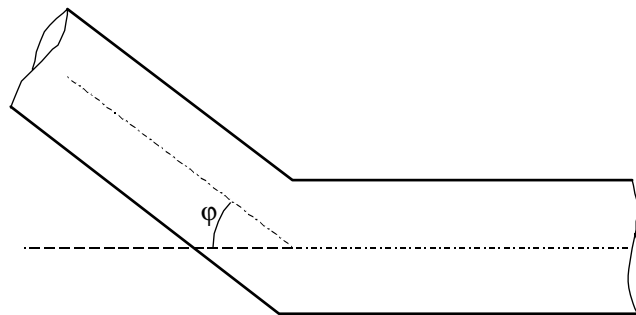


FIGURA 36

6.2.5. Altre perdite di carico concentrate

Nei problemi di brusca variazione del flusso come ad esempio curve, gomiti, giunzioni, saracinesche o, in generale ostacoli improvvisi si generano zone di ricircolo le quali, pur dissipando energia, non contribuiscono al flusso medio del fluido, queste perdite non rientrano in quelle descrivibili nello schema di corrente gradualmente variata e vengono quindi trattate come perdite concentrate. Nella maggioranza dei casi non è possibile trovare delle soluzioni analitiche che permettano di valutare le perdite di carico come è accaduto nel caso di brusca espansione. Si rinuncia allora ad una descrizione dettagliata di ciò che accade nel tratto che comprende il fenomeno e si valutano globalmente le perdite di carico. Si scelgono due sezioni regolari, una a monte ed una a valle e si applica tra di esse l'equazione dell'energia delle correnti (233). Considerando come scala dell'energia per unità di peso l'altezza cinetica a valle del fenomeno, $U_2^2/2g$, il termine dissipativo viene scritto in forma adimensionale per mezzo del già introdotto coefficiente di perdita di carico:

$$H_1 - H_2 = \eta \frac{U_2^2}{2g}. \quad (262)$$



φ	η
20°	0.046
40°	0.139
50°	0.364
80°	0.740
90°	0.984
100°	1.260
120°	1.861
140°	2.431

FIGURA 37

Questo coefficiente adimensionale è funzione, in generale dei parametri geometrici che caratterizzano il fenomeno (raggio di curvatura della curva, rapporto di contrazione nella riduzione di sezione, ecc.) e del numero di Reynolds. Se si suppone però che il moto avviene con un regime di turbolenza pienamente sviluppata ($Re \gg 1$), quest'ultima dipendenza viene meno ed η dipende solo da fattori geometrici adimensionali. Per una curva, ad esempio, η è funzione del rapporto tra il raggio di curvatura della curva ed il diametro della condotta oltre che dell'angolo totale che forma la curva. Per una curva a gomito, con raggio di curvatura nullo, la perdita di carico è invece funzione del solo angolo di variazione della direzione. Valori di η per diversi angoli, φ , di variazione della direzione sono riportati nella Figura 37.

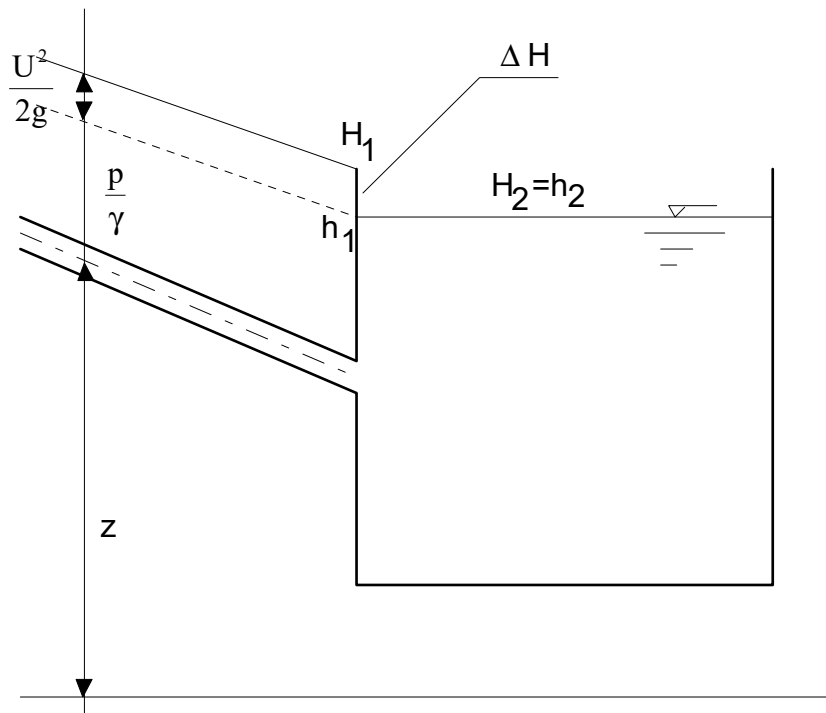


FIGURA 38

6.2.6. Sbocco in un serbatoio

Per valutare le perdite di carico che derivano dallo sbocco del flusso di una condotta in un serbatoio si consideri il carico totale nella sezione immediatamente a monte dello sbocco (Figura 38):

$$H_1 = \frac{U^2}{2g} + h,$$

e lo si confronti con quello misurato nel serbatoio dove il fluido è in quiete:

$$H_2 = h_2.$$

Il carico piezometrico che compare nelle due equazioni è lo stesso perché all'interno del serbatoio la distribuzione di pressione è ovunque piezometrica. In particolare, poiché si fa riferimento alla pressione relativa, esso coincide con la quota z_{pl} del pelo libero del serbatoio: $h = 0/\gamma + z_{pl} = z_{pl}$. La perdita di carico è quindi:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \frac{U^2}{2g}. \quad (263)$$

Si perde quindi tutta l'energia cinetica con la quale il flusso entra nel serbatoio. Facendo riferimento alla formula generale per la valutazione delle perdite di carico localizzate (262), il coefficiente di perdita di carico risulta $\eta = 1$. Naturalmente è possibile ridurre questa perdita inserendo un tratto divergente al termine della condotta, in modo che parte dell'energia cinetica venga convertita in energia potenziale prima dello sbocco nel serbatoio (Figura 39). In questo modo, prima dello sbocco, si converte parte dell'energia cinetica, che andrà dissipata, in energia potenziale, che invece non va dissipata.

6.2.7. Imbocco di condotte

La perdita di carico dovuta all'imbocco di una condotta da un serbatoio è legata alla generazione di una zona di ricircolo, e quindi di una sezione contratta. L'entità di queste perdite dipende dalla geometria della connessione tra serbatoio e condotta. Nel caso di innesto diretto, nel quale la condotta termina a filo con la parete del serbatoio, il problema può essere assimilato ad un caso limite del brusco restringimento descritto in precedenza, portando all'infinito la sezione a monte, Ω_1 . Di conseguenza il rapporto $\Omega_2/\Omega_1 \rightarrow 0$ e, come si evince dal diagramma di Figura 36, la perdita di carico è circa pari alla metà dell'altezza cinetica: $\eta = 0.5$.

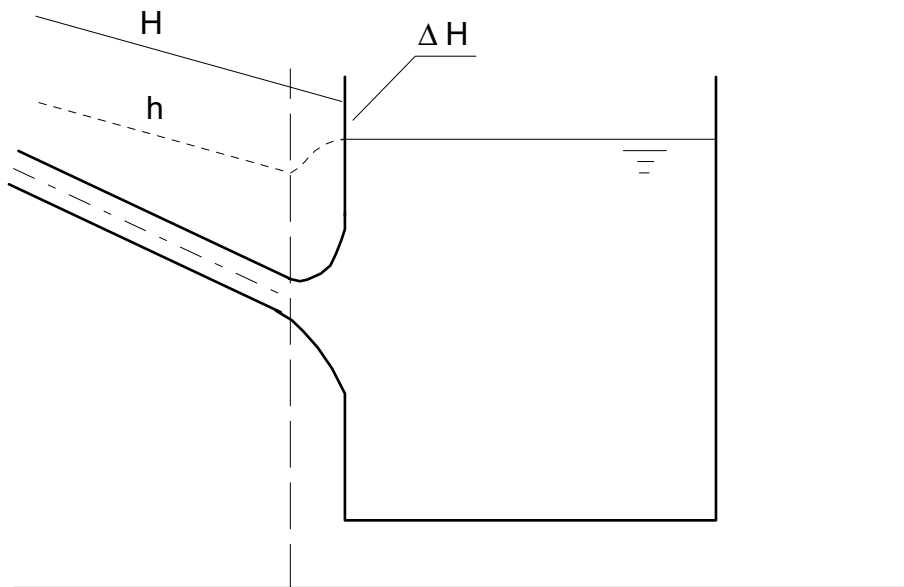


FIGURA 39

Per ridurre queste perdite di carico è possibile inserire un boccaglio di raccordo in modo da evitare del tutto o, almeno ridurre il distacco della vena e la generazione di una zona di ricircolo (Figura 41a). Un valore tipico per il coefficiente di perdita di carico può essere $\eta = 0.06$.

Nel caso infine sia presente un tubo aggiuntivo interno (Figura 41b), i fenomeni dissipativi sono nettamente più pronunciati che nei due casi precedenti e si raggiungono perdite di carico dell'ordine di grandezza dell'altezza cinetica: $\eta = 1$.

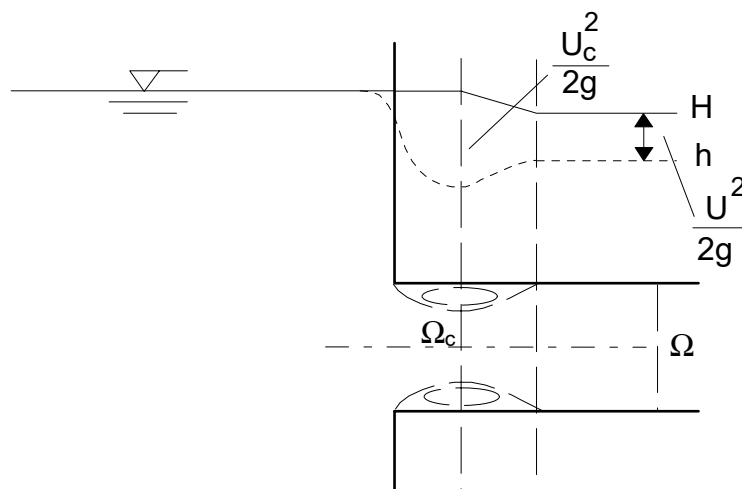


FIGURA 40

La portata può essere espressa con una relazione del tipo:

$$Q = c_Q \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (264)$$

nella quale Ω è la sezione della condotta, h_1 il carico piezometrico nel serbatoio ed h_2 quello in una sezione immediatamente a valle della sezione contratta nella quale il flusso abbia di nuovo occupato tutta la condotta. Il coefficiente riduttore della portata, c_Q , è legato ad η ; infatti:

$$H_1 - H_2 = h_1 - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = \eta \frac{U_2^2}{2g},$$

da cui, utilizzando la (264):

$$\eta = \frac{1}{c_Q^2} - 1. \quad (265)$$

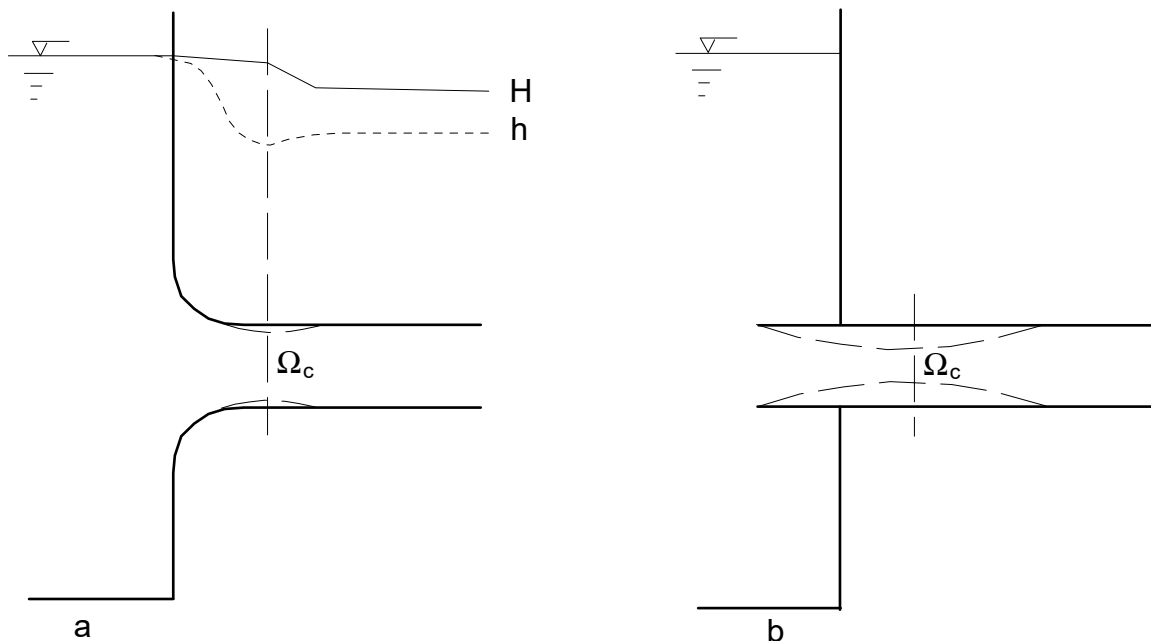


FIGURA 41

6.2.8. Pompe

Finora abbiamo considerato tutti casi nei quali si determinavano delle diminuzioni di energia della corrente. Per generare il moto di un fluido in un impianto in pressione è però necessario che esso disponga dell'energia necessaria. Questa può essere disponibile come energia potenziale del campo gravitazionale (un serbatoio posto a quota elevata), oppure può essere fornita da una macchina a fluido che attinga energia da una fonte esterna (per esempio l'energia elettrica) e la trasformi in energia meccanica della corrente. Le macchine a fluido che forniscono energia al fluido sono dette *pompe*. Ne esistono di vari tipi, con diverse caratteristiche e diversi principi di funzionamento. In questa sede però ci limiteremo a trattare le pompe dal punto di vista dell'impianto nel quale sono inserite, senza considerare i meccanismi attraverso i quali l'energia viene trasferita alla corrente fluida.

In generale noi considereremo una *pompa* come una macchina a fluido in grado di aumentare il carico totale della corrente, ovvero la sua energia meccanica per unità di peso, di una quantità ΔH_p , detta *prevalenza*. L'energia per unità di tempo (ovvero la *potenza*) fornita alla corrente fluida la potremo calcolare come il prodotto del peso di fluido che fluisce attraverso la pompa nell'unità di

tempo moltiplicato per l'incremento di energia fornito dalla pompa all'unità di peso del fluido (ΔH_p):

$$W = \underbrace{\gamma Q}_{\substack{\text{peso di fluido} \\ \text{per unità di tempo}}} \cdot \underbrace{\Delta H_p}_{\substack{\text{energia fornita} \\ \text{per unità di peso}}} \quad (266)$$

Tipicamente, una pompa è costituita di due elementi: un motore elettrico, che assorbe una potenza elettrica, W_a , e la usa per mettere in rotazione l'organo fondamentale della macchina a fluido vera e propria, la girante, che trasferisce questa energia al fluido (Figura 42).

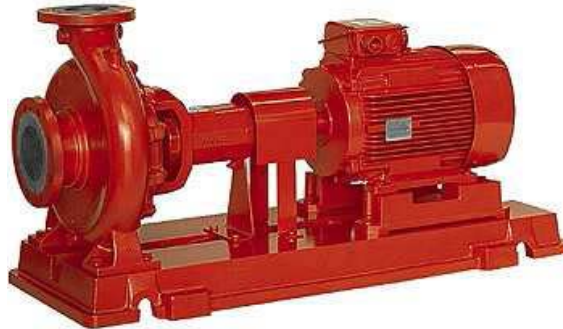


FIGURA 42 - POMPA CENTRIFUGA COMPOSTA DA UNA MACCHINA A FLUIDO (A SINISTRA) E DA UN MOTORE ELETTRICO (A DESTRA) MONTATE SU DI UN UNICO SUPPORTO

In questo processo, una parte dell'energia va inevitabilmente perduta per effetto della viscosità del fluido, degli attriti meccanici, ecc. Per tener conto di questo fatto introduciamo il *rendimento* della pompa definito come il rapporto tra la potenza fornita al fluido, W , e la potenza assorbita, W_a :

$$\eta(Q) = \frac{W}{W_a}; \quad (267)$$

esso sarà il prodotto dei rendimenti degli elementi che compongono la pompa, e quindi, tipicamente del motore elettrico, η_e , e della macchina fluido, η_f : $\eta = \eta_e \cdot \eta_f$. In generale, il rendimento di una pompa dipende dalla tipologia di pompa (Figura 43), dalle condizioni fluidodinamiche nelle quali avviene il flusso attraverso di essa e quindi, in ultima analisi, dalla portata.

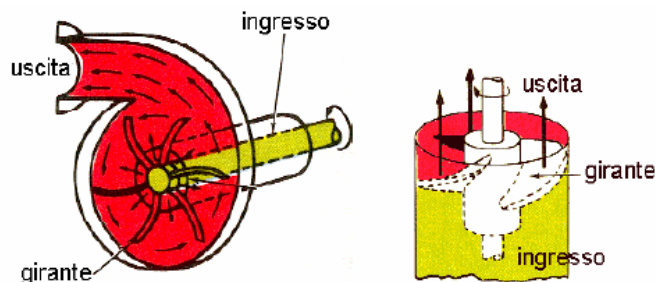


FIGURA 43 - TIPOLOGIE DI POMPE: CENTRIFUGHE (A SINISTRA) E ASSIALI (A DESTRA)

L'equazione della potenza (266) ci dice che se la portata è nulla ($Q = 0$), lo sarà anche la potenza fornita alla corrente fluida. Poiché anche a portata nulla, se la pompa è in funzione, la potenza assorbita è diversa da zero, il rendimento sarà nullo. Ogni pompa avrà il suo campo di funzionamento, e un suo regime di massimo rendimento, al di là del quale si riduce fino a diventare nullo. Un andamento tipico del rendimento di una pompa centrifuga è riportato in Figura 44.

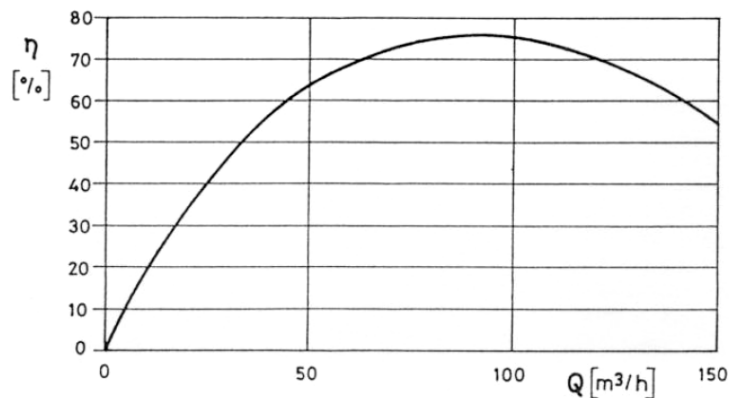


FIGURA 44 - RENDIMENTO DI UNA POMPA

Ricavando la prevalenza dall'equazione (266) ed utilizzando la definizione di rendimento, $W = \eta W_a$, in modo da far comparire la potenza assorbita dalla pompa otteniamo l'*equazione caratteristica della pompa*, che ci permette di calcolare la prevalenza della pompa una volta nota la portata:

$$\Delta H_p(Q) = \frac{\eta(Q)W_a(Q)}{\gamma Q} \quad (268)$$

Nella quale dobbiamo tener conto che anche la potenza assorbita dal motore elettrico che guida la pompa dipende dalle condizioni di funzionamento del motore elettrico e quindi dalla portata (Figura 45).

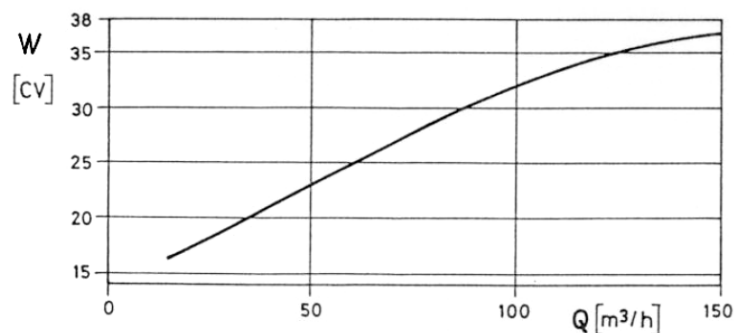


FIGURA 45 - POTENZA ASSORBITA DA UNA POMPA

Il diagramma che scaturisce dalla precedente equazione si chiama *curva caratteristica della pompa* ed è normalmente fornito dal produttore. Un esempio di curva caratteristica è riportato in Figura 46.

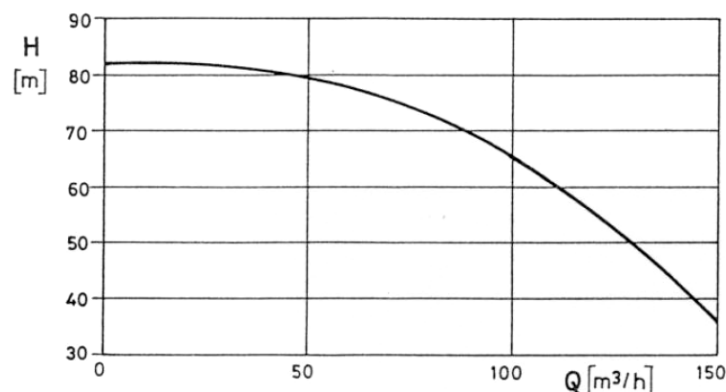


FIGURA 46 - CURVA CARATTERISTICA DI UNA POMPA

6.2.9. Equazione dell'impianto

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che un impianto in pressione, in condizioni stazionarie, e considerando il fluido incomprimibile è regolato dall'equazione di continuità e da quelle dell'energia per le correnti, scritta tra due sezioni regolari 1 e 2:

$$\begin{cases} Q = U\Omega = \text{cost} \\ H_1 - H_2 = \int_1^2 \epsilon_v ds \end{cases} \quad (269)$$

Abbiamo inoltre già concluso che, per il calcolo di ϵ_v e, più in generale, della dissipazione viscosa, non possiamo svolgere in via diretta l'integrale che compare nella seconda delle (269), ma dobbiamo utilizzare le stime delle dissipazioni viscosi che generano le diverse componenti dell'impianto che abbiamo descritte in precedenza. Riscriveremo perciò l'equazione in questa forma:

$$H_1 - H_2 = \sum_i \Delta H_{Ci} + \sum_j \Delta H_{Dj} - \Delta H_p \quad (270)$$

La quale esprime il fatto che la differenza tra il carico totale nella sezione 1 ed il carico totale nella sezione 2 è data dalla somma delle perdite di carico concentrate, ΔH_{Ci} , relative ai tratti dove la corrente ha brusche variazioni, e delle perdite di carico distribuite, ΔH_{Dj} , relative ai tratti nei quali la corrente è gradualmente variata. Se è presente una pompa, ai termini precedenti va sottratta la prevalenza, ΔH_p , che ha segno negativo in quanto si tratta di un aumento del carico totale, quindi con segno opposto agli altri termini, che sono perdite di carico. La generica perdita di carico concentrata può essere espressa in funzione del coefficiente di perdita di carico e dell'energia cinetica:

$$\Delta H_{Ci} = \eta_i \frac{U_i^2}{2g} = \eta_i \frac{Q^2}{2g\Omega_i^2} \quad (271)$$

nella quale abbiamo utilizzato l'equazione di continuità per esprimere le velocità in funzione della portata: $U_i = Q/\Omega_i$ e $\Omega_i = \pi D_i^2/4$ è l'area della sezione dell' i -esimo tratto di condotta, di diametro D_i .

Per i tratti in cui la corrente è gradualmente variata possiamo utilizzare l'equazione dell'energia per le correnti in forma differenziale, integrata nel j -esimo tratto:

$$\Delta H_{Dj} = \int_{L_j} \epsilon_v ds = \int_{L_j} \beta_{rj}(s) \frac{Q^2}{D_j^5(s)} ds = \left(\int_{L_j} \frac{\beta_{rj}(s)}{D_j^5(s)} ds \right) Q^2 \quad (272)$$

avendo usato l'equazione di Darcy (247) per la stima delle perdite di carico nei tubi tondi ed avendo ricordato che $Q = \text{cost.}$ lungo l'impianto. Nella situazione più comune, nei tratti tra una brusca variazione e l'altra il diametro della tubazione si mantiene costante, perciò l'integrale può essere svolto in maniera banale:

$$\Delta H_{Dj} = \left(\frac{\beta_{rj} L_j}{D_j^5} \right) Q^2. \quad (273)$$

Sostituendo le espressioni delle perdite di carico ora ricavate nella (270) si ottiene:

$$H_1 - H_2 = \left(\sum_i \frac{\eta_i}{\Omega_i^2} + \sum_j \frac{\beta_{rj} L_j}{D_j^5} \right) Q^2 - \Delta H_p(Q) \quad (274)$$

che rappresenta l'equazione dell'impianto.

Se consideriamo un cosiddetto problema di verifica, nel quale l'impianto è stato già progettato quindi la sua geometria è definita, e va invece calcolata la portata fluente per verificare se è maggiore o uguale a quella prevista dai requisiti di progetto, il termine tra parentesi va considerato noto, così come i carichi iniziale e finale H_1 ed H_2 . Questa equazione mette allora in relazione la prevalenza ΔH_p e la portata. Si tratta di una relazione di forma quadratica che, insieme alla curva caratteristica della pompa (268) costituisce un sistema di due equazioni non lineari in due incognite:

$$\begin{cases} \Delta H_p(Q) = \left(\sum_i \frac{\eta_i}{\Omega_i^2} + \sum_j \frac{\beta_j L_j}{D_j^5} \right) Q^2 - (H_1 - H_2) \\ \Delta H_p(Q) = \frac{\eta(Q) W_a(Q)}{\gamma Q} \end{cases} \quad (275)$$

Rappresentando nel piano $\Delta H_p - Q$ le curve che rappresentano le due equazioni, individuiamo il punto di funzionamento dell'impianto come l'intersezione tra le due curve (Figura 47). Da un punto di vista numerico invece, il sistema non può che essere risolto iterativamente.

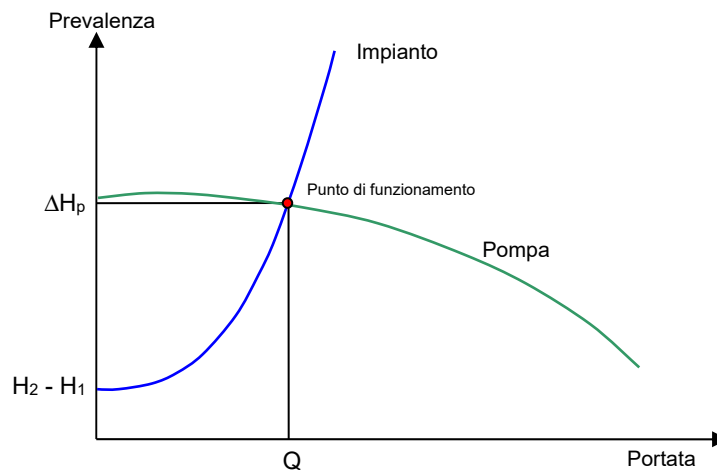


FIGURA 47

6.2.10. Grafico della linea dei carichi totali e della linea piezometrica

L'energia meccanica per unità di peso del fluido, $H = z + p/\gamma + U^2/2g$, ha le dimensioni di una lunghezza (nel sistema internazionale si misura in metri). Questa proprietà rende possibile rappresentare l'andamento del carico totale, H , e di quello piezometrico, $h = z + p/\gamma$, sullo stesso piano nel quale è rappresentato lo schema dell'impianto. Per chiarire questo punto utilizziamo un semplice caso esemplificativo: un impianto che collega due serbatoi (Figura 48).

Si tratta della tipica configurazione di un impianto di sollevamento che collega il serbatoio A, in cui la quota del pelo libero è z_A , al serbatoio B, con quota del pelo libero z_B . L'impianto è costituito da due tratti di tubazione di lunghezza e diametro, rispettivamente L_1, D_1 e L_2, D_2 . Il passaggio tra i due diametri è brusco. Nel primo tratto, a distanza L'_1 dal serbatoio A, è inserita una pompa di cui conosciamo la curva caratteristica. La lunghezza della tubazione 1 è divisa dalla pompa in due parti, L'_1 a monte della pompa, ed L''_1 a valle della pompa, tali che $L_1 = L'_1 + L''_1$.

Calcoliamo innanzitutto quanto vale il carico totale in un serbatoio, prendendo come esempio il serbatoio A. Un serbatoio è schematizzato come un contenitore abbastanza grande da garantire la portata dell'impianto senza che il suo livello cambi in modo sensibile. Inoltre, se escludiamo la zona immediatamente adiacente allo sbocco verso la tubazione, il fluido al suo interno può essere

considerato in quiete. In un fluido in quiete l'energia cinetica è nulla, quindi il carico totale coincide con quello piezometrico. Inoltre sappiamo dallo studio dell'idrostatica che il suo carico piezometrico è costante in tutti i punti. Quindi possiamo concludere che $H_A = h_A$ e che per calcolare il suo valore posso scegliere un qualsiasi punto, P, a patto che sia lontano dall'imbocco nella condotta. Scegliamo dunque P in corrispondenza del pelo libero del serbatoio. Avremo che $H_A = h_A = h_P = z_P + p_P/\gamma = z_A + 0$, avendo osservato che al pelo libero la pressione relativa è nulla ($p_P = 0$). Quindi possiamo concludere che, in generale, *il carico totale in un serbatoio coincide con il carico piezometrico ed è pari alla quota del pelo libero*: $H_A = h_A = z_A$.

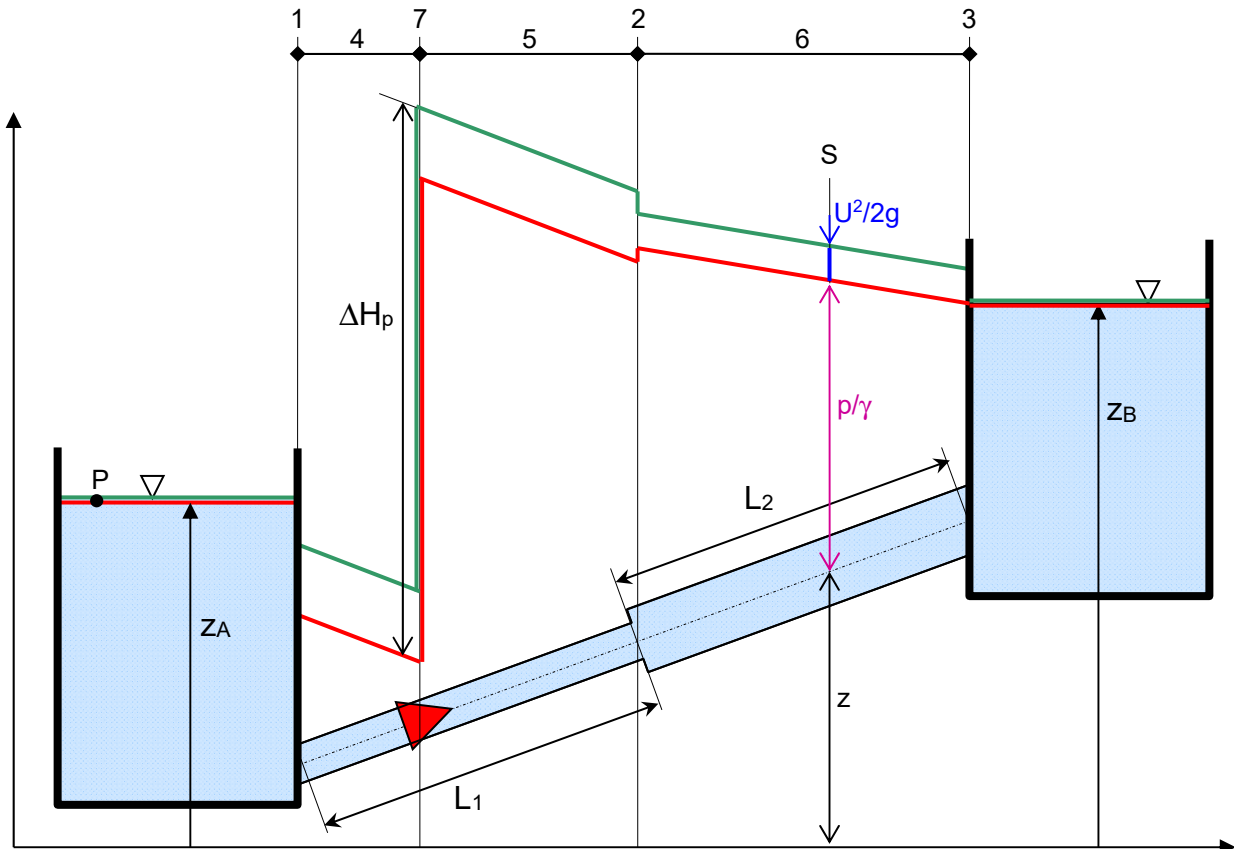


FIGURA 48

Applicando il risultato appena trovato al serbatoio B otteniamo: $H_B = h_B = z_B$. Possiamo ora scrivere l'equazione dell'impianto considerando le perdite di carico concentrate e distribuite presenti, e considerando la numerazione indicata nella figura:

$$H_A - H_B = \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_i}{2g\Omega_i^2} Q^2 + \sum_{j=4}^6 \frac{\beta_{tj}}{D_j^5} L_j Q^2 - \Delta H_p \quad (276)$$

Le perdite di carico concentrate saranno:

- $\Delta H_1 = \eta_1 \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2}$; con $\eta_1 = 0.5$: imbocco di una condotta a raso;
- $\Delta H_2 = \eta_2 \frac{Q^2}{2g\Omega_2^2}$; con $\eta_2 = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2$: perdita di carico per brusco allargamento;

- $\Delta H_3 = \eta_3 \frac{Q^2}{2g\Omega_2^2}$; con $\eta_3 = 1$: sbocco in un serbatoio.

Le perdite distribuite saranno:

- $\Delta H_4 = \beta_{r1} \frac{Q^2}{D_1^5} L'_1$; nel tratto 4 di diametro D_1 e area Ω_1 a monte della pompa;
- $\Delta H_5 = \beta_{r1} \frac{Q^2}{D_1^5} L''_1$; nel tratto 5 di diametro D_1 e area Ω_1 a valle della pompa;
- $\Delta H_6 = \beta_{r2} \frac{Q^2}{D_2^5} L_2$; nel tratto 6 di diametro D_2 e area Ω_2 .

Vale la pena osservare che le perdite di carico dovute al tratto di diametro D_1 possono essere considerate complessivamente, senza bisogno di distinguere i contributi sui tratti di lunghezza L'_1 ed L''_1 . Infatti, raccogliendo a fattor comune, troviamo: $\Delta H_4 + \Delta H_5 = \beta_{r1} \frac{Q^2}{D_1^5} (L'_1 + L''_1) = \beta_{r1} \frac{Q^2}{D_1^5} L_1$.

Infine dovremo conoscere l'equazione caratteristica della pompa posta nella sezione 7, che insieme all'equazione dell'impianto costituiscono il sistema di due equazioni nelle due incognite Q e ΔH_p che governa il funzionamento dell'impianto:

$$\begin{cases} \Delta H_p(Q) = \frac{\eta(Q)W_a(Q)}{\gamma Q} \\ H_A - H_B = \left\{ \frac{1}{2g} \left[\frac{0.5}{\Omega_1^2} + \frac{\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1\right)^2}{\Omega_2^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] + \frac{\beta_{r1}}{D_1^5} L_1 + \frac{\beta_{r2}}{D_2^5} L_2 \right\} Q^2 - \Delta H_p(Q) \end{cases}$$

Come descritto nel paragrafo precedente, il punto di funzionamento si trova intersecando la curva caratteristica dell'impianto con quella della pompa (Figura 47). Una volta nota la portata, tutte le perdite di carico e la prevalenza della pompa potremo tracciare la linea dei carichi totali e successivamente la linea piezometrica.

Esaminando la Figura 48 si può osservare che:

- la pendenza della linea dei carichi totali corrisponde proprio a $j = \beta_r Q^2 / D^5$ (equazione di Darcy (247)), quindi la linea sarà più ripida nei tratti a diametro minore;
- la linea piezometrica si trova più in basso rispetto alla linea dei carichi totali di una quantità uguale all'energia cinetica $U^2/2g$. Quindi poiché la portata, $Q = U\Omega$, è costante, le due linee sono più distanti nei tratti a diametro minore, ovvero dove la velocità del fluido è più alta.
- se consideriamo una generica sezione S (Figura 48), e ricordiamo che $H = z + p/\gamma + U^2/2g$, possiamo notare che z rappresenta la distanza tra la quota di riferimento $z=0$ e l'asse della condotta (parte nera nella sezione S), p/γ rappresenta la distanza tra l'asse della condotta e la linea piezometrica (segmento magenta in Figura 48) e $U^2/2g$ rappresenta la distanza tra la linea piezometrica e la linea dei carichi totali (segmento blu in Figura 48).

Analizzando il grafico delle linee del carico totale e piezometrica si ha quindi un quadro completo dei diversi elementi che caratterizzano lo stato del fluido in ogni sezione dell'impianto.

7. APPLICAZIONI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

7.1. Efflusso libero

Anche se non riguarda strettamente il moto di un fluido in una condotta in pressione, tratteremo in questa sede l'efflusso libero di un fluido da un serbatoio, che si affronta con una trattazione analoga a quella che si è vista nei paragrafi precedenti. Notiamo innanzitutto che possiamo dividere questi fenomeni in due grandi categorie: la prima comprende tutti quei casi nei quali il fluido effluisce in una zona nella quale è presente un fluido di pari densità, la seconda invece è costituita da quei casi nei quali l'efflusso avviene in un fluido di densità molto minore come, ad esempio quando dell'acqua effluisce in aria.

Quando un fluido effluisce in un fluido di pari densità (Figura 49), possiamo al solito individuare, immediatamente a valle dello sbocco, una sezione contratta, ed è lecito supporre che nel suo intorno il flusso sia quasi-unidimensionale; perciò la sezione contratta è regolare e su di essa il carico piezometrico è costante. Se consideriamo che nel serbatoio, lontano dall'imbocco, la velocità è con buona approssimazione nulla, possiamo prendere una qualsiasi sezione in questa zona come un caso limite di sezione regolare. Supponiamo, inizialmente, di poter trascurare le perdite di carico, utilizzando il teorema di Bernoulli nella sua seconda formulazione su una qualsiasi traiettoria tra queste due sezioni otteniamo, nel caso stazionario:

$$H_1 = H_c$$

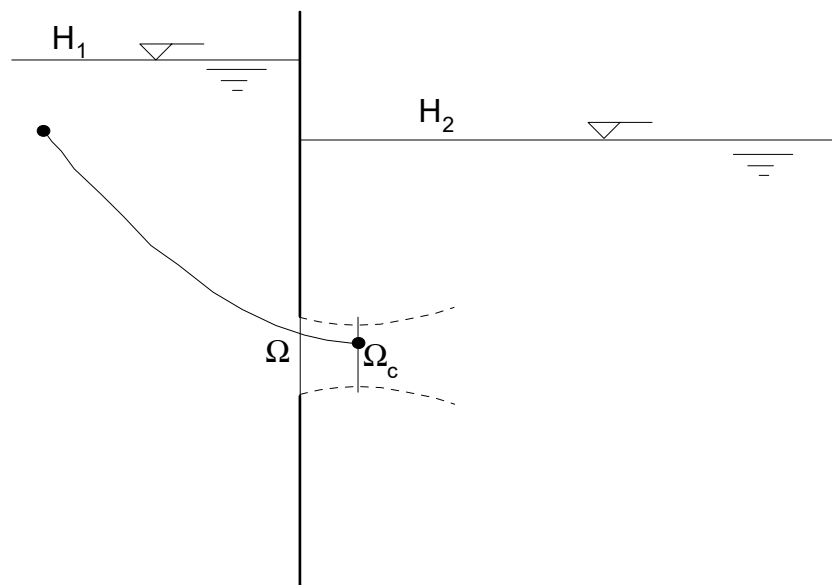


FIGURA 49

avendo indicato con H_1 il carico totale nel serbatoio e con H_c quello nella sezione contratta. Si ha dunque, essendo $U_1=0$:

$$h_1 = h_c + \frac{U_c^2}{2g}$$

dalla quale si ricava l'espressione della velocità:

$$U = \sqrt{2g(h_1 - h_c)} \quad (277)$$

che è detta *velocità Torricelliana* e coincide con quella che assumerebbe un grave cadendo da una altezza $h_1 - h_c$. Per tener conto delle perdite di carico dovute alla viscosità del fluido si introduce, come in precedenza, un coefficiente riduttore della velocità c_v :

$$U = c_v \sqrt{2g(h_1 - h_c)} \quad (278)$$

Per ottenere la portata è sufficiente moltiplicare per la sezione contratta: $\Omega_c = k \Omega$ (nella quale Ω è la sezione dell'apertura attraverso cui avviene l'efflusso e k il rapporto di contrazione):

$$Q = c_v k \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_c)} = c_Q \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_c)} \quad (279)$$

avendo introdotto, al solito, il coefficiente di portata $c_Q = k c_v$.

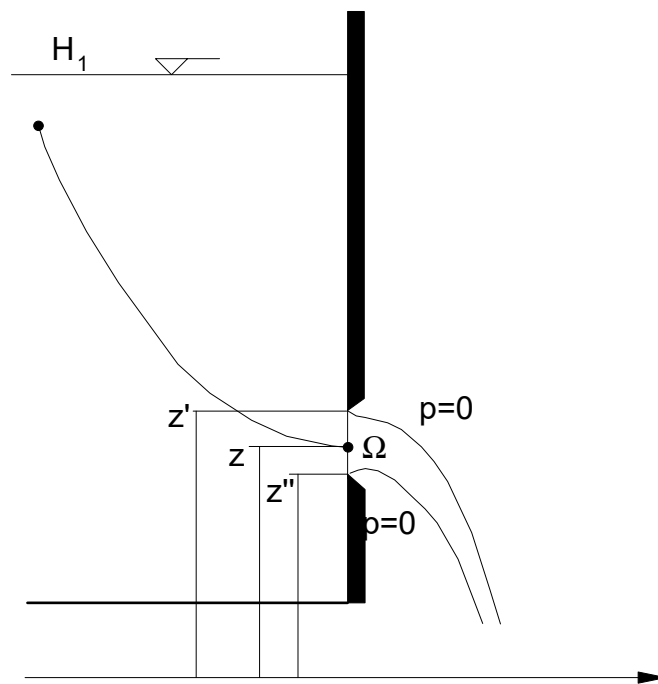


FIGURA 50

Se invece l'efflusso avviene in un fluido di densità molto minore, non è più possibile individuare una sezione contratta: il flusso è soggetto all'azione della forza di gravità e la vena curva verso il basso, continuando ad accelerare (Figura 50). Non esiste più una sezione nel cui intorno il flusso può più essere considerato quasi-unidimensionale poiché non sono trascurabili gli effetti della curvatura delle linee di corrente. Possiamo supporre però che in una sezione immediatamente a valle dello sbocco, sia la pressione ad essere costante. Se si fa riferimento all'efflusso di acqua in aria, la pressione relativa sarà nulla su tutta la sezione. In tale sezione quindi il carico piezometrico non è costante e quindi neanche la velocità. La velocità alla generica quota può essere ottenuta, come in precedenza, utilizzando la seconda formulazione del teorema di Bernoulli alla traiettoria

che collega una zona in quiete a carico piezometrico h_1 ed la generica quota z della sezione di sbocco:

$$\underbrace{h_1}_{\text{serbatoio}} = \underbrace{\frac{U^2}{2g}}_{\text{sbocco}} + z$$

da cui:

$$U(z) = c_v \sqrt{2g(h_1 - z)}. \quad (280)$$

Se la luce di sbocco ha una piccola estensione verticale, la portata può essere approssimata come:

$$Q = c_Q \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_m)} \quad (281)$$

nella quale c_Q tiene conto degli effetti della viscosità e h_m è il carico piezometrico medio sulla sezione di sbocco e coincide con il carico piezometrico alla quota del centro di figura di tale sezione. Se la luce di sbocco ha una rilevante estensione verticale è necessario procedere invece per integrazione:

$$Q = \int_{z'}^{z''} U(z) b(z) dz \quad (282)$$

nella quale z' e z'' indicano le quote minima e massima della luce e $b(z)$ indica la larghezza della luce in funzione della quota.

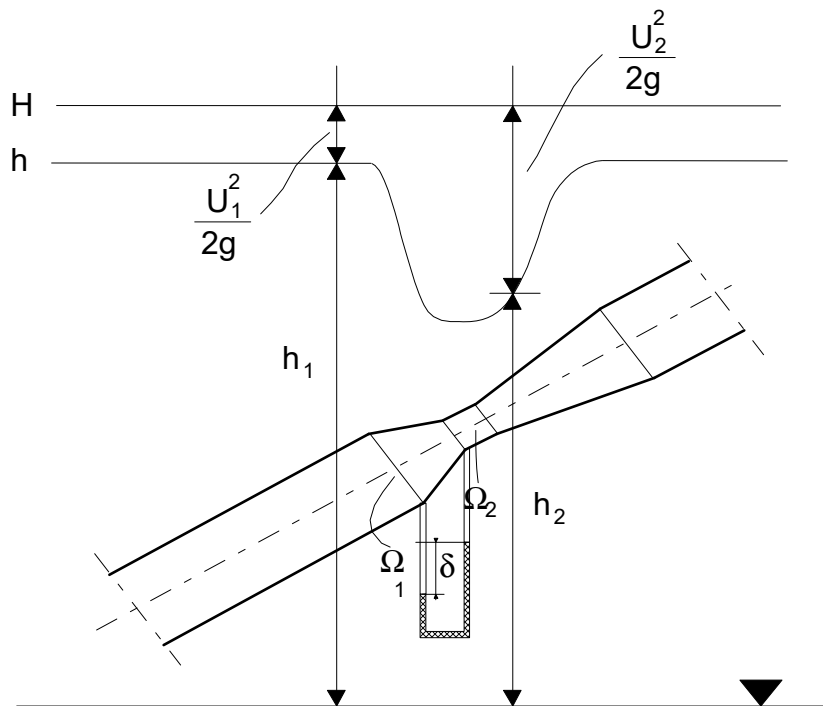


FIGURA 51

7.2. Venturimetro e altri misuratori di portata

La portata effluente attraverso una condotta può essere misurata attraverso la valutazione della differenza di carico piezometrico determinata in un venturimetro, ovvero un restringimento di sezione da Ω_1 ad Ω_2 con un raccordo sia a monte sia a valle in modo da ridurre al massimo i fenomeni dissipativi (Figura 51). Al fine di evitare la presenza di zone di ricircolazione nella fase di espansione del flusso il divergente risulta più lungo del convergente. Supponiamo che sia Ω_1 che Ω_2 siano sezioni regolari. Indicata con Q la portata, l'equazione di continuità fornisce:

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2.$$

Se il condotto è ben raccordato e consideriamo due sezioni sufficientemente vicine da poter trascurare anche le perdite di carico distribuite, dovute agli sforzi tangenziali alla parete, possiamo ipotizzare che sulle due sezioni il carico totale sia lo stesso: $H_1 = H_2$, ovvero:

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

da cui, utilizzando l'equazione di continuità per sostituire le velocità: $U_1 = Q/\Omega_1$, $U_2 = Q/\Omega_2$, si ottiene dopo alcuni passaggi algebrici:

$$Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - 1}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}, \quad (283)$$

e, definendo un *coefficiente di portata*:

$$c_Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - 1}}$$

la relazione tra differenza di carico piezometrico e portata diventa:

$$\boxed{Q = c_Q \Omega_1 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}} \quad (284)$$

che rappresenta l'equazione di taratura per il venturimetro.

Sostituendo nella precedente l'equazione del manometro differenziale (213) si ottiene infine la portata in funzione della lettura manometrica δ :

$$Q = c_Q \Omega_1 \sqrt{2g \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \delta}. \quad (285)$$

Nel caso le perdite di carico abbiano un effetto non trascurabile, la portata sarà inferiore a quella ora calcolata, a parità di differenza di carico piezometrico. Si definisce allora il coefficiente di portata come:

$$c_Q = \frac{c_v}{\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - 1}}, \quad (286)$$

nella quale c_v è un coefficiente compreso tra 0 ed 1 che rappresenta l'effetto delle perdite di carico. Per un venturimetro questo coefficiente assume valori dell'ordine di 0.98.

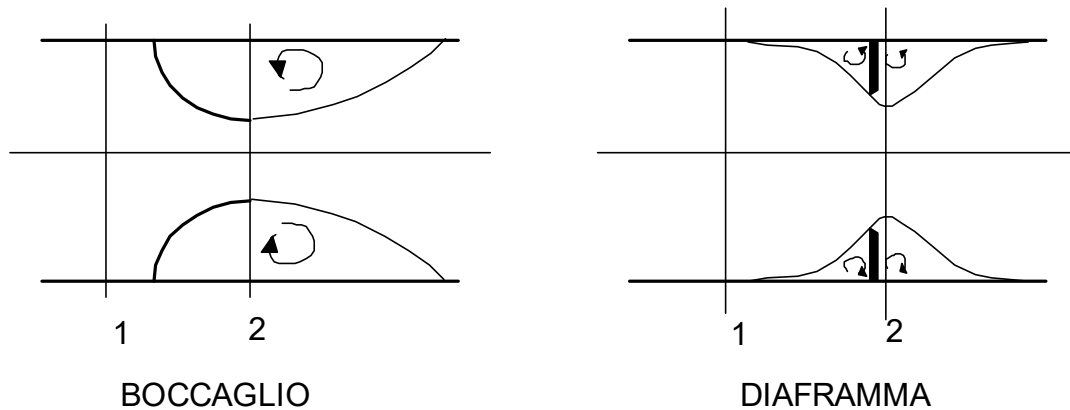


FIGURA 52

Se si accetta di introdurre delle perdite di carico più consistenti è possibile utilizzare anche dei dispositivi più semplici e compatti per la misura della portata come ad esempio i boccagli ed i diaframmi, che introducono comunque un restringimento nella condotta, ma senza i raccordi che impediscono il generarsi di fenomeni dissipativi (Figura 52). Valori tipici di tale coefficiente sono: $c_v = 0.6$ per i diaframmi e $c_v = 0.95$, per i boccagli, che sono meglio raccordati.

7.3. Spinte di getti

Utilizzando l'equazione globale di bilancio della quantità di moto si può determinare la spinta che un getto genera quando incontra una parete piana. Consideriamo un getto di un fluido di densità ρ (per esempio acqua) che urti contro una parete con una velocità iniziale uniforme pari ad U , ed inclinata di un angolo θ rispetto alla normale alla superficie (Figura 53). Formuliamo le seguenti ipotesi:

- fluido incompressibile;
- moto stazionario;
- forze viscosi trascurabili ($Re \gg 1$);
- peso del fluido trascurabile ($Fr \gg 1$).

Se si trascurano gli effetti della viscosità gli sforzi tangenziali alla parete sono anch'essi trascurabili, quindi, le uniche forze che il fluido esercita sulla parete sono le pressioni, che agiscono in direzione normale alla parete. Pertanto possiamo concludere che anche la loro risultante sarà normale alla parete. Consideriamo il volume di controllo, V_c , colorato d'azzurro nella Figura 53, delimitato dalle sezioni Ω_1 , Ω_2 di cui si vedono le tracce Ω_2' e Ω_2'' in figura, dalla superficie laterale del getto Ω_L e dalla superficie di contatto con la parete, Ω_s e applichiamo a questo volume l'equazione globale di bilancio della quantità di moto (127), proiettata nella direzione in cui sappiamo agire la risultante $\mathbf{F}$ delle forze che il fluido esercita sulla parete, ovvero in direzione della normale alla parete, $\mathbf{n}_s$.

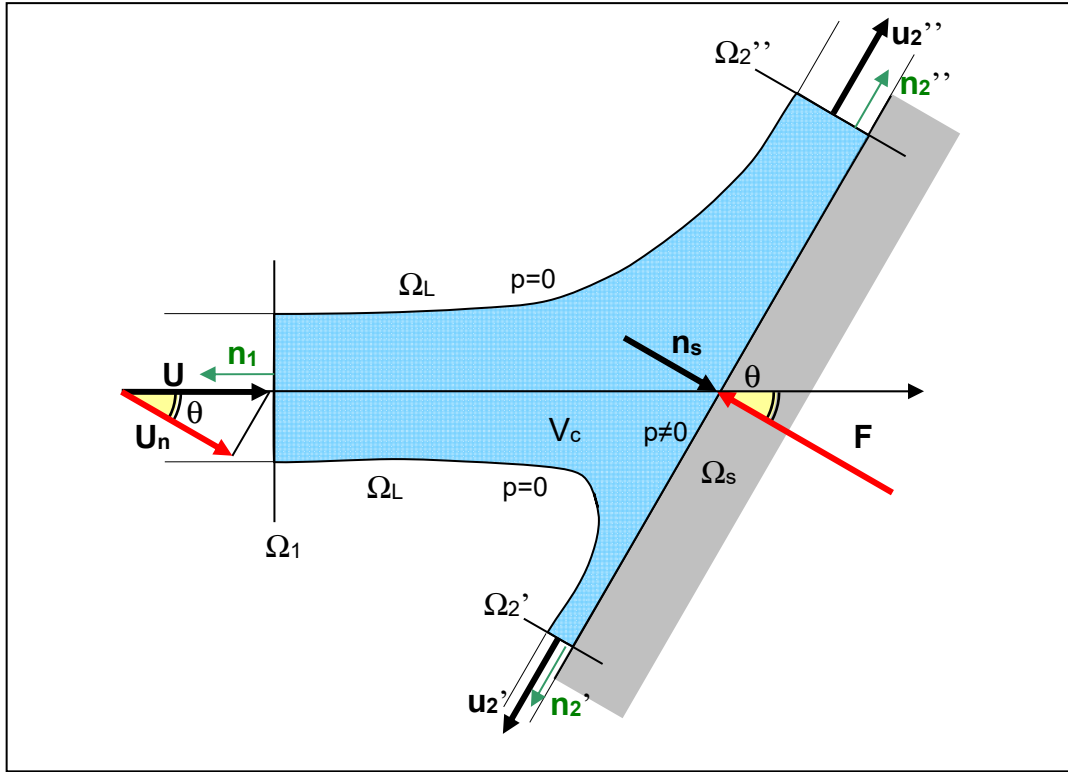


FIGURA 53

L'equazione, nella sua forma generale sarà:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_s = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}_s$$

$\mathbf{I} = \mathbf{0}$ poiché rappresenta la variazione nell'unità di tempo della quantità di moto contenuta nel volume di controllo la quale, per l'ipotesi di stazionarietà non varia nel tempo. $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ per l'ipotesi di peso del fluido trascurabile. Il secondo termine rappresenta il flusso di quantità di moto attraverso la superficie del volume di controllo e può essere scomposto in cinque contributi uno per ogni porzione della quale si compone la superficie del volume di controllo:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_s = \int_{S_c} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \cdot \mathbf{n}_s = M_1 + M_2 + M_3 + M_L + M_s \quad (287)$$

Calcoliamo il valore dei singoli contributi: sulla superficie Ω_1 la velocità di ingresso è opposta alla normale $\mathbf{n}_1$ alla superficie, e in modulo pari ad U , quindi avremo:

$$M_1 = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1) dS \cdot \mathbf{n}_s = \int_{\Omega_1} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1) dS = \int_{\Omega_1} \rho (U \cos \theta) (-U) dS = -\rho U^2 \cos \theta \Omega_1;$$

sulla superficie Ω_2 (di cui possiamo vedere nel disegno le 2 tracce, Ω_2' e Ω_2'') la velocità è diretta parallelamente alla parete, e perciò ortogonale ad $\mathbf{n}_s$, per questo motivo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s = 0$ su tutta la superficie:

$$M_2 = \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2) dS \cdot \mathbf{n}_s = \int_{\Omega_2} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2) dS = 0.$$

Perciò M_2 risulta nullo. Risultano nulli anche i termini M_L ed M_s poiché le superficie Ω_L ed Ω_s non sono attraversate dal fluido ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{L;s} = 0$) e non c'è quindi neanche flusso di quantità di moto attraverso di esse:

$$M_{L;s} = \int_{\Omega_{L;s}} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{L;s}) dS \cdot \mathbf{n}_s = \int_{\Omega_{L;s}} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{L;s}) dS = 0.$$

Il termine di flusso di quantità di moto si riduce quindi a:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_s = M_1 = -\rho U^2 \cos \theta \Omega_1.$$

Anche la risultante delle forze che agiscono sulla superficie del volume di controllo può essere scomposta in cinque contributi, nei quali, avendo trascurato gli sforzi viscosi, dobbiamo tenere conto soltanto del contributo delle pressioni:

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_s = \int_{S_c} -p \mathbf{n} dS \cdot \mathbf{n}_s = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_L + \Pi_s \quad (288)$$

La superficie laterale del getto, Ω_L , è a contatto con l'atmosfera, quindi su di essa la pressione è nulla: $\Pi_L = 0$. Anche sulla superficie Ω_1 , che ha tutto il contorno a contatto con l'atmosfera, possiamo ipotizzare, con buona approssimazione, che la pressione sia nulla, dunque $\Pi_1 = 0$. Nel caso della superficie Ω_2 invece abbiamo che la pressione non darà contributo poiché agisce in direzione normale ad $\mathbf{n}_s$ ($\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_s = 0$). Quindi $\Pi_2 = 0$. Infine dobbiamo considerare Π_s , ovvero la risultante delle forze che la parete solida esercita sul fluido contenuto nel volume di controllo (le forze esterne che agiscono su Ω_s). Questa, per il principio di azione e reazione, è uguale ed opposta alla risultante delle forze che il fluido esercita sulla parete solida, ovvero ad $\mathbf{F}$, che è l'incognita del problema. Quindi avremo $\Pi_s = -\mathbf{F}$. In conclusione, la risultante delle forze che agiscono sulla superficie del volume di controllo, proiettata in direzione della normale alla parete risulta:

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_s = -\mathbf{F}.$$

Sostituendo tutti i termini nell'equazione globale otteniamo infine il valore cercato: $\boxed{F = \rho U^2 \cos \theta \Omega_1}$.

8. MOTI POTENZIALI

8.1. Equazione della vorticità

Cerchiamo un'equazione che ci permetta di analizzare l'evoluzione della vorticità, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, di una particella fluida durante il suo moto. Per ottenerla, dovremo quindi scrivere un'equazione nella quale compaia una derivata Lagrangiana della vorticità, che rappresenta appunto la variazione nel tempo seguendo un elemento materiale del fluido. Per ottenerla limitiamo la nostra trattazione ai fluidi incompressibili e calcoliamo il rotore dell'equazione dell'energia meccanica (179):

$$\underbrace{\nabla \times \mathbf{u}}_I, \underbrace{\nabla \times (\mathbf{g} \nabla H)}_{II} = \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})}_{III} + \underbrace{\nabla \times (\nu \nabla^2 \mathbf{u})}_{IV}. \quad (289)$$

Nel termine I la derivata temporale può essere scambiata con l'operatore di rotore ottenendo:

$$\nabla \times \mathbf{u},_t = (\nabla \times \mathbf{u}),_t = \boldsymbol{\omega},_t \quad (290)$$

Il termine II si annulla perché il rotore di un gradiente è sempre nullo ($\text{rot}(\text{grad}(\bullet)) = 0$). Il terzo termine (III) può essere sviluppato ricordando la formula del doppio prodotto vettoriale (175), questa volta con l'operatore nabla che agisce su entrambi gli altri termini:

$$\begin{aligned} \left[\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \right]_i &= (a_j c_j) b_i - (a_j b_j) c_i = \frac{\partial (u_i \omega_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial (u_j \omega_i)}{\partial x_j} = \\ &= u_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} + \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \\ &= \left[\underbrace{\mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})}_{=0} + (\nabla \mathbf{u}^t) \boldsymbol{\omega} - (\nabla \boldsymbol{\omega}^t) \mathbf{u} - \underbrace{\boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} \right]_i \end{aligned} \quad (291)$$

avendo utilizzato il fatto che la divergenza di un rotore è sempre nulla ($\text{div}(\text{rot}(\bullet)) = 0$) e ricordando che l'equazione di continuità per un fluido incompressibile si riduce a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Nel quarto termine (IV) possiamo scambiare l'operatore di rotore con il Laplaciano, che è un operatore lineare:

$$\nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 (\boldsymbol{\omega}) \quad (292)$$

Sostituendo tutti i termini nell'equazione precedente otteniamo:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega},_t + (\nabla \boldsymbol{\omega}^t) \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u}^t) \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}}; \quad (293)$$

la quale, riconoscendo nel primo membro l'espressione della derivata Lagrangiana della vorticità, diventa:

$$\boxed{\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\nabla \mathbf{u}^t) \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}}; \quad (294)$$

che è la cercata *equazione della vorticità* per un fluido incomprimibile.

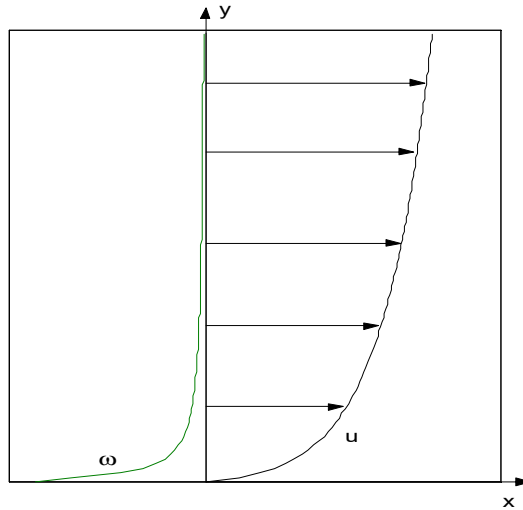


FIGURA 54

Consideriamo un moto che, ad un certo istante, sia *irrotazionale*, ovvero $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ in tutto il campo; in queste condizioni il primo termine a secondo membro dell'equazione della vorticità si annulla. Perciò, l'unico termine che può determinare una generazione di vorticità è quello legato alla viscosità. Questo è un termine *diffusivo*, che tende a far propagare la viscosità anche a porzioni di fluido inizialmente irrotazionali. Se prendiamo ad esempio un fluido, inizialmente a riposo, che lambisce una parete, esso sarà inizialmente irrotazionale, poi nascerà una vorticità in prossimità della parete a causa dei gradienti di velocità imposti dalla condizione di aderenza ($\omega_z = u_{y,x} - u_{x,y} = -u_{x,y}$ nell'esempio di Figura 54). Successivamente la vorticità verrà distribuita, per trasporto e diffusione, in tutto il campo. In assenza della viscosità verrebbe a mancare la condizione di aderenza ed i conseguenti gradienti di velocità con la vorticità loro associata. Il flusso rimarrebbe quindi irrotazionale. *Si deduce quindi che il moto di un fluido incomprimibile, a viscosità trascurabile ($Re \gg 1$) che sia inizialmente irrotazionale, rimane irrotazionale.*

8.2. Formulazione del problema

8.2.1. Moti irrotazionali

Si è già osservato che, nella maggior parte dei casi, il sistema di equazioni differenziali che caratterizza un problema fluidodinamico:

$$\begin{cases} \frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases}$$

non può essere risolto per via analitica; anche la soluzione per via numerica, per mezzo di elaboratori elettronici, presenta delle difficoltà spesso insormontabili a causa dell'onerosità dei calcoli e della non linearità delle equazioni di Navier-Stokes. Esiste però una classe di problemi caratterizzata da un sistema di equazioni considerevolmente più agevole da risolvere: i *flussi potenziali*. Questa classe di flussi è caratterizzata dalle seguenti ipotesi:

- moto stazionario; $\bullet_{,t} = 0$;
- flusso irrotazionale: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$;
- fluido incomprimibile: $\rho = \text{cost.}$;
- effetti della viscosità trascurabili: $Re \gg 1$.

Naturalmente l'assunzione dell'ipotesi di irrotazionalità che, da un punto di vista formale, è sufficiente a impostare il problema, non lo è da un punto di vista fisico né tantomeno ingegneristico; per capire se essa sia applicabile nella risoluzione di un problema concreto, sarà necessario sapere sotto quali condizioni fisiche l'ipotesi sia effettivamente verificata. L'irrotazionalità, infatti, è un'ipotesi di carattere cinematico, quindi qualsiasi flusso di qualsiasi fluido può, in linea di principio, essere irrotazionale in qualche istante di tempo, ciò nondimeno, l'ipotesi è accettabile nell'affrontare un problema solo se il flusso *rimane* irrotazionale anche nel successivo sviluppo del fenomeno. L'equazione della vorticità (294) ci permette però di concludere che quando gli effetti della viscosità sono trascurabili, un campo di moto inizialmente irrotazionale rimane irrotazionale anche nella sua successiva evoluzione. Garantendo quindi la consistenza fisica dell'ipotesi di irrotazionalità.

Nella trattazione successiva, per semplicità e linearità di esposizione ci limiteremo a considerare il caso in cui $Fr \gg 1$, ovvero effetti del peso del fluido trascurabili, e studieremo solo flussi bidimensionali.

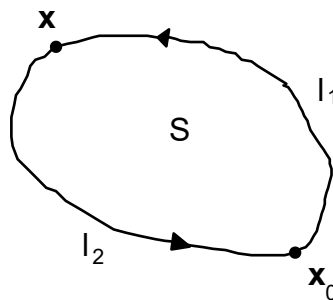


FIGURA 55

8.2.2. Potenziale

Consideriamo, nel dominio di studio, una linea orientata, L , che costituisce il bordo di una superficie S ed identifichiamo su tale linea due punti: x_0 ed x (Figura 55). La circolazione lungo tale linea è:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}; \quad (295)$$

esprimiamola per mezzo del teorema di Stokes (39):

$$\oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0}, \quad (296)$$

per l'ipotesi di irrotazionalità. L'integrale di linea può essere spezzato in due contributi, uno lungo la linea L_1 e l'altro lungo la linea L_2 :

$$0 = \int_{x_0, L_1}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{x, L_2}^{x_0} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_0, L_1}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} - \int_{x_0, L_2}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (297)$$

quindi l'integrale calcolato lungo la linea L_1 è uguale a quello calcolato lungo la linea L_2 . Avendo però scelto il circuito, L , e quindi L_1 ed L_2 , in modo arbitrario, si può concludere che l'integrale $\int_{x_0}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$ è indipendente dal percorso scelto per giungere da x_0 a x . In altre parole $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$ è un differenziale esatto. Pertanto, fissato x_0 , possiamo definire la funzione:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}} \quad (298)$$

detta *potenziale del campo di velocità*. Quindi il campo di velocità, avendo rotore nullo è un campo conservativo ed ammette potenziale. Tale funzione potenziale è legata al campo di velocità dalla relazione:

$$\boxed{\mathbf{u} = \nabla \varphi} \quad (299)$$

8.2.3. Equazione di Laplace

Utilizziamo ora l'ipotesi che la comprimibilità del fluido non giochi un ruolo significativo nel fenomeno che si sta studiando. Se $\rho = \text{cost.}$ l'equazione di conservazione della massa si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

la quale, espressa in termini di potenziale, diventa:

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} = \varphi_{,ii} = 0.} \quad (300)$$

Questa, nota come *equazione di Laplace*, è una equazione in una incognita e può essere risolta indipendentemente dalle equazioni di Navier-Stokes, una volta che siano note le condizioni al contorno. In questo caso, dunque, possiamo risolvere prima il problema cinematico, attraverso l'equazione di Laplace e, una volta noto il potenziale e quindi il campo di velocità, risolvere il problema dinamico utilizzando l'equazione dell'energia meccanica.

Bisogna osservare infine che l'equazione (300) è un'equazione differenziale *lineare*: perciò se φ_1 e φ_2 sono soluzioni, anche qualsiasi loro combinazione lineare, $\varphi = a \varphi_1 + b \varphi_2$, lo è. Quindi possiamo studiare una serie di soluzioni elementari le quali, combinate tra loro, possono fornirci la soluzione di ampi insiemi di problemi.

8.2.4. Condizioni al contorno

In generale è possibile assegnare al contorno del dominio in cui scorre un fluido due tipi di condizioni:

- una condizione *dinamica*, la quale richiede che il fluido non scivoli sul contorno solido, e che quindi la velocità relativa tra contorno e fluido si annulli sulla superficie di contatto (*condizione di aderenza*). Questa condizione tiene conto degli effetti della viscosità del fluido;

- una condizione *cinematica*, che richiede che il contorno non sia attraversato dal fluido, e che quindi la componente normale della velocità sia nulla sul contorno (*condizione di impermeabilità*).

Nel caso in esame, non avendo considerato gli effetti della viscosità, dobbiamo poter ammettere che il fluido scorra liberamente rispetto alle pareti con le quali è a contatto. Non potremo utilizzare la condizione di aderenza, ma utilizzeremo la condizione di impermeabilità. L'equazione di Laplace è del secondo ordine: le condizioni al contorno richieste saranno due. Se consideriamo, ad esempio, il flusso attorno ad un corpo, si imporrà la condizione di impermeabilità sulla superficie del corpo e l'altra condizione sarà invece utilizzata per descrivere le caratteristiche del flusso infinitamente lontano dal corpo, lì dove il flusso non è perturbato dalla presenza del corpo stesso.

8.2.5. Equazione dell'energia meccanica

Per chiudere il problema dal punto di vista dinamico, non è necessario utilizzare le equazioni di Navier-Stokes, ma è sufficiente osservare, che il teorema di Bernoulli nella sua prima formulazione afferma che, sotto le ipotesi sopra enunciate, il carico totale si mantiene costante:

$$\nabla H = 0.$$

Da questa, noto il campo di velocità, è possibile ricavare quello della pressione. Avendo scelto di considerare il peso del fluido trascurabile, il termine in z può non essere considerato e il bilancio di energia meccanica si riduce a:

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{cost}} \quad (301)$$

8.2.6. Funzione di corrente

Nel caso di campi bidimensionali, come quelli a cui abbiamo scelto di limitare il nostro studio, è possibile definire, a partire dall'ipotesi di incomprimibilità, una seconda funzione che caratterizza un flusso potenziale. Per farlo consideriamo un flusso nel quale nessuna grandezza dipenda da una delle variabili spaziali. Il campo di moto su ogni piano ortogonale a questo asse è quindi uguale agli altri. Possiamo quindi studiare il fenomeno su uno solo di questi piani e considerarlo rappresentativo dell'intero campo. Dotiamo inoltre il piano di un verso positivo per gli angoli, quello antiorario.

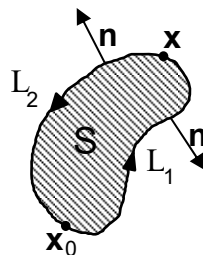


FIGURA 56

Consideriamo quindi una linea chiusa orientata L , e due punti, $\mathbf{x}_0$ ed $\mathbf{x}$, su di essa (Figura 56). Grazie all'equazione di continuità ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) ed al teorema di Green possiamo scrivere:

$$0 = \int_S (\nabla \cdot \mathbf{u}) dS = \oint_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

e spezzando l'integrale in due parti:

$$0 = \oint_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathbf{x}_0, L_1}^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathbf{x}, L_2}^{\mathbf{x}_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

la quale può anche essere riscritta come:

$$\int_{\mathbf{x}_0, L_1}^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathbf{x}_0, L_2}^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds ,$$

che stabilisce che il flusso (per unità di lunghezza lungo l'asse z) attraverso una linea L dipende solo dagli estremi e non dalla forma della linea stessa. Inoltre, essendo l'integrale indipendente dal percorso seguito, $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})ds$ è un differenziale esatto. Fissato $\mathbf{x}_0$ una volta per tutte, possiamo perciò definire la *funzione di corrente*, come:

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds} \quad (302)$$

La funzione di corrente assume questo nome in quanto gode della proprietà di essere costante sulle linee di corrente; per dimostrarlo consideriamo le due linee di corrente che passano per i punti $\mathbf{x}_0$ ed $\mathbf{x}_1$, e calcoliamo la funzione di corrente in un generico punto, $\mathbf{x}_2$, sulla linea di corrente che passa per $\mathbf{x}_1$ (Figura 57). Spezziamo l'integrale in due parti: la prima tra $\mathbf{x}_0$ ed $\mathbf{x}_1$, la seconda tra $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$,

$$\psi(\mathbf{x}_2) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \psi(\mathbf{x}_1),$$

$\psi(\mathbf{x}_1) \quad = 0$

il primo integrale coincide con la $\psi(\mathbf{x}_1)$ mentre l'integrale calcolato lungo la linea di corrente, tra $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$, dà contributo nullo poiché, essendo la velocità sempre tangente alla linea di corrente, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ lungo tutto il percorso.

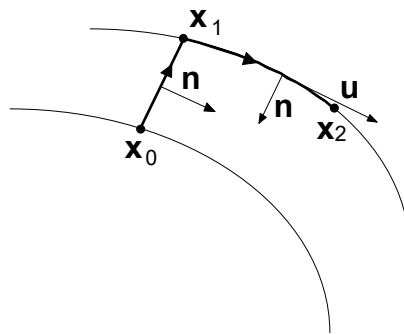


FIGURA 57

Osserviamo inoltre che, come lemma di questo ragionamento, possiamo affermare che *il flusso volumetrico attraverso qualsiasi sezione individuata dalle stesse due linee di corrente è costante*.

Ricaviamo infine la relazione che sussiste tra funzione di corrente e velocità. Calcoliamo il flusso totale attraverso il circuito infinitesimo, L , di Figura 58 che, utilizzando il teorema della divergenza in due dimensioni, può essere ricondotto all'integrale della divergenza sulla superficie racchiusa, S , la quale, per l'equazione di continuità, è nulla:

$$\int_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = -u_y dx + u_x dy - d\psi = \int_S \nabla \cdot \mathbf{u} dS = 0,$$

dalla quale possiamo ricavare il differenziale:

$$d\psi = (-u_y)dx + (u_x)dy;$$

d'altra parte:

$$d\psi = (\psi_{,x})dx + (\psi_{,y})dy$$

ed essendo ψ un differenziale esatto, possiamo eguagliare i termini racchiusi tra parentesi che moltiplicano gli incrementi dx e dy :

$$\begin{cases} u_x = \psi_{,y} \\ u_y = -\psi_{,x} \end{cases} \quad (303)$$

che sono le relazioni cercate. Confrontando queste relazioni con quelle che legano il potenziale alla velocità, si può facilmente ricavare che $\nabla\psi \cdot \nabla\phi = 0$, di conseguenza anche le linee iso-potenziale sono ortogonali alle linee di corrente.

Per esprimere le stesse relazioni in coordinate polari è sufficiente fare riferimento all'espressione del gradiente in tale sistema di coordinate:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (304)$$

Avremo infatti, scambiando le componenti e cambiando di segno la seconda componente:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \psi_{,\theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\psi_{,r} \end{cases} \quad (305)$$

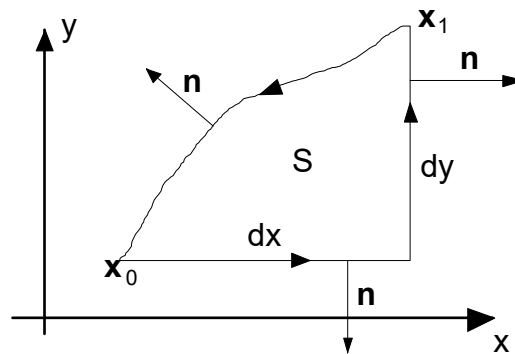


FIGURA 58

8.3. Soluzioni particolari

8.3.1. Flusso uniforme

Consideriamo un flusso uniforme ed indichiamo con $\mathbf{u}_\infty$ la velocità del fluido indisturbato. Dato un sistema di assi cartesiani orientato in modo che l'asse x coincida con la direzione del flusso, il vettore $\mathbf{u}$ sarà, ovviamente:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_\infty \\ 0 \end{pmatrix};$$

Ricordando che il campo di velocità è dato dal gradiente del potenziale:

$$\begin{cases} u_x = \phi_{,x} = u_\infty \\ u_y = \phi_{,y} = 0 \end{cases} \quad (306)$$

la seconda equazione indica che il potenziale non dipende da y , ed è dunque solo funzione di x . Integrando la prima equazione sulla scorta della precedente considerazione si ha il potenziale del flusso uniforme:

$$\boxed{\phi = u_\infty x} \quad (307)$$

la quale soddisfa in modo banale l'equazione di Laplace. La funzione di corrente si ottiene ricordando le relazioni tra velocità e funzione di corrente:

$$\begin{cases} u_x = \psi_{,y} = u_\infty \\ u_y = -\psi_{,x} = 0 \end{cases} \quad (308)$$

La seconda ci permette di concludere che la funzione di corrente non dipende da x , ed integrando la prima e ponendo uguale a zero la costante di integrazione arbitraria, otteniamo:

$$\boxed{\psi = u_\infty y} \quad (309)$$

8.3.2. Sorgente lineare

Consideriamo il campo di velocità generato da una sorgente lineare distribuita lungo una retta, S , ortogonale al piano x - y . Supponiamo perciò che su questa retta l'equazione di conservazione della massa, ovvero $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, non sia rispettata. Per continuare ad utilizzare la trattazione fin qui enunciata dovremo escludere quindi questa retta dal dominio di studio. In questo caso ci si trova ad avere a che fare con un problema a simmetria assiale: un osservatore che si trova in un generico punto, P , dello spazio può costruire una unica entità geometrica: la distanza, r , tra la retta ed il punto P .

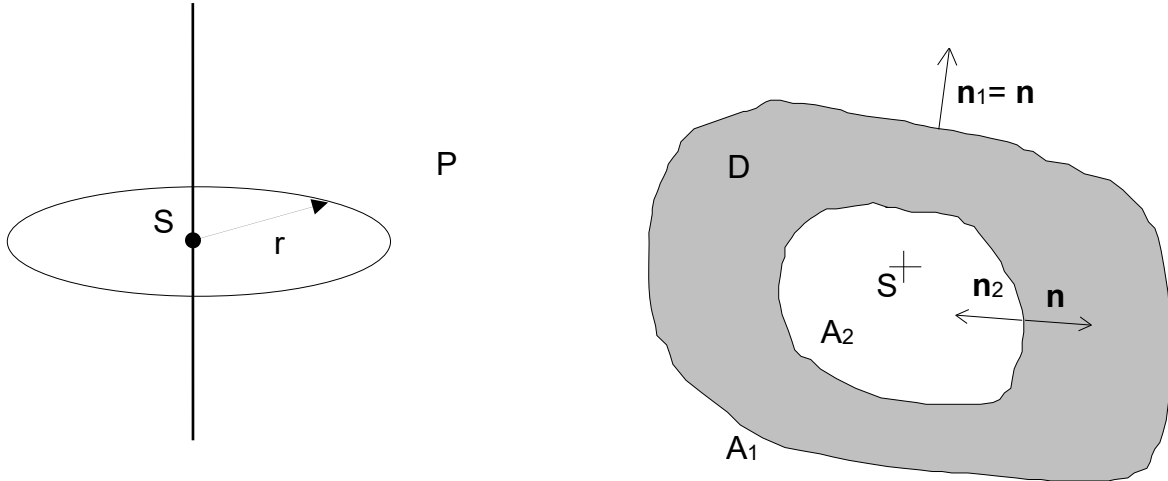


FIGURA 59

Indicato il raggio vettore che collega la retta al generico punto P con $\mathbf{r}$, il potenziale potrà essere solo funzione del modulo di $\mathbf{r}$: $\varphi = \varphi(r)$. Quindi il campo di velocità, espresso in coordinate cilindriche avrà la forma:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (310)$$

Per studiare il campo di moto è sufficiente considerare il generico piano x-y ortogonale alla retta S. Infatti, essendo la sorgente uniforme per tutta la sua lunghezza nulla varia tra le diverse sezioni di S, ed il campo di velocità è sempre contenuto nelle sezioni ortogonali. Ci possiamo quindi ricondurre ad un caso bidimensionale. Appliciamo il teorema di Green ad un dominio, D, che circonda la sorgente S, e sia delimitato da 2 linee L_1 e L_2 (Figura 27):

$$0 = \int_D \nabla \cdot \mathbf{u} dA = \int_{L_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 ds + \int_{L_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 ds.$$

Sostituendo in entrambi gli integrali la normale, $\mathbf{n}$, esterna rispetto ad S ($\mathbf{n}$ è concorde con $\mathbf{n}_1$ e discorde con $\mathbf{n}_2$), si conclude che il flusso calcolato attraverso la linea L_1 è uguale a quello attraverso la linea L_2 :

$$\int_{L_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{L_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (311)$$

e quindi il flusso attraverso una qualsiasi linea che circonda S è lo stesso. Indichiamo dunque il flusso volumetrico (per unità di lunghezza) della sorgente con m e calcoliamolo su di una circonferenza di raggio r , sulla quale, a causa della simmetria cilindrica del problema e della (310) la velocità sarà costante e diretta come la normale:

$$m = \oint \mathbf{u}(r) \cdot \mathbf{n} ds = 2\pi r u(r), \quad (312)$$

Da quest'ultima possiamo ricavare il campo di velocità:

$$\boxed{\begin{aligned} u_r(r) &= \frac{m}{2\pi r} \\ u_\theta &= u_z = 0 \end{aligned}} \quad (313)$$

Le linee di corrente sono quindi un fascio di rette che passa per l'origine (Figura 60).

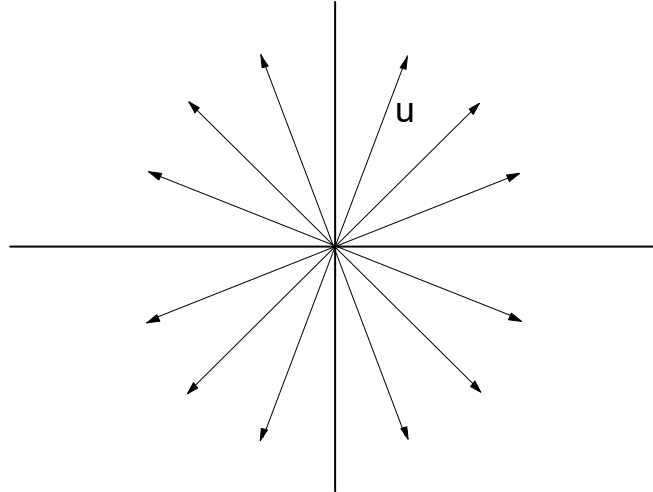


FIGURA 60

Ricordando l'espressione del gradiente in coordinate polari, $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ diventa:

$$\begin{cases} u_r = \varphi_{,r} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} \end{cases} \quad (314)$$

Il potenziale si ottiene integrando la prima delle (314):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_r(r) = \frac{m}{2\pi r} \Rightarrow \varphi = \frac{m}{2\pi} \ln(r) + k(\theta)$$

e dovendo essere funzione della sola r si può concludere che $k = \text{cost}$ e:

$$\boxed{\varphi = \frac{m}{2\pi} \ln(r)}. \quad (315)$$

avendo posto la costante arbitraria $k = 0$. La funzione di corrente invece, richiedendo la definizione di un verso positivo degli angoli, può essere anche funzione di θ . Integrando la prima delle (305):

$$u_r = \frac{1}{r} \psi_{,\theta} = \frac{m}{2\pi r},$$

si ottiene:

$$\boxed{\psi = \frac{m}{2\pi} \theta} \quad (316)$$

avendo, al solito, posto uguale a zero la costante di integrazione arbitraria.

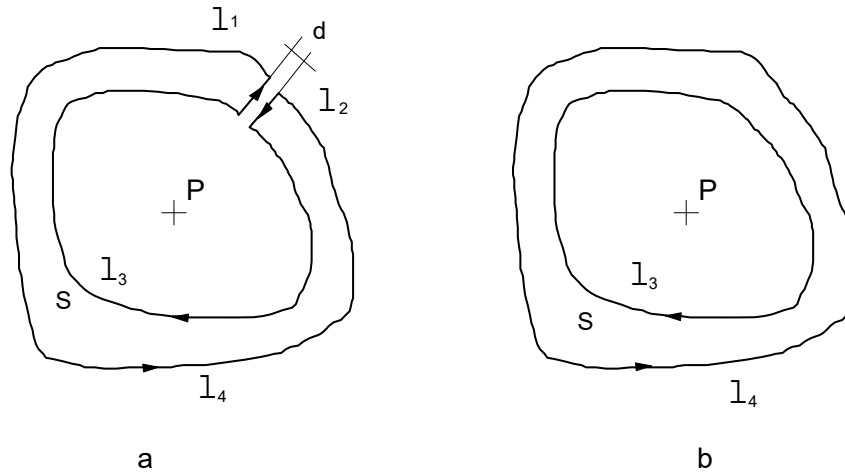


FIGURA 61

8.3.3. Vortice

Si consideri un dominio bidimensionale dotato di un verso positivo degli angoli α , che è lo stesso, di una regola della mano destra e si introduca in esso una sconnessione, P, nella quale si ammette che $\omega \neq 0$. Calcoliamo su di una linea l come quella rappresentata in Figura 61a la circolazione:

$$\oint_l \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{l_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{l_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{l_3} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{l_4} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (317)$$

essendo nulla la vorticità in ogni punto del dominio S. Se ora facciamo tendere a zero la distanza d i segmenti l_1 ed l_2 tendono a coincidere tranne per il fatto di essere percorsi in verso opposto e gli integrali sui segmenti danno contributi uguali ed opposti e si elidono. Rimangono gli altri due integrali, la cui somma è quindi nulla (Figura 61b):

$$\oint_{l_3} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{l_4} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = -\Gamma_3 + \Gamma_4 = 0$$

avendo indicato con Γ_3 e Γ_4 la circolazione $\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$, calcolata in senso antiorario, rispettivamente sulle linee l_3 ed l_4 . Poiché $\Gamma_3 = \Gamma_4$ e le due linee sono state scelte in modo arbitrario, quindi si può concludere che la circolazione su qualsiasi linea che circonda la sconnessione P è la stessa: la circolazione è quindi una caratteristica propria della sconnessione. Calcoliamola dunque su di una circonferenza, imponendo un campo di velocità dipendente solo da r (problema a simmetria cilindrica):

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r u_\theta(r)$$

dalla quale ricaviamo il valore della velocità,

$$\boxed{u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}} \quad (318)$$

Inoltre, dovendo il flusso di massa essere nullo attorno a P $u_r(r) = 0$. Il potenziale si ottiene ancora una volta per integrazione della seconda delle (314).

$$\boxed{\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta} \quad (319)$$

nella quale abbiamo annullato la costante di integrazione arbitraria. Analogamente, la seconda delle (305), integrata fornisce:

$$\boxed{\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r)} \quad (320)$$

Le linee di corrente sono quindi circonferenze centrate nell'origine ($\psi = \text{cost.} \Rightarrow r = \text{cost.}$) ed il modulo della velocità cresce indefinitamente man mano che ci si avvicina ad essa (Figura 62).

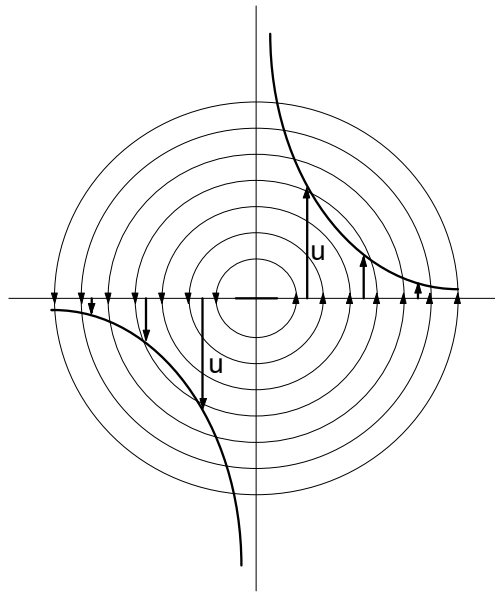


FIGURA 62

8.3.4. Doppietta

Siano dati una sorgente ed un pozzo di pari intensità, m , posti, rispettivamente, nell'origine e ad una distanza δ dall'origine lungo l'asse x (Figura 63). Il potenziale del campo di velocità può essere ottenuto grazie al principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_p = \frac{m}{2\pi} \ln(r) - \frac{m}{2\pi} \ln(r').$$

Se definiamo la funzione $F(\delta) = \frac{m}{2\pi} \ln(r'(\delta))$, possiamo scrivere i due potenziali di sorgente e pozzo

come $\varphi_s = F(0)$ e $\varphi_p = -F(\delta)$, infatti $r' = \sqrt{(x - \delta)^2 + y^2}$ e $r = r'(0) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Definiamo inoltre *momento* della coppia sorgente-pozzo il prodotto $M = m\delta$.

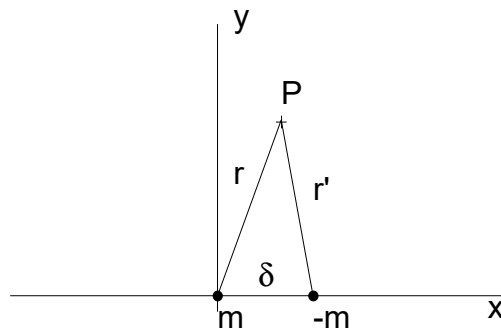


FIGURA 63

La doppietta è definita come il limite per $\delta \rightarrow 0$ della coppia sorgente-pozzo, con la condizione che il suo momento, M , venga mantenuto costante:

$$\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\varphi_s + \varphi_p]_{M=\text{cost.}} \quad (321)$$

Per calcolare questo limite, esprimiamo il potenziale del pozzo per mezzo di uno sviluppo in serie di Taylor al prim'ordine:

$$\begin{aligned} \varphi_p = -F(\delta) &= -F(0) - \left. \frac{\partial F}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \delta + \dots = -\frac{m}{2\pi} \ln(r) - \left. \frac{m}{2\pi r'} \frac{(\delta - x)}{r'} \right|_{\delta=0} \delta + \dots = \\ &= -\frac{m}{2\pi} \ln(r) + \frac{m\delta}{2\pi r} \frac{x}{r} + \dots \end{aligned}$$

e sostituiamo:

$$\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[F(0) + \left(-F(0) + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2} \right) \right]_{M=\text{cost.}},$$

ottenendo infine:

$$\boxed{\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}} \quad (322)$$

Da quest'ultima si ricava l'espressione della velocità:

$$\boxed{\begin{cases} u_r = \varphi_{,r} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \end{cases}} \quad (323)$$

ed infine, integrando una delle (305) si ricava l'espressione della funzione di corrente:

$$\boxed{\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}} \quad (324)$$

Le linee di corrente si ottengono ponendo $\psi = k = \text{cost.}$:

$$\psi = -\frac{M}{2\pi r} \sin \theta = k$$

e moltiplicando per r^2 e dividendo per k si ha:

$$r^2 + \frac{M}{2\pi k} r \sin \theta = 0$$

ovvero, ricordando che il quadrato del raggio r può esprimersi come è $r^2 = x^2 + y^2$ e che $y = r \sin \theta$:

$$x^2 + y^2 + \frac{M}{2\pi k} y = 0, \quad (325)$$

la quale rappresenta un fascio di circonferenze che passano per l'origine e con il centro sull'asse delle y (Figura 64).

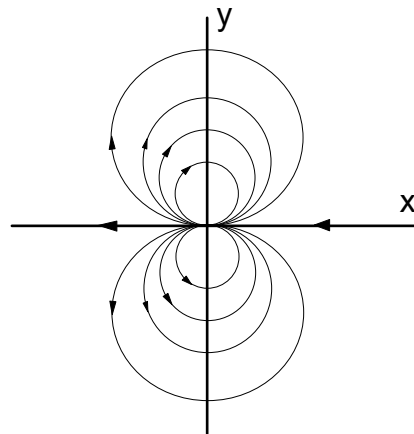


FIGURA 64

8.4. Potenziale complesso

I flussi potenziali bidimensionali possono essere studiati anche utilizzando un potente strumento matematico ovvero il dominio dei numeri complessi. In questo modo si possono sfruttare le proprietà delle funzioni complesse, le quali permettono di raggiungere in modo semplice risultati altrimenti ardui da conseguire. In particolare, osserveremo come le funzioni complesse analitiche godano intrinsecamente di proprietà richieste ai campi potenziali, e introdurremo una famiglia di trasformazioni, dette trasformazioni conformi, che ci consentiranno di studiare il campo di moto attorno ad un profilo alare.

In questa trattazione, il dominio di studio viene rappresentato attraverso il piano complesso, ed un generico punto (x,y) , è individuato da un numero complesso nel quale la parte reale rappresenta la coordinata x e la parte immaginaria la coordinata y .

Con riferimento alla Figura 65, il generico punto del piano complesso potrà essere rappresentato in una delle forme alternative:

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta = r e^{i\theta}.$$

Ricordiamo inoltre che r è il modulo del numero complesso z e θ rappresenta la fase. Il modulo può essere ottenuto come:

$$r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*} \quad (326)$$

nella quale, come di consueto, z^* indica il complesso coniugato di z : $z^* = x - iy$.

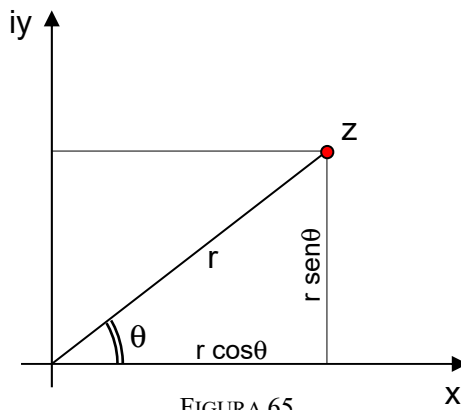


FIGURA 65

La trattazione dei flussi potenziali nel piano complesso è basata sull'introduzione del *potenziale complesso*, una funzione che ha come parte reale la funzione potenziale ϕ , e come parte immaginaria la funzione di corrente ψ :

$$W = \phi + i\psi \quad (327)$$

In primo luogo dimostriamo che anche il potenziale complesso soddisfa l'equazione di Laplace. Poiché l'operatore Laplaciano è lineare, avremo che:

$$\nabla^2 W = \nabla^2(\phi + i\psi) = \nabla^2 \phi + i\nabla^2 \psi.$$

Per la parte reale dobbiamo solo ricordare il ragionamento fatto in seguito all'introduzione della funzione potenziale: ricordiamo che l'equazione di continuità è $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, quindi, come già visto in precedenza:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi.$$

Rimane da dimostrare che sia nullo anche $\nabla^2 \psi$. In questo caso utilizziamo l'ipotesi di irrotazionalità, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Per prima cosa dobbiamo ricordare che la vorticità è il risultato di un prodotto vettoriale, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, ed è quindi ortogonale al piano x-y nel quale giace la velocità $\mathbf{u}$. L'unica componente della vorticità diversa da zero sarà quindi la componente z, che è pari a: $\omega = \omega_z = [\text{rot}(\mathbf{u})]_z = u_{y,x} - u_{x,y}$. Esprimendo le componenti della velocità attraverso le relazioni tra velocità e funzione di corrente (303), si ottiene:

$$0 = \omega = u_{y,x} - u_{x,y} = (-\psi_{,x})_{,x} - (\psi_{,y})_{,y} = -\nabla^2 \psi \quad (328)$$

quindi anche il Laplaciano della funzione di corrente è nullo. Possiamo perciò concludere che anche il potenziale complesso deve soddisfare l'equazione di Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 W = 0} \quad (329)$$

8.4.1. Potenziali complessi del moto uniforme, sorgente, vortice e doppietta

Esprimiamo ora i potenziali complessi dei campi di moto sin qui studiati sostituendo le espressioni di potenziale e funzione di corrente finora ottenute.

Moto uniforme:

$W = \phi + i\psi = u_\infty x + iu_\infty y$. Dalla quale otteniamo:

$$\boxed{W = u_{\infty} z} \quad (330)$$

Sorgente:

$$W = \varphi + i\psi = \frac{m}{2\pi} \ln(r) + i \frac{m}{2\pi} \theta = \frac{m}{2\pi} \ln(r) + \frac{m}{2\pi} \ln(e^{i\theta}) = \frac{m}{2\pi} \ln(re^{i\theta}). \text{ Dalla quale otteniamo:}$$

$$\boxed{W = \frac{m}{2\pi} \ln(z)} \quad (331)$$

Vortice:

$$W = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} i\theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} [\ln(e^{i\theta}) + \ln(r)] = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(re^{i\theta}). \text{ Avendo tenuto conto del prodotto notevole: } i \cdot i = -1. \text{ Il potenziale complesso risulta quindi:}$$

$$\boxed{W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)} \quad (332)$$

Doppietta:

$$W = \varphi + i\psi = \frac{M}{2\pi r} \cos \theta - i \frac{M}{2\pi r} \sin \theta = \frac{M}{2\pi} \frac{(r \cos \theta - ir \sin \theta)}{r^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{x - iy}{r^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{z^*}{zz^*}.$$

Nella quale abbiamo prima diviso e moltiplicato per r e utilizzato la relazione $r^2 = z z^*$. Il potenziale complesso risulta quindi:

$$\boxed{W = \frac{M}{2\pi z}} \quad (333)$$

8.4.2. Cilindro investito da un flusso uniforme

Il campo di moto attorno ad un cilindro, di raggio R , investito da un flusso uniforme, u_{∞} , si ottiene sfruttando la linearità dell'equazione di Laplace e combinando due soluzioni precedentemente individuate: una doppietta ed un flusso uniforme.

$$W = W_{\infty} + W_d = u_{\infty} z + \frac{M}{2\pi z} \quad (334)$$

Riorganizzando l'equazione precedente otteniamo la forma che, come vedremo, contiene esplicitamente il raggio del cilindro al quadrato $R^2 = M/(2\pi u_{\infty})$:

$$W = u_{\infty} \left(z + \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{z} \right) = u_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (335)$$

Per dimostrare che il potenziale così ottenuto rappresenta effettivamente la soluzione al nostro problema dobbiamo verificare che sia soddisfatta l'equazione di Laplace e che lo siano anche le due condizioni al contorno, ovvero la condizione di impermeabilità sul cilindro e quella di corrente indisturbata all'infinito. Il primo requisito è soddisfatto in modo banale essendo l'equazione di Laplace lineare, quindi la somma di due funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace soddisfa a sua volta questa equazione. Per verificare la condizione al contorno all'infinito, il moto molto lontano dal cilindro dovrà tendere al flusso uniforme indisturbato. In effetti il secondo termine nella

parentesi della (335), essendo proporzionale a $1/z$, tende a zero; quindi $\lim_{z \rightarrow \infty} W = u_\infty z$ ovvero il potenziale del moto uniforme.

Per verificare la condizione di impermeabilità sulla superficie del cilindro è necessario esaminare la funzione di corrente. Separiamo quindi parte reale e parte immaginaria del potenziale complesso:

$$\begin{aligned} W &= u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \frac{z^*}{z^*} \right) = u_\infty \left[(x + iy) + \frac{R^2(x - iy)}{r^2} \right] = \\ &= u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) x + i u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) y = \underbrace{u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \theta}_{\varphi} + i \underbrace{u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \theta}_{\psi} \end{aligned} \quad (336)$$

Quindi:

$$\begin{cases} \varphi = u_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \\ \psi = u_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (337)$$

Sulla superficie del cilindro, ovvero per $r = R$, la funzione di corrente è nulla e quindi costante. Ricordando che le linee a ψ costante sono linee di corrente, si deduce che la superficie del cilindro è una linea di corrente. La velocità è perciò tangenziale al cilindro ed il fluido non ne attraversa la superficie. È così soddisfatta la condizione di impermeabilità. In conclusione, sia l'equazione differenziale che le condizioni al contorno sono soddisfatte, quindi la sovrapposizione di un flusso uniforme e di una doppietta rappresenta effettivamente un cilindro di raggio R investito da una corrente uniforme.

Dalle equazioni precedenti, utilizzando le relazioni (305) e (314) tra campo di velocità e le suddette funzioni otteniamo le componenti della velocità in coordinate polari:

$$\begin{cases} u_r = \varphi_{,r} = \frac{1}{r} \psi_{,\theta} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} = -\psi_{,r} = -u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (338)$$

Le linee di corrente del campo di velocità risultante sono riportate nella Figura 66. È particolarmente rilevante studiare le condizioni sulla superficie del cilindro, la velocità è:

$$\begin{cases} u_r(r = R) = 0 \\ u_\theta(r = R) = -2u_\infty \sin \theta \end{cases} \quad (339)$$

Quindi ci sono 2 punti nei quali la velocità si annulla (*punti di ristagno*), entrambi sull'asse delle x . La velocità assume invece il suo valore massimo in corrispondenza di $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3/2\pi$, punti nei quali assume un valore doppio di quello del flusso indisturbato.

La distribuzione delle pressioni può essere ricavata dall'equazione dell'energia meccanica scritta per $Fr \gg 1$ (301):

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \quad (340)$$

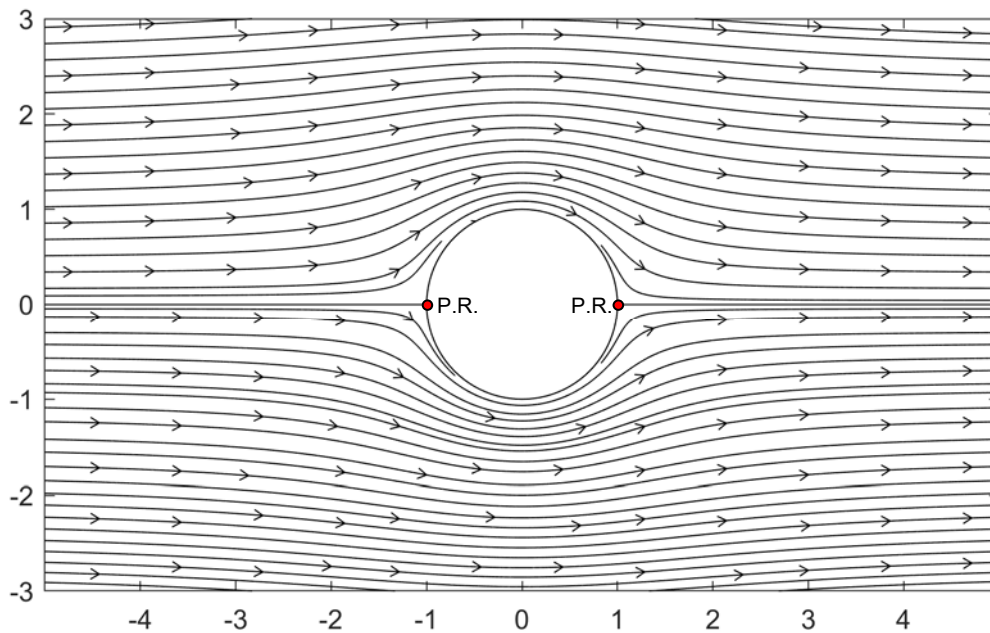


FIGURA 66

nella quale la pressione del fluido indisturbato deve essere nota. Sul cilindro la pressione sarà dunque massima nei punti di ristagno, mentre assumerà il suo valore minimo in corrispondenza dei punti nei quali la velocità è massima. L'andamento delle pressioni può anche essere descritto per mezzo di un coefficiente adimensionale, detto *coefficiente di pressione*, che si ottiene adimensionalizzando la variazione di pressione rispetto al flusso indisturbato per mezzo dell'energia cinetica del flusso indisturbato:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u}{u_\infty} \right)^2 \quad (341)$$

Questo coefficiente, che è definito nell'intervallo $]-\infty; 1]$, si annulla quando la pressione coincide con quella indisturbata, è negativo nelle zone di depressione, mentre assume valori positivi nelle zone di sovrappressione, fino ad arrivare ad 1 nei punti di ristagno. Sul cilindro avremo:

$$C_p(R) = 1 - \left(\frac{-2u_\infty \sin \theta}{u_\infty} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (342)$$

Il coefficiente di pressione ha il suo valore massimo nei due punti di ristagno ($C_p = 1$) dove il flusso è in sovrappressione, e il valore minimo in corrispondenza di $\theta = \pi/2$, e $\theta = 3/2 \pi$, dove si ha una ampia zona di depressione che raggiunge $C_p = -3$ (Figura 67). La simmetria del campo di pressione permette di rilevare in modo immediato che la risultante delle pressioni che il fluido esercita sul cilindro è nulla. Il fatto che non ci sia una componente in direzione y è una diretta conseguenza della simmetria del problema, mentre il fatto che non ci sia una componente nella direzione del flusso, facendo presupporre che il cilindro non generi nessuna resistenza, al contrario di quello che ci dice il senso fisico e l'esperienza, dipende dal fatto che nello schema dei flussi potenziali non abbiamo considerato gli effetti dissipativi della viscosità, di cui la resistenza è diretta conseguenza. Mentre non è possibile riprodurre gli effetti della resistenza senza tenere conto della viscosità,

vedremo nel seguito che è possibile includere nel nostro schema i meccanismi che generano la forza fluidodinamica che si sviluppa in direzione ortogonale al flusso indisturbato, ovvero la portanza.

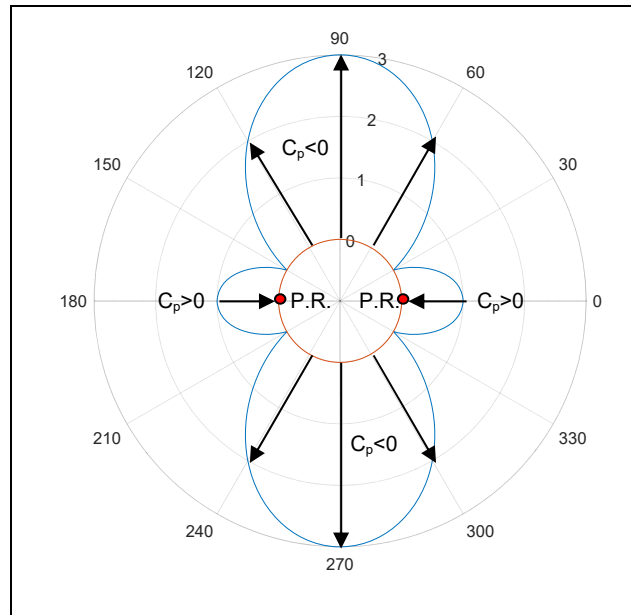


FIGURA 67

8.4.3. Cilindro con circolazione

Per ottenere una risultante delle forze fluidodinamiche diversa da zero è necessario alterare la simmetria della distribuzione delle pressioni che abbiamo osservato in Figura 67. A questo scopo aggiungiamo al campo studiato nel paragrafo precedente un vortice con circolazione $-\Gamma$ (circolazione oraria) centrato nell'origine.

Possiamo immaginare che questa circolazione sia generata per effetto della viscosità in uno strato molto sottile adiacente alla superficie del corpo (il cosiddetto strato limite) a causa della rotazione del cilindro intorno al suo asse. In questa schematizzazione naturalmente la viscosità non può essere introdotta, possiamo però immaginare di rappresentarne globalmente gli effetti, introducendo un vortice elementare che generi la stessa circolazione generata dalla rotazione del cilindro sotto l'ipotesi che lo spessore dello strato limite sia così sottile da poter essere trascurato.

Il potenziale complesso sarà dunque:

$$W = W_{\infty} + W_d + W_v = u_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad (343)$$

nella quale il raggio del cilindro è ancora definito, come nel caso precedente, in relazione all'intensità della doppietta e del flusso indisturbato:

$$R^2 = \frac{M}{2\pi u_{\infty}}.$$

Separando parte reale e parte immaginaria del potenziale complesso ricaviamo il potenziale e la funzione di corrente:

$$\begin{aligned}
W &= u_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \frac{z^*}{z^*} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) = u_{\infty} \left[(x + iy) + \frac{R^2(x - iy)}{r^2} \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \\
&= u_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) x + i u_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) y + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(e^{i\theta}) = \\
&= u_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \theta + i \frac{\Gamma}{2\pi} (i\theta) + i \left[u_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \right] = \\
&= \underbrace{u_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta}_{\varphi} + i \underbrace{\left[u_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \right]}_{\psi}
\end{aligned} \tag{344}$$

che saranno quindi:

$$\begin{cases} \varphi = u_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) x - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = u_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) y + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \end{cases} \tag{345}$$

mentre il campo di velocità risulta:

$$\begin{cases} u_r = \varphi_{,r} = u_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_{\theta} = \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} = -u_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \tag{346}$$

Anche in questo caso dobbiamo verificare che le condizioni al contorno di impermeabilità alla parete del cilindro e di flusso indisturbato all'infinito siano soddisfatte. Per ciò che riguarda la prima condizione è sufficiente osservare che la circonferenza (data da $r = R$) è ancora una linea di corrente poiché $\psi(r = R) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(R) = \text{cost.}$, quindi non sarà attraversata dal fluido. La seconda invece è ancora soddisfatta poiché molto lontano dall'origine, e quindi dal cilindro, si ha: $\lim_{z \rightarrow \infty} W = \lim_{z \rightarrow \infty} u_{\infty} z$

poiché anche il potenziale, che è proporzionale a $\ln(z)$, diventa trascurabile rispetto al potenziale del flusso indisturbato, che è proporzionale a z , quando $z \rightarrow \infty$.

Sul cilindro la velocità è:

$$\begin{cases} u_r(R) = 0 \\ u_{\theta}(R) = -2u_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \end{cases} \tag{347}$$

I punti di ristagno si ottengono imponendo $u_{\theta} = 0$, da cui:

$$\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi R u_{\infty}} \tag{348}$$

Questa equazione ha 2 soluzioni simmetriche rispetto all'asse y se $\Gamma < (4 \pi R u_\infty)$ (Figura 68), ne ha una sola (due coincidenti) se $\Gamma = (4 \pi R u_\infty)$, mentre non ne ha nessuna se $\Gamma > (4 \pi R u_\infty)$ (Figura 69).

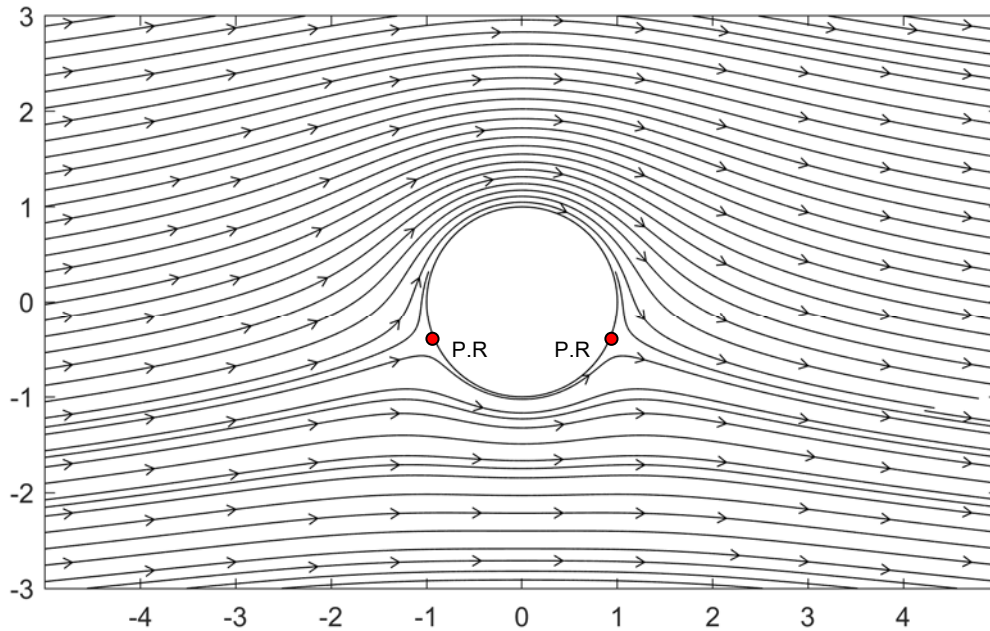


FIGURA 68

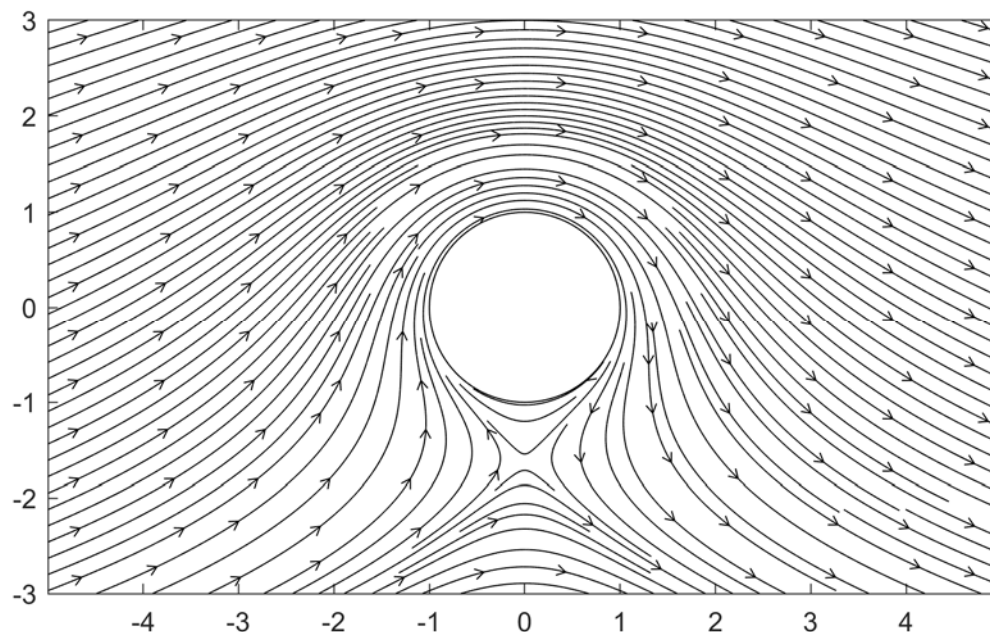


FIGURA 69

Il coefficiente di pressione sulla superficie del cilindro risulta in questo caso:

$$C_p(R) = 1 - \left(\frac{u}{u_\infty} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 u_\infty^2} - 2 \frac{\Gamma}{\pi R u_\infty} \sin \theta.$$

L'andamento del coefficiente di pressione è rappresentato in Figura 70 per il flusso di Figura 68, nel quale si hanno due punti di ristagno sulla superficie del cilindro. Il C_p presenta una larga regione di

intensa depressione nella parte superiore, e due lobi di sovrappressione nella parte inferiore, in corrispondenza dei punti di ristagno. Tra di essi è presente una piccola zona di leggera depressione.

La presenza del vortice rompe la simmetria rispetto all'asse delle x, facendo sì che la risultante delle forze in direzione ortogonale al flusso indisturbato possa essere diversa da zero.

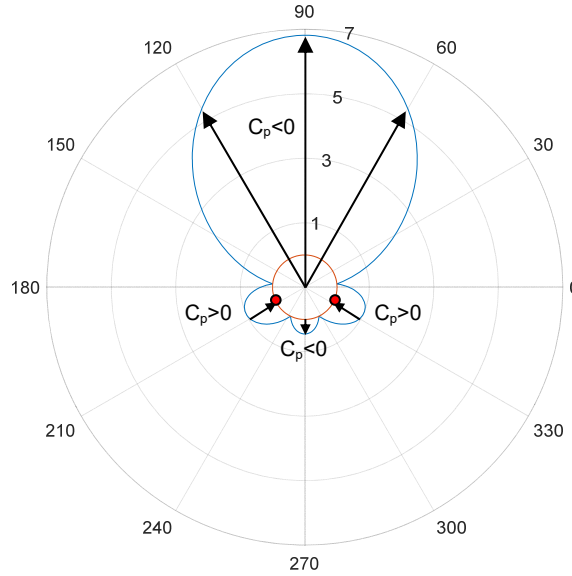


FIGURA 70

8.4.4. Azioni dinamiche sul cilindro

Nelle ipotesi adottate per lo studio dei flussi potenziali, essendo trascurabili gli effetti della viscosità, le uniche tensioni in gioco sono quelle normali, descritte dal campo di pressione. La risultante delle azioni che il fluido esercita su di un corpo dal contorno C può essere quindi scritta per mezzo dell'equazione dell'energia (301):

$$\mathbf{F} = \int_C -p \mathbf{n} dC = \int_C \left(\frac{1}{2} \rho u^2 - k \right) \mathbf{n} dC = \frac{1}{2} \rho \int_C u^2 \mathbf{n} dC \quad (349)$$

dove k è una costante ed il suo integrale su tutto il contorno del cilindro dà contributo nullo (grafico di sinistra in Figura 71). Si è inoltre tenuto conto del fatto che la pressione esterna agisce in direzione opposta rispetto alla normale, $\mathbf{n}$, esterna al cilindro. Sostituendo l'espressione (347) della $u = u_\theta$ velocità sulla superficie di un cilindro investito da un flusso uniforme, dotato di circolazione $-\Gamma$, ed esprimendo l'elementino infinitesimo di circonferenza come $dC = R d\theta$, si ha:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \left(4u_\infty^2 \sin^2 \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} + 2 \frac{\Gamma u_\infty}{\pi R} \sin \theta \right) \mathbf{n} R d\theta.$$

L'integrale del primo termine tra parentesi (I) è nullo perché si tratta di una funzione simmetrica rispetto all'asse x (la stessa che si sarebbe ottenuta per un cilindro senza circolazione e riportata nel grafico di destra della Figura 71). L'integrale del secondo termine (II) è invece nullo perché si tratta di un termine costante che agisce su tutta la superficie del cilindro (grafico a sinistra della Figura 71) come già osservato in precedenza. In conclusione, rimane solo il contributo del termine III. Ricordando che le componenti della normale alla circonferenza $\mathbf{n}$ risultano: $n_x = \cos \theta$ e $n_y = \sin \theta$, possiamo scrivere separatamente le due componenti della forza $\mathbf{F}$.

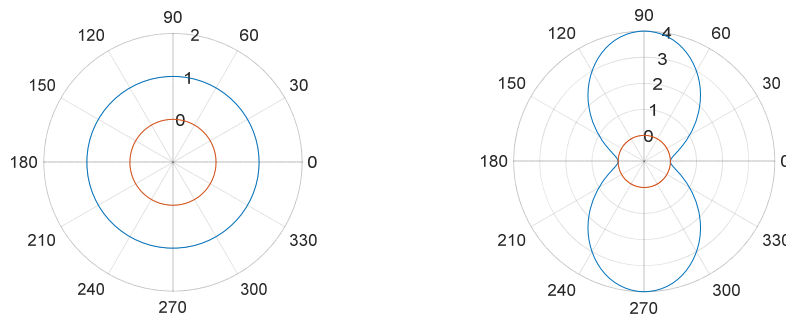


FIGURA 71

Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} F_x = \rho \frac{\Gamma u_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\Gamma u_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = 0 \\ F_y = \rho \frac{\Gamma u_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \end{cases} \quad (350)$$

Nella prima abbiamo usato la ben nota formula di duplicazione per il seno, e osservato che l'integrale della funzione seno sull'angolo giro è nullo. L'integrale della seconda equazione può essere calcolato notando che:

$$\int_0^{2\pi} 1 d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 2\pi$$

ma, i due integrali danno uguale contributo, quindi ciascuno di essi vale π . In conclusione, l'unica componente della forza che il fluido esercita sul cilindro, quella ortogonale alla corrente indisturbata, risulta:

$$\boxed{F_y = \rho u_\infty \Gamma}. \quad (351)$$

Questo risultato, che abbiamo qui dimostrato per un cilindro investito da un flusso uniforme, può essere generalizzato al caso di un corpo di forma qualsiasi investito da un flusso uniforme e, in questo caso, prende il nome di *teorema di Kutta-Joukowski* (che non sarà dimostrato in questa sede).

8.4.5. Condizioni di Cauchy-Riemann

Operando nel piano complesso è possibile trasformare una soluzione già nota nella soluzione ad un nuovo problema per mezzo delle trasformazioni conformi. Le trasformazioni conformi si basano sulle proprietà delle funzioni complesse *olomorfe*.

In primo luogo osserviamo che in generale è possibile costruire una funzione complessa a partire da due funzioni di due variabili reali, proprio come abbiamo fatto nel definire il potenziale complesso:

$$F(x,y) = f(x,y) + i g(x,y).$$

La funzione F , è del tutto simile ad una funzione definita in un dominio bidimensionale $\mathbb{R}^2$ ed, in generale: *i)* non è esprimibile come una funzione della variabile $z = x+iy$; *ii)* come tutte le funzioni definite su un piano, in ciascun punto la sua derivata, se esiste, ha valori diversi a seconda della direzione del piano lungo la quale si calcola la derivata.

Si dimostra che se la funzione F (con f e g continue e derivabili in un dominio aperto) soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} f_{,x} = g_{,y} \\ f_{,y} = -g_{,x} \end{cases} \quad (352)$$

allora, ciò è condizione necessaria e sufficiente affinché:

- la derivata di F in ciascun punto del piano complesso sia unica;
- la funzione F sia esprimibile come funzione della variabile complessa z .

Una funzione complessa che soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann si dice *olomorfa*.

È immediato dimostrare che una funzione olomorfa soddisfa l'equazione di Laplace. Infatti, derivando la prima delle equazioni precedenti rispetto ad x e la seconda rispetto ad y e sommandole tra loro si ottiene:

$$\begin{array}{rcl} f_{,xx} = g_{,yx} & + & \\ f_{,yy} = -g_{,xy} & = & \\ \hline f_{,xx} + f_{,yy} = 0 & & \end{array}$$

quindi $\nabla^2 f = 0$. Derivando invece la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x e sottraendo l'una all'altra si ottiene invece:

$$\begin{array}{rcl} f_{,xy} = g_{,yy} & - & \\ f_{,yx} = -g_{,xx} & = & \\ \hline 0 = g_{,xx} + g_{,yy} & & \end{array}$$

cioè $\nabla^2 g = 0$. Poiché sia f sia g hanno Laplaciano nullo, anche la funzione F soddisfa l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 F = \nabla^2 f + \nabla^2 g = 0.$$

Poiché le condizioni sopra esposte sono necessarie e sufficienti, si conclude che qualsiasi funzione (continua e derivabile in un dominio aperto) espressa come funzione della variabile z è olomorfa e perciò: *i)* soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann; *ii)* ha Laplaciano nullo; *iii)* la sua derivata è unica in ciascun punto del dominio. Si ricorda, che la derivata di una funzione di questo tipo può essere calcolata applicando le consuete regole di derivazione delle funzioni di variabile reale alla variabile complessa z .

Le implicazioni di queste proprietà delle funzioni complesse sul potenziale complesso sono molto significative. Il potenziale W , è definito a partire da due funzioni reali definite nel piano, $W = \varphi + i\psi$, ed è immediato verificare che esso soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann; basta infatti richiamare le relazioni ricavate in precedenza tra potenziale, funzione di corrente e campo di velocità:

$$\begin{cases} u_x = \varphi_{,x} = \psi_{,y} \\ u_y = \varphi_{,y} = -\psi_{,x} \end{cases} \quad (353)$$

ed osservare che corrispondono esattamente alle (352). Ne consegue che:

- ogni potenziale complesso è una funzione olomorfa e la sua derivata, se esiste, è unica;

- può essere espresso in funzione della sola variabile complessa z ;
- viceversa, ogni funzione continua e derivabile della sola variabile complessa z ha Laplaciano nullo e quindi è un possibile potenziale complesso.

8.4.6. Velocità complessa

Dalle proprietà sopra descritte discende in modo immediato il metodo di calcolo del *campo di velocità complessa*, definito come un campo complesso che ha come parte reale la componente della velocità lungo x e come parte immaginaria la componente della velocità lungo y :

$$v = u_x + iu_y$$

Calcoliamo la derivata del potenziale rispetto a z :

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{W(z+dz) - W(z)}{dz} \quad (354)$$

Ricordando che la derivata non dipende dalla direzione lungo la quale si effettua la derivazione, e quindi nel generico incremento $dz = dx + i dy$ posso scegliere di porre $dy = 0$, ottenendo $dz = dx$, si ha:

$$\frac{dW}{dz} = W_{,x} = \phi_{,x} + i\psi_{,x} = u_x - iu_y \quad (355)$$

avendo utilizzato le ben note relazioni tra potenziale, funzione di corrente e campo di velocità. Il termine nell'ultimo membro dell'equazione precedente è il coniugato della velocità complessa. Una volta noto il potenziale W , per calcolare la velocità complessa sarà dunque sufficiente derivare rispetto a z :

$$\boxed{v^* = \frac{dW}{dz}} \quad (356)$$

8.5. Trasformazioni conformi

Lavorando nel dominio complesso è possibile trasformare un campo potenziale già noto nel piano z , in una nuova soluzione trasformando il piano z in un piano z' attraverso una trasformazione conforme. Si definisce *trasformazione conforme*, una *funzione olomorfa invertibile* che mappa il piano z nel piano z' e viceversa:

$$z = f(z'); \quad z' = f^{-1}(z).$$

Il termine conforme deriva dal fatto che queste trasformazioni hanno la proprietà di conservare, localmente, gli angoli nel senso che, se due linee si intersecano formando un angolo α nel piano z , le loro trasformate nel piano z' si intersecheranno con lo stesso angolo α . Il potenziale nel piano trasformato sarà dato dalla composizione della funzione $W(z)$ con la trasformazione conforme $z = f(z')$:

$$W'(z') = W(f(z')) = W \circ f.$$

Il calcolo della velocità complessa nel piano trasformato risulta immediato:

$$v'^* = \frac{dW'}{dz'} = \frac{dW}{dz} \frac{df}{dz'} = v^* \frac{df}{dz'} \quad (357)$$

8.5.1. Flusso attorno ad un angolo

Come primo esempio di applicazione delle trasformazioni conformi consideriamo il flusso attorno ad un angolo. Per studiarlo trasformiamo il flusso al di sopra di una parete piana lambita da un flusso uniforme, u_∞ , nel flusso attorno a due pareti che formano un angolo α tra loro (Figura 72).

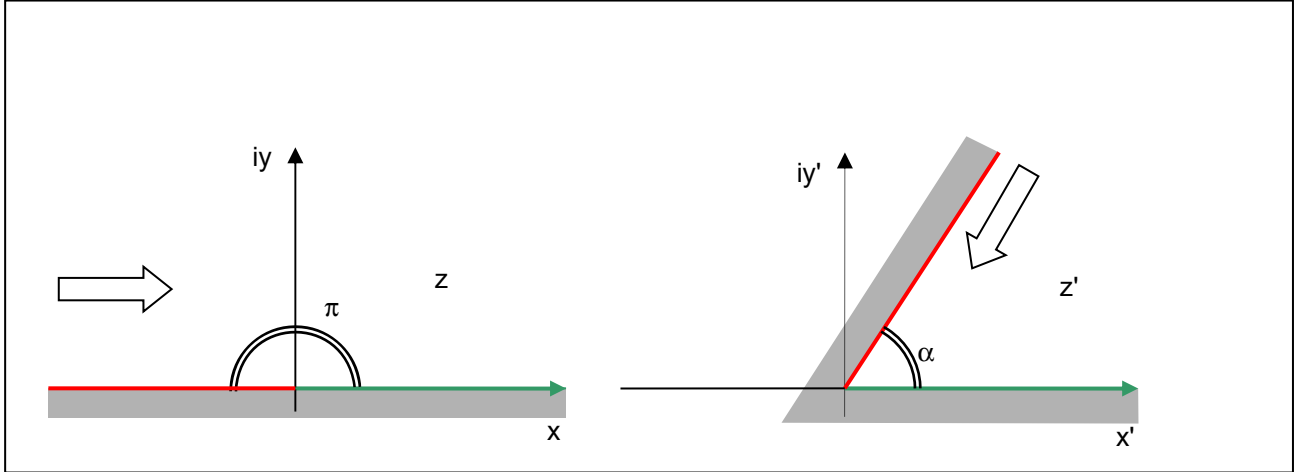


FIGURA 72

Per individuare la trasformazione che ci serve è sufficiente osservare che dobbiamo trasformare la semiretta del piano z' (linea rossa nel grafico a destra in figura) nel semiasse reale negativo del piano z . Mentre il semiasse reale positivo deve rimanere invariato. L'equazione della semiretta rossa nel piano z' è: $z' = r' e^{i\alpha}$, con $0 \leq r' < \infty$. Nel piano z , l'equazione della stessa retta è: $z = r e^{i\pi}$, sempre con il modulo, $0 \leq r < \infty$. In pratica la fase dei numeri complessi che appartengono alla retta deve passare da π ad α . Se definiamo n , il rapporto tra i due angoli: $n = \pi/\alpha$, è facile osservare che la relazione che lega le due semirette è:

$$z = f(z') = z'^n.$$

È immediato verificare che la funzione f mentre trasforma la semiretta rossa nel piano di destra nel semiasse reale negativo, lascia invariato il semiasse reale positivo (verde nella Figura 72), poiché l'elevazione a potenza di un numero reale positivo è ancora un numero reale positivo. Le trasformazioni conformi devono essere funzioni invertibili, quindi df/dz dovrà essere diversa da zero e da infinito. Poiché $df/dz = (n-1)z^{(n-1)}$, questa condizione è verificata in tutto il piano tranne che nell'origine, dove, a seconda del valore di n , la derivata sarà nulla (per $n>1$) o infinita (per $n<1$).

Il campo di velocità nel piano z è un moto uniforme parallelo all'asse x : $v^* = u_\infty + i 0$. Nel piano trasformato la velocità sarà:

$$v'^* = u_\infty \frac{df(z')}{dz'} = u_\infty (n-1) z'^{(n-1)} \quad (358)$$

La funzione f è invertibile in tutto il piano tranne che nell'origine, dove infatti gli angoli locali non sono conservati. Dobbiamo osservare che, se $n>1$, l'angolo α sarà minore di π , mentre per $n<1$ α risulterà maggiore di π . Corrispondentemente, l'esponente di z nell'espressione della velocità sarà positivo nel primo caso ($n>1$) e negativo nel secondo ($n<1$). Di conseguenza, nell'intorno del vertice dell'angolo, ovvero l'origine degli assi, il valore della velocità tende a zero quando $\alpha<\pi$ e tende

all'infinito quando $\alpha > \pi$. Nella Figura 73 sono riportate le linee di corrente che risultano dalla trasformazione per angoli diversi. Si osserva che per angoli minori di π ($n=2$ e $n=3$) le linee di corrente si allontanano fra loro in prossimità del vertice dell'angolo, dove si ha un punto di ristagno. Al contrario, nei casi di angoli maggiori di π ($n=0.5$ e $n=0.8$), le linee di corrente si avvicinano in prossimità del vertice, indicando che il fluido accelera in quella zona.

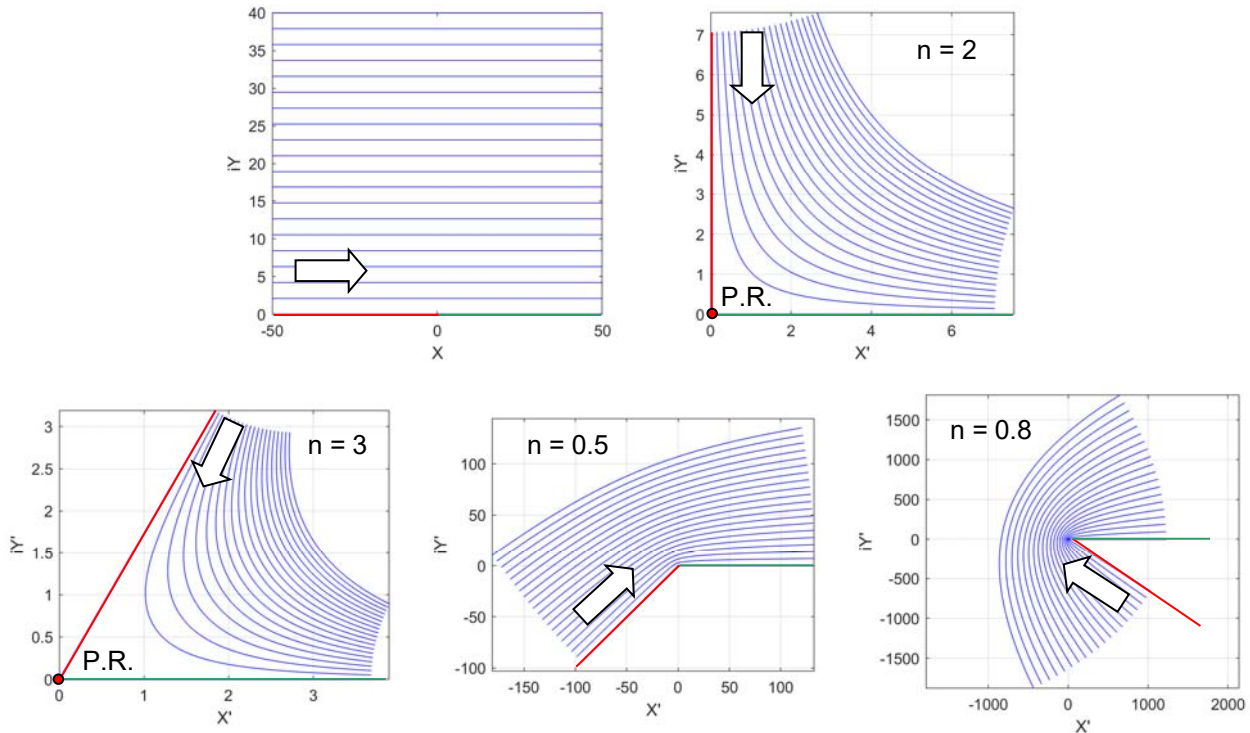


FIGURA 73

8.5.2. Campo di moto attorno ad un cilindro con circolazione investito da un flusso inclinato

Le trasformazioni conformi permettono di calcolare il campo di moto attorno ad un cilindro con circolazione investito da un flusso indisturbato con una inclinazione generica rispetto all'asse x . Con riferimento alla Figura 74, dobbiamo ricavare il potenziale complesso nel sistema di riferimento $\{x', iy'\}$, nel quale il flusso che investe il cilindro è inclinato di un angolo α rispetto all'asse reale.

Noi abbiamo già ricavato l'espressione del potenziale complesso (343) di un cilindro con circolazione nel sistema di riferimento $\{x, iy\}$, allineato con il flusso incidente. Per ottenere la soluzione nel piano $\{x', iy'\}$ sarà sufficiente applicare una rotazione di un angolo α , la quale è realizzata attraverso la trasformazione conforme $z' = ze^{-i\alpha}$, infatti se $z = re^{i\theta}$, $z' = re^{i\theta}e^{-i\alpha} = re^{i(\theta-\alpha)}$, quindi la trasformazione lascia invariato il modulo e varia la fase del punto da θ a $\theta - \alpha$, corrispondendo così alla desiderata rotazione. Sostituendo la trasformazione conforme nell'espressione del potenziale (343) si ottiene:

$$W(z') = u_{\infty} \left(z' e^{-i\alpha} + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z'} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z') + \cancel{\frac{\Gamma}{2\pi} \alpha} \quad (359)$$

nella quale l'ultimo termine può essere omissso poiché il potenziale è definito a meno di una costante arbitraria.

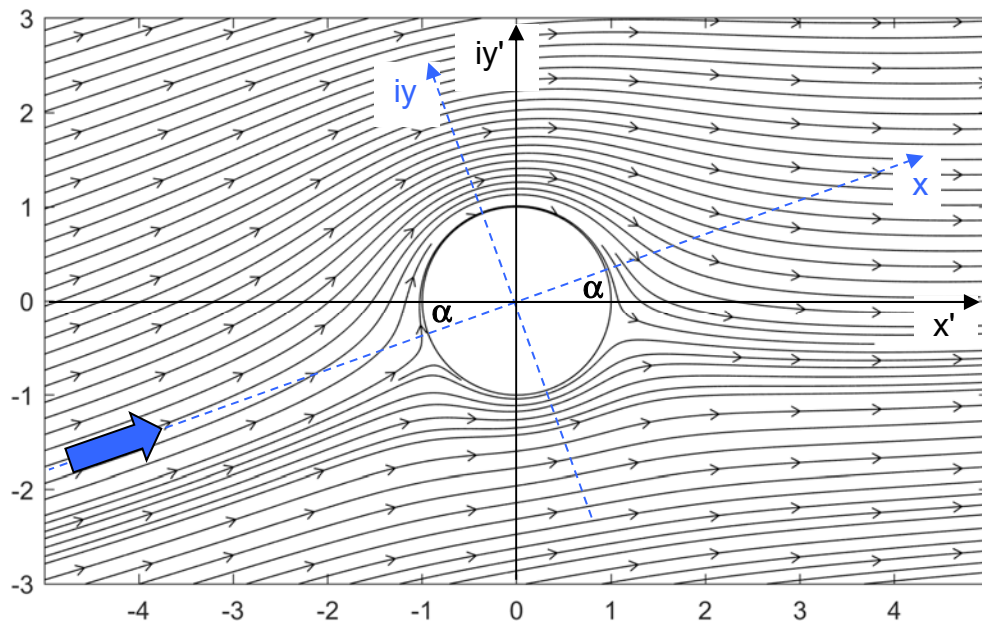


FIGURA 74

8.6. Profili di Joukowski

8.6.1. Trasformazione di Joukowski

Una delle potenzialità delle trasformazioni conformi risiede nella possibilità di trasformare il flusso attorno ad un cilindro nel flusso attorno ad un profilo alare attraverso la trasformazione proposta da Nicolai Joukowski nei primissimi anni del 1900. La trasformazione è:

$$\boxed{z' = z + \frac{a^2}{z}} \quad (360)$$

La quale, è funzione della sola variabile complessa z , quindi la sua derivata, dove esiste, è unica (funzione olomorfa). Ricordiamo però che una funzione di variabile complessa per essere una trasformazione conforme deve essere anche invertibile; verifichiamo perciò se la sua derivata assume un valore diverso da zero e da infinito in tutto il piano. Derivando si ottiene:

$$\frac{df}{dz} = 1 - \frac{a^2}{z^2} \quad (361)$$

la quale si annulla in due punti dell'asse reale: $z = \pm a$ che, nel piano trasformato z' , corrispondono ai punti $z' = \pm 2a$. In questi punti, detti *punti critici*, la trasformazione non è conforme. Per capire in che modo opera la trasformazione di Joukowski applichiamo la trasformazione a circonferenze di raggio e centro variabile che ci faranno giungere per passi successivi ad ottenere un profilo alare con le caratteristiche desiderate.

8.6.2. Profilo piatto

Trasformiamo un cerchio di raggio $R = a$ e centrato nell'origine: $C = (0;0)$. L'equazione del cerchio sarà quindi:

$$z = a e^{i\theta}$$

quindi, nel piano trasformato avremo:

$$z' = z + \frac{a^2}{z} = ae^{i\theta} + \frac{a^2}{a} e^{-i\theta} = a(\cos \theta + i \sin \theta) + a(\cos \theta - i \sin \theta) = 2a \cos \theta$$

Al variare di θ l'equazione descrive un segmento sull'asse reale compreso tra i due punti critici $-2a$ e $+2a$ come rappresentato in Figura 75. La trasformazione porta ad ottenere una lastra piana sottile.

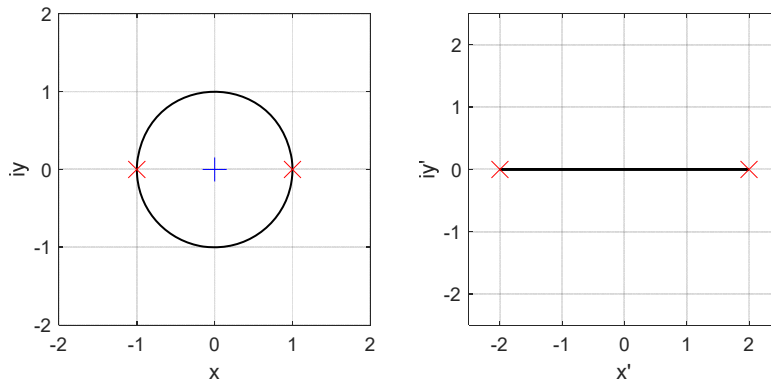


FIGURA 75

8.6.3. Profilo ellittico

Come secondo passo trasformiamo un cerchio, ancora centrato nell'origine ma di raggio R leggermente maggiore di a . Avremo quindi: $R > a$ e $C = (0,0)$. Nel piano z abbiamo:

$$z = R e^{i\theta}$$

e nel piano trasformato:

$$\begin{aligned} z' &= R e^{i\theta} + \frac{a^2}{R} e^{-i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2(\cos \theta - i \sin \theta)}{R} = \\ &= \left(R + \frac{a^2}{R}\right) \cos \theta + i \left(R - \frac{a^2}{R}\right) \sin \theta \end{aligned}$$

Eguagliando parte reale e parte immaginaria di primo e secondo membro e ricavando $\cos \theta$ e $\sin \theta$ si ha:

$$\begin{cases} x' = \left(R + \frac{a^2}{R}\right) \cos \theta \\ y' = \left(R - \frac{a^2}{R}\right) \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{x'}{\left(R + \frac{a^2}{R}\right)} \\ \sin \theta = \frac{y'}{\left(R - \frac{a^2}{R}\right)} \end{cases}$$

dalle quali possiamo scrivere la formula trigonometrica:

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{x'^2}{\left(R + \frac{a^2}{R}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(R - \frac{a^2}{R}\right)^2} = 1 \quad (362)$$

Quest'ultima rappresenta la forma normale dell'equazione di un'ellisse centrata nell'origine con semiasse maggiore lungo l'asse reale, pari a $\sqrt{R + \frac{a^2}{R}}$, e semiasse minore lungo l'asse immaginario, pari a $\sqrt{R - \frac{a^2}{R}}$ (Figura 76).

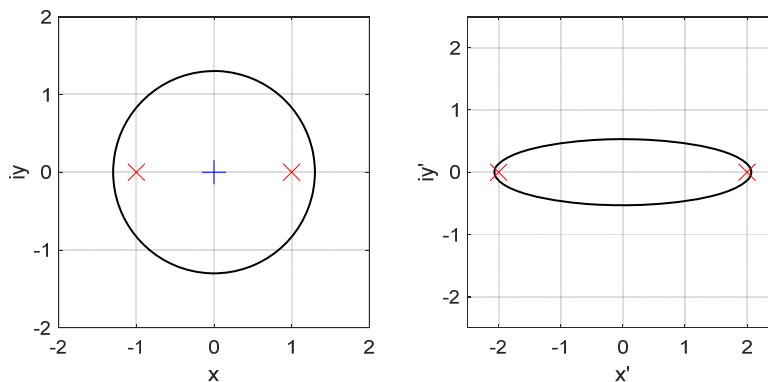


FIGURA 76

8.6.4. Profilo sottile

Trasformiamo ora una circonferenza con il centro spostato verso l'alto, lungo l'asse immaginario, $C = (0; c)$, e passante per entrambi i punti critici $+a$ e $-a$; quindi $R = \sqrt{a^2 + c^2}$. Si dimostra che la curva trasformata risulta un arco di circonferenza compreso tra i due punti critici del piano trasformato $+2a$ e $-2a$. Con riferimento alla Figura 77, si dimostra anche che, se il raggio della circonferenza che tocca il punto critico $+a$ forma un angolo con l'asse delle ascisse $\beta = \text{tg}^{-1}(c/a)$, l'arco di circonferenza nel piano trasformato nel punto critico $+2a$ ha una tangente che forma un angolo 2β con l'asse delle ascisse.

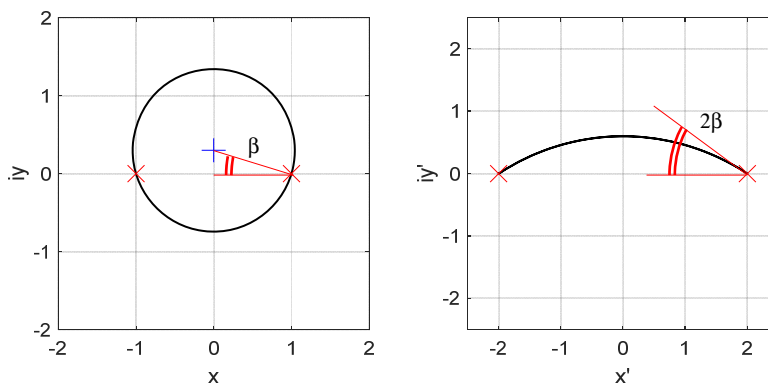


FIGURA 77

8.6.5. Profilo simmetrico

Iniziamo ora a combinare gli effetti ottenuti con le trasformazioni precedenti, trasformando una circonferenza con centro spostato verso sinistra lungo l'asse reale, $C = (-b, 0)$, e passante per il punto

critico $+a$. Il raggio sarà quindi $R = a+b$, e la circonferenza passerà esternamente al secondo punto critico, $-a$. Se lo spostamento è piccolo, nell'intorno del punto $+a$ ci troveremo in una situazione del tutto analoga a quella della lastra piana, con una circonferenza con il centro sull'asse reale che passa per il punto critico. Invece, nell'intorno del punto critico $-a$, avremo una circonferenza che passa esternamente al punto critico, in modo del tutto simile a quanto accadeva nel caso di ellisse. Quindi, nell'intorno del punto $+a$ il profilo trasformato sarà simile a una lastra piana, mentre nell'intorno del punto $-a$ sarà approssimabile con un'ellisse. Si ottiene un profilo simmetrico dotato con bordo d'attacco arrotondato e bordo d'uscita aguzzo, come quello tracciato in Figura 78.

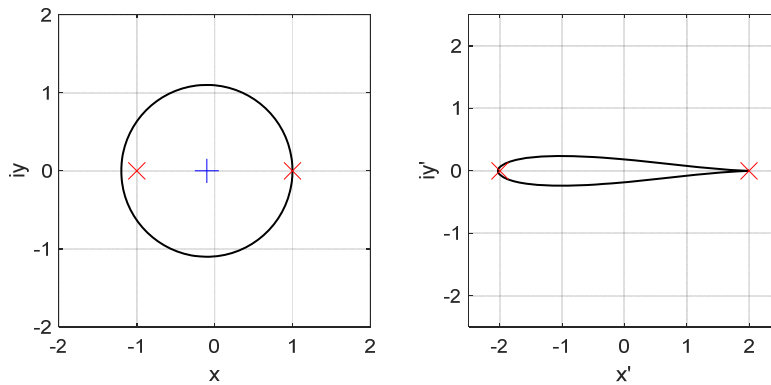


FIGURA 78

8.6.6. Profilo di Joukowsky

Trasformiamo infine una circonferenza che passa per il punto critico $+a$ e il cui centro è spostato sia verso sinistra sia verso l'alto. Otteniamo un profilo simile al precedente, in cui, però, lo spostamento verso l'alto ha indotto una curvatura in analogo simile a quanto abbiamo visto per il profilo sottile.

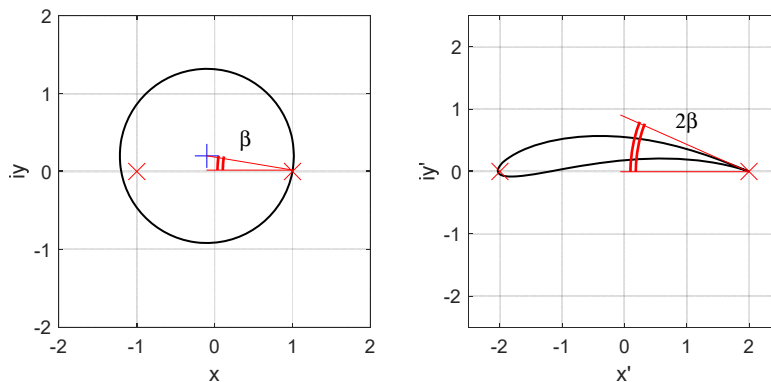


FIGURA 79

In questo caso il centro della circonferenza si trova in $C = (-b, c)$, e il suo raggio è $R = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. Analogamente a quanto accaduto per il profilo sottile curvo, se il raggio che collega il centro della circonferenza con il punto critico $+a$ forma con l'asse reale un angolo β , la tangente del bordo d'uscita del profilo nel piano trasformato, che si trova nel punto $+2a$, forma un angolo 2β con l'asse reale Figura 79.

La trasformazione di Joukowski trasforma una circonferenza in un profilo alare. La circonferenza passa dal punto critico $+a$, che viene trasformato nel bordo d'uscita aguzzo che, come vedremo nel seguito, svolge un ruolo fondamentale nella generazione della portanza. La possibilità di generare questo bordo aguzzo dipende proprio dal fatto che, in quel punto, la trasformazione non è conforme e quindi la conservazione locale degli angoli non è rispettata, analogamente a quanto

accadeva per il flusso attorno a un angolo studiato in precedenza. Va osservato che la tangente del dorso e del ventre del profilo al bordo d'uscita coincidono poiché nell'intorno del punto critico +a la posizione della circonferenza è del tutto simile a quella che si ha nel caso di profilo sottile curvo. I profili di Joukowski hanno quindi spessore molto basso in prossimità del bordo d'uscita, caratteristica questa che, ovviamente, pone diversi problemi strutturali e costruttivi. Il bordo d'attacco arrotondato è generato dal fatto che la circonferenza passa esternamente al punto critico, analogamente a quanto accadeva nel caso dell'ellisse.

In sintesi, lo spessore del profilo è controllato dallo spostamento del centro in direzione x ($-b$), mentre la sua curvatura è controllata dallo spostamento in direzione y ($+c$). Il fatto che la trasformazione sia conforme, garantisce che la velocità, che nel piano di partenza è tangente alla circonferenza, nel piano trasformato sia tangente al profilo, garantendo la condizione di impermeabilità. Inoltre dobbiamo notare che la trasformazione di Joukowski modifica il dominio solo in prossimità dell'origine mentre, molto lontano dal profilo, cioè al limite per z che tende all'infinito, lascia il piano invariato poiché il secondo termine diventa trascurabile rispetto al primo e la trasformazione tende alla trasformazione identità $z' = z$:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z' = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = z \quad (363)$$

Questa proprietà è importante per due motivi: i) all'infinito il flusso indisturbato rimane tale sia come direzione sia come intensità, quindi la condizione al contorno all'infinito si impone scegliendo l'angolo di incidenza α e l'intensità del flusso direttamente nel piano di partenza; ii) la circolazione attorno al profilo è uguale a quella presente nel cilindro dal quale è generato. Per dimostrarlo è sufficiente ricordare che la circolazione attorno ad una singolarità non dipende dalla linea seguita per calcolarla. Se quindi si sceglie una linea molto lontana dall'origine, dove la trasformazione lascia invariato il campo di velocità, il calcolo dà lo stesso risultato nel piano della circonferenza e in quello trasformato.

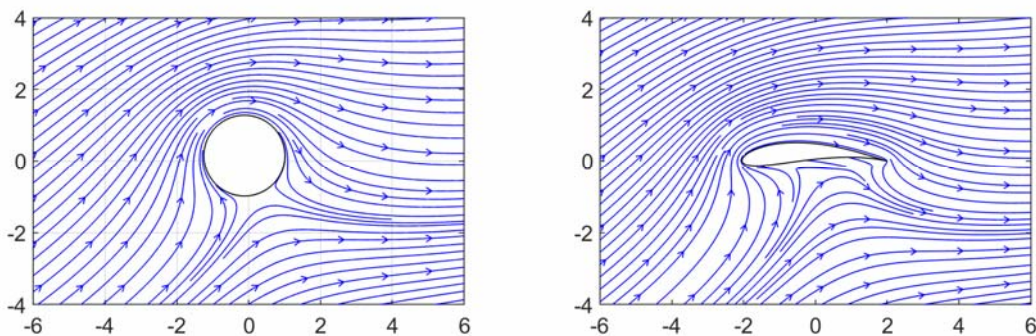


FIGURA 80

8.6.7. Condizione di Kutta

Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato che la trasformazione di Joukowski, applicata al flusso attorno ad un cilindro dotato di una circolazione Γ investito da un flusso di intensità u_∞ che forma un angolo α con l'asse x , ci permette di ottenere, nel piano trasformato, il flusso attorno ad un profilo alare soggetto ad un flusso u_∞ con angolo di incidenza α con una circolazione attorno al profilo pari a Γ . Ricordiamo che il teorema Kutta-Joukowski afferma che la portanza generata da profilo è pari a $L = \rho u_\infty \Gamma$. Poiché la trasformazione è applicabile ad un cilindro dotato di una circolazione arbitraria, apparentemente si potrebbe concludere che la portanza generata dal profilo può assumere un valore arbitrario, o anche nullo, a seconda della circolazione che si sceglie di

imporre attorno al cilindro. A titolo di esempio sono riportati nella Figura 80 il caso di circolazione arbitraria e nella Figura 81 il caso di circolazione $\Gamma = 0$.

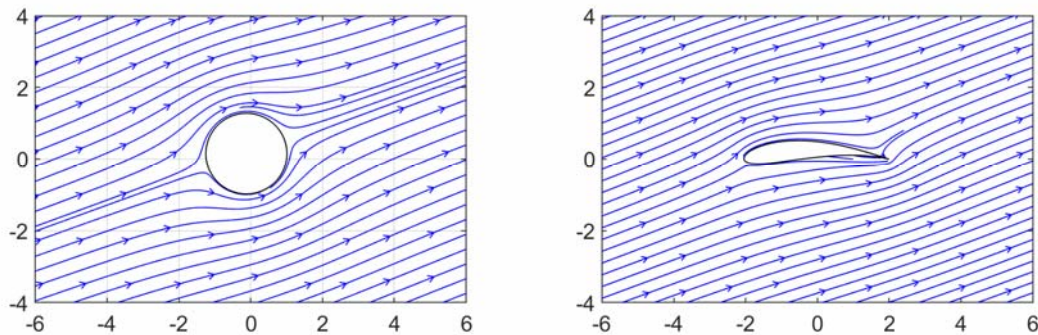


FIGURA 81

Questo risultato è fisicamente incongruente, ed è dovuto al fatto che nello schema dei flussi potenziali non è inclusa la viscosità del fluido che sappiamo essere alla base del meccanismo di generazione della vorticità e quindi della circolazione, Γ , nella zona in prossimità della parete del profilo alare. Questa lacuna è superabile facendo ricorso ad una informazione aggiuntiva derivante dall'osservazione sperimentale: la *condizione di Kutta*, la quale afferma che *una linea di corrente si stacca sempre dal bordo d'uscita aguzzo del profilo*.

Osserviamo che le linee di corrente si staccano dal cilindro, ed anche dal profilo, in corrispondenza dei punti di ristagno. Affinché una linea di corrente si stacchi dal bordo d'uscita del profilo sarà necessario che nel cilindro il punto di ristagno si trovi in corrispondenza del punto che genera la cuspide del bordo d'uscita, ovvero il punto critico $+a$.

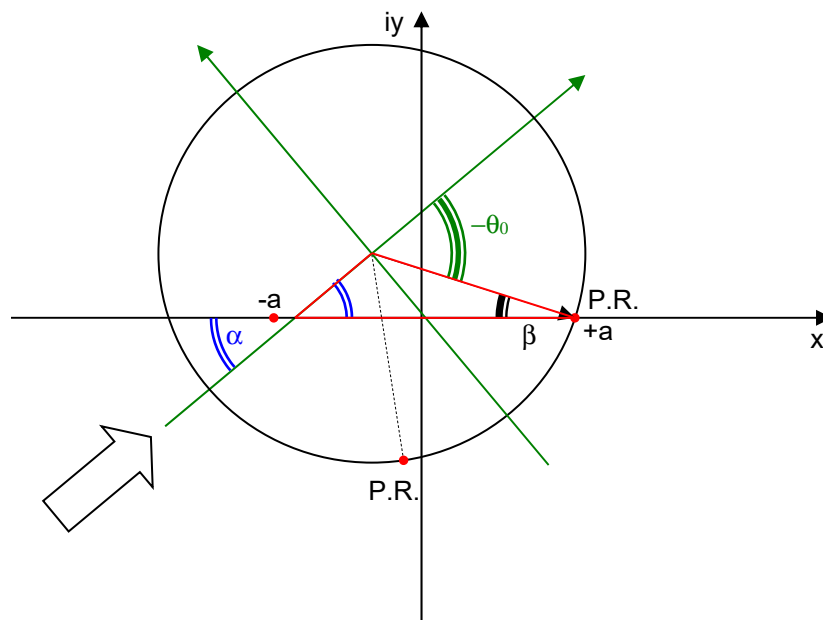


FIGURA 82

Se osserviamo lo schema di Figura 82, con riferimento agli assi tracciati in verde, che sono allineati con la direzione del flusso indisturbato, possiamo utilizzare i risultati ottenuti in precedenza per un cilindro con circolazione e ricordare che la presenza della circolazione fa spostare verso il basso i punti di un angolo θ che soddisfa l'equazione (348). Sempre osservando la figura si deduce che, affinché il punto di ristagno sottovento coincida con il punto critico $+a$, esso deve ruotare di un

angolo pari a $-\theta_0$, considerato negativo in quanto misurato in senso orario. D'altra parte, l'angolo θ_0 è complementare al terzo angolo del triangolo tracciato in rosso nella figura, i cui altri due angoli sono α e β . Di conseguenza avremo che $\theta_0 = \alpha + \beta$ e sostituendo nella (348) possiamo ricavare la circolazione da imporre attorno al cilindro per soddisfare la condizione di Kutta:

$$\Gamma = 4\pi u_\infty \sin(\theta_0) = 4\pi u_\infty \sin(\alpha + \beta) \quad (364)$$

Il campo di moto risultante è rappresentato in Figura 83.

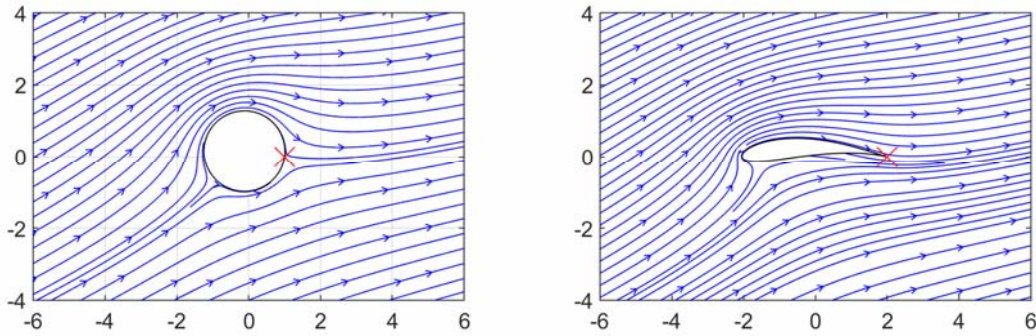


FIGURA 83

Imposto il valore della circolazione, è possibile ricavare il valore effettivo della portanza in funzione dell'angolo di incidenza α e dell'angolo β che caratterizza la curvatura del profilo:

$$L = 4\pi \sin(\alpha + \beta) \rho u_\infty^2.$$

Quindi è la presenza di un bordo d'uscita aguzzo che richiede che, attorno al profilo, si generi una circolazione per soddisfare la condizione di Kutta, e quindi in ultima analisi che si sviluppi la portanza. Si ricordi, che essendo la trattazione fatta in un piano, L rappresenta la forza per unità di lunghezza generata su di un'ala cilindrica infinitamente estesa. Definendo il coefficiente di portanza come la portanza adimensionalizzata con l'energia cinetica del flusso indisturbato e la corda del profilo, c , abbiamo:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 c}. \quad (365)$$

Consideriamo alcune approssimazioni dovute al fatto che nella pratica l'angolo di incidenza è piccolo e sono piccole anche le traslazioni del centro della circonferenza rispetto all'origine (quindi anche β è piccolo). In primo luogo possiamo approssimare il seno con l'angolo: $\sin(\alpha + \beta) \approx (\alpha + \beta)$; in secondo luogo la corda del profilo può essere approssimata come la distanza tra i due punti critici nel piano trasformato $\pm 2a$ e possiamo considerare $a \approx R$, ottenendo $c \approx 4R$. Utilizzando queste approssimazioni si ha un'espressione semplificata del coefficiente di portanza:

$$C_L \approx \frac{4\pi R \sin(\alpha + \beta) \rho u_\infty^2}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 (4R)} \approx 2\pi(\alpha + \beta) \quad (366)$$

Questa relazione vale per angoli di incidenza relativamente piccoli (inferiori a circa 10°), poiché, al di sopra di un certo valore di α sul dorso del profilo si genera un forte gradiente avverso di pressione che porta al cosiddetto *stallo* del profilo (Figura 84), ovvero il distacco della vena con una formazione di una scia turbolenta sottovento al profilo e la repentina diminuzione della portanza.

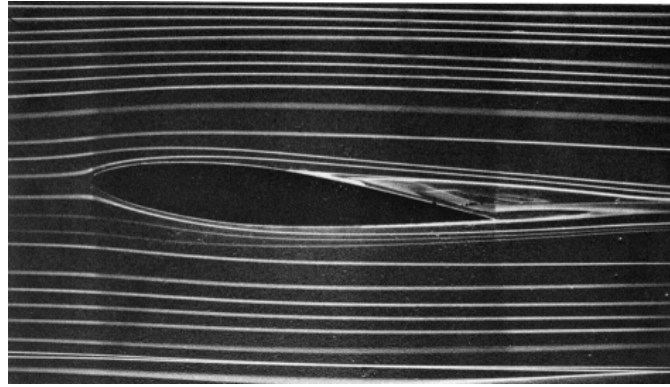
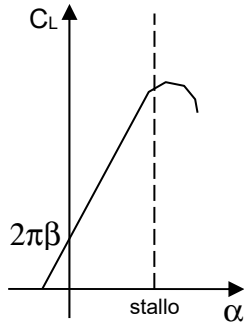


FIGURA 84

Vale la pena osservare che la curvatura del profilo ($\beta > 0$) aumenta la portanza a parità di angolo di incidenza, e fa sì che si abbia una portanza maggiore di zero ($C_L(0) = 2\pi\beta$) anche quando l'angolo di incidenza è nullo, mentre si ha una portanza nulla per un angolo di incidenza negativo $\alpha_0 = -\beta$.

Usando la già citata formula per il calcolo del coefficiente di pressione (341) è possibile, essendo nota la velocità nel piano trasformato, ricavare l'andamento del coefficiente di pressione. In Figura 85 è riportato un esempio, nel quale le frecce hanno lunghezza proporzionale al coefficiente di pressione locale, e sono disegnate in rosso nelle zone di depressione e in blu nelle zone di sovrappressione. Si noti che, per rendere più evidenti gli effetti, si è rappresentato un angolo di incidenza di 20° , irrealisticamente grande in quanto superiore all'angolo di stallo di un comune profilo.

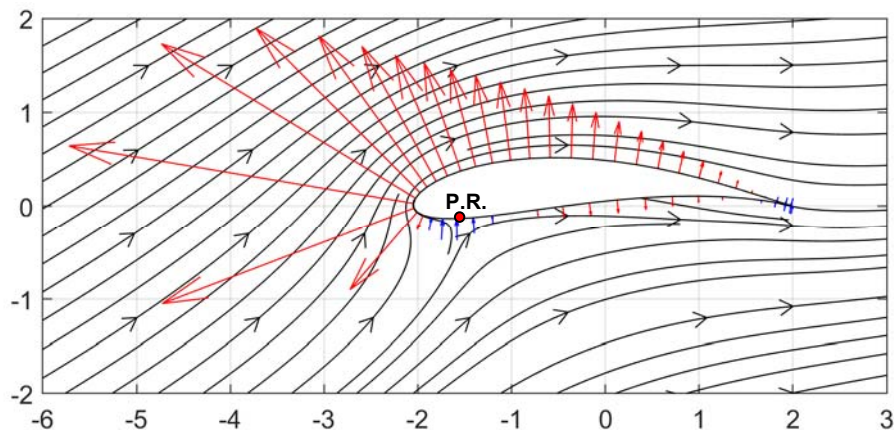


FIGURA 85

L'andamento di C_p ha caratteristiche simili a quelle del coefficiente di pressione attorno al cilindro di cui è la trasformazione (vedi per esempio il diagramma di Figura 70 ruotato di un angolo α). Si ha una grande zona di depressione sul dorso del profilo, che fornisce il contributo principale alla portanza, due piccole zone di sovrappressione attorno al punto di ristagno in prossimità del bordo d'attacco e in corrispondenza del bordo d'uscita e, tra di esse nel ventre del profilo, una zona di leggera depressione. Si noti infine, che le forze aerodinamiche sul bordo d'attacco sono orientate nel verso opposto alla direzione del flusso incidente; questa zona svolge quindi un ruolo fondamentale nel contrasto della resistenza generata dal profilo che, seppur non presente nello schema dei moti potenziali, in quanto derivante dagli effetti della viscosità, è senz'altro presente nella realtà.

9. STRATO LIMITE

9.1. Equazione di Prandtl

Utilizzando le nozioni introdotte nella trattazione delle equazioni di Navier-Stokes adimensionalizzate è possibile mettere in evidenza come in molti flussi sia possibile formulare l'ipotesi che gli effetti della viscosità siano trascurabili rispetto a quelli delle forze d'inerzia. Questa ipotesi però merita un ulteriore approfondimento, per mettere in luce i fenomeni che hanno luogo quando un fluido lambisce una superficie solida.

Consideriamo come caso esemplificativo, quello di una lastra piana, investita da un flusso uniforme con velocità u_∞ di un fluido incompressibile; supponiamo inoltre che il flusso indisturbato sia orientato secondo l'asse x e che tale sia anche la direzione della lastra. La soluzione al problema deve soddisfare le equazioni di Navier-Stokes, quella di continuità, e le condizioni al contorno. Nel nostro problema le condizioni al contorno da porre sono due: la prima all'infinito (ovvero molto lontano dalla lastra piana), dove dovremo imporre che la velocità sia uguale alla velocità del flusso indisturbato ($\mathbf{u} = u_\infty \mathbf{c}_x$); la seconda sulla superficie della lastra.

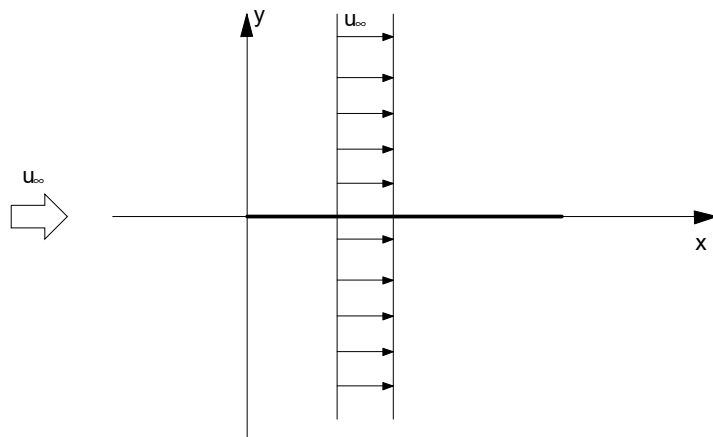


FIGURA 86

In generale, nel contatto tra fluido ed una parete solida esistono due tipi di condizioni al contorno:

- i. condizione di impermeabilità: secondo la quale il fluido può scorrere liberamente sulla parete ma non la può attraversare; avremo quindi che la velocità dovrà essere tangente alla parete ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$). Permettendo lo scorrimento libero del fluido sulla parete solida, questa condizione è adatta solo al caso ideale nel quale il fluido sia privo di viscosità.
- ii. condizione di aderenza: secondo la quale il fluido non può né attraversare né scorrere sulla parete; in questo caso la velocità del fluido alla parete dovrà essere nulla: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Questa condizione va applicata quando si considerano fluidi viscosi, nei quali è presente un attrito tra fluido e parete.

Se trascuriamo gli effetti della viscosità, il nostro problema, ha una soluzione banale: $u_x = u_\infty$. Secondo questa soluzione (Figura 86) la presenza della lastra non modifica il flusso uniforme. Tale soluzione soddisfa le condizioni al contorno di impermeabilità ma non la condizione di aderenza sul corpo, poiché la velocità sulla lastra è sì tangente, ma non nulla.

In effetti, quale che sia il tipo di fluido considerato, esso è dotato di una viscosità e la presenza di un attrito tra fluido e parete solida impedisce che ci possa essere uno scorrimento relativo del fluido rispetto alla parete, e impone quindi che la condizione di aderenza venga soddisfatta. Nel nostro esempio, la presenza della viscosità richiede che la velocità del fluido alla parete ($y = 0$) sia nulla.

Quindi, vicino alla parete, dovrà esistere una zona, detta *strato limite*, nella quale la velocità diminuisce fino ad annullarsi per effetto dei termini viscosi, della equazione di Navier-Stokes, che quindi non saranno trascurabili ma dovranno essere dello stesso ordine di grandezza dei termini inerziali. Al di fuori di essa invece, il flusso può essere trattato trascurando gli effetti della viscosità.

Impostiamo ora il problema nel caso di lastra piana che abbiamo preso in esame, tenendo conto però del fatto che i risultati ottenuti sono validi per qualsiasi superficie a patto che abbia debole curvatura, ovvero che il rapporto tra lo spessore dello strato limite, δ , ed il raggio di curvatura sia molto minore di 1.

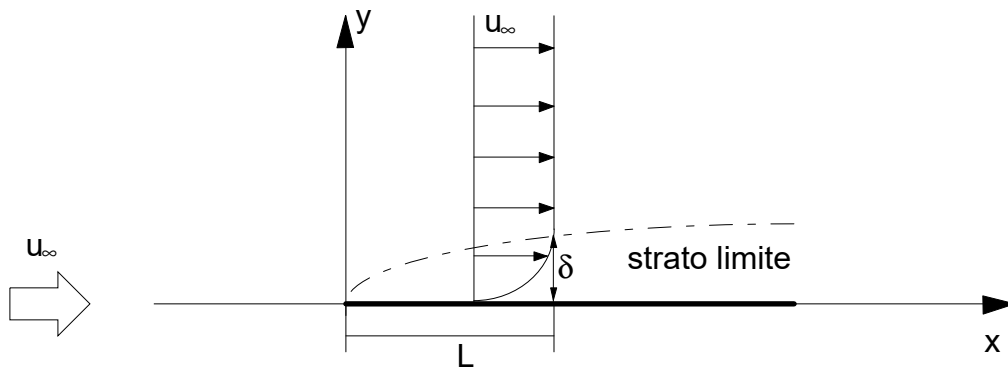


FIGURA 87

Per prima cosa identifichiamo le grandezze scala del nostro problema: poiché si tratta di un problema meccanico, dovremo scegliere 3 grandezze indipendenti: due di esse saranno la densità ρ e la velocità u_∞ . Per ciò che riguarda la terza, sceglieremo una scala delle lunghezze; se immaginiamo però che la lunghezza della piastra sia così grande da non influenzare il problema l'unica lunghezza che si può scegliere in direzione x è la distanza, L , del il punto considerato dal bordo d'attacco (Figura 87). Da queste possiamo ricavare la scala dei tempi $T = L/u_\infty$. Nell'affrontare il problema dello strato limite formuleremo l'ipotesi fondamentale che esso sia caratterizzato da uno spessore, δ , molto piccolo rispetto alla scala delle lunghezze L :

$$\lambda = \frac{\delta}{L} \ll 1$$

Data la natura del problema, analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso dei flussi paralleli, Per adimensionalizzare le equazioni introduciamo le grandezze adimensionali (indicate con l'asterisco ad apice):

$$x^* = x / L; \quad y^* = y / L; \quad u_x^* = u_x / u_\infty \quad u_y^* = u_y / u_\infty.$$

dalle quali ricaviamo le espressioni che utili alla sostituzione:

$$u_x = u_x^* u_\infty; u_y = u_y^* u_\infty; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{1}{L}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y^*} \frac{1}{L}$$

Per mezzo delle precedenti, scriviamo le equazioni di bilancio adimensionalizzate rispetto alle scale scelte in precedenza: l'equazione di bilancio della massa per un fluido incomprimibile è:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \frac{u_\infty}{L} + \frac{\partial u_y^*}{\partial y^*} \frac{u_\infty}{L} = 0,$$

da cui, dividendo per (u_∞/L) :

$$\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_y^*}{\partial y^*} = 0. \quad (367)$$

Valutiamo l'ordine di grandezza del primo termine della (367): i differenziali sono dell'ordine di grandezza della differenza tra il valore massimo ed il valore minimo della grandezza nel campo; la velocità u_x è senz'altro compresa tra u_∞ , al bordo superiore dello strato limite, e 0, alla parete, quindi $o(\Delta u_x) = (u_\infty - 0) = u_\infty$. L'ascissa x invece varia tra 0 ed L , quindi $o(\Delta x) = (L - 0) = L$. Ne consegue che il rapporto tra i due avrà ordine di grandezza:

$$o\left(\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*}\right) = \frac{\Delta u_x^*}{\Delta x^*} = \frac{\frac{u_\infty - 0}{u_\infty}}{\frac{L - 0}{L}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (368)$$

Nel secondo termine, la y varia tra 0 e l'altezza dello strato limite, δ , quindi il suo differenziale è valutabile come $o(\Delta y) = \delta$, quindi $o(\Delta y^*) = \delta / L = \lambda$. L'ordine di grandezza del differenziale della u_y non è invece stimabile a priori; sappiamo però che la velocità verticale varia tra 0 ed un valore di ordine incognito quindi, in analogia con le altre grandezze esaminate, il suo differenziale avrà lo stesso ordine di grandezza della velocità u_y stessa:

$$o\left(\frac{\partial u_y^*}{\partial y^*}\right) = \frac{\Delta u_y^*}{\Delta y^*} = \frac{\frac{u_\infty}{u_\infty}}{\frac{\delta - 0}{L}} = \frac{u_y^*}{\lambda} = \frac{?}{\lambda} \quad (369)$$

Per determinarlo è sufficiente osservare che la somma dei due termini dell'equazione di bilancio della massa deve essere nulla, quindi essi devono necessariamente essere entrambi dello stesso ordine di grandezza. Ne consegue che anche il secondo termine deve essere di ordine 1 e quindi:

$$o(\Delta u_y^*) = o(u_y^*) = \lambda.$$

Si consideri ora l'equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale (159), scritta per un fluido incomprimibile, in termini del carico piezometrico h : facendo riferimento alla stima degli ordini di grandezza eseguita in precedenza, valutiamo gli ordini di grandezza dei vari termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}}_{\text{termini inerziali}} = - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{R_{eL}} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)}_{\text{termini viscosi}} \\ \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\text{termini inerziali}} = - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{R_{eL}} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)}_{\text{termini viscosi}} \end{array} \right. \quad (370)$$

nelle quali, per semplicità, gli asterischi sono stati omessi e Reynolds e Froude sono stati costruiti in base alle scale definite in precedenza:

$$R_{eL} = \frac{\rho u_\infty L}{\mu}; \quad F_r = \frac{u_\infty}{\sqrt{gL}}$$

La presenza di due scale delle lunghezze di ordine di grandezza diverso fa sì che non tutti i termini al di fuori dei gruppi adimensionali siano di ordine 1. Il numero di Reynolds che compare nelle equazioni precedenti non può essere quindi considerato indicativo di per sé dell'ordine di grandezza del rapporto tra forze inerziali e forze viscosi. Osserviamo i termini tra parentesi tonde: nella prima delle (370), essendo per ipotesi $\lambda \ll 1$, il primo termine è sicuramente trascurabile rispetto al secondo. Per lo stesso motivo, anche nella seconda equazione, il primo termine tra parentesi è trascurabile rispetto al secondo. Rimane da identificare l'ordine di grandezza del numero di Reynolds. A tale scopo bisogna ricordare che abbiamo definito lo strato limite come quella zona del campo nel quale *i termini viscosi hanno lo stesso ordine di grandezza dei termini inerziali*: i termini inerziali della prima delle (370), (la componente x), sono di ordine 1. Il termine tra parentesi è di ordine $1/\lambda^2$, pertanto, affinché tutto il termine viscoso sia di ordine 1 dovrà essere: $o(1/R_{eL}) = \lambda^2$. Sulla base di questa considerazione, risulta:

$$\lambda = \frac{\delta}{L} \propto \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_\infty L}} \quad (371)$$

dalla quale è possibile ricavare l'andamento dello spessore dello strato limite:

$$\delta \propto \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_\infty}} \sqrt{L} \quad (372)$$

Si evince che l'altezza dello strato limite, δ , cresce con la radice quadrata della distanza dal bordo d'attacco L . Se analizziamo la seconda equazione delle (370) alla luce di questo risultato, potremo osservare che, essendo tutti gli altri termini di ordine λ e ricorrendo che, per ipotesi $\lambda \ll 1$, affinché l'equazione possa essere soddisfatta, anche l'unico termine di ordine incognito, $1/F_r^2 (\partial h / \partial y)$, non può avere ordine di grandezza superiore a λ , pertanto:

$$\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial y} \ll 1$$

ovvero il carico piezometrico può essere considerato, con buona approssimazione, costante lungo la direzione y , normale alla superficie, e dunque funzione della sola x . Esso può essere determinato a

partire dai valori che assume all'esterno dello strato limite, nella zona in cui è possibile utilizzare la formulazione dei flussi potenziali e, dal punto di vista dello strato limite, può essere considerato come un dato del problema.

In base alle considerazioni fatte sinora, rimane quindi da risolvere, un sistema di due equazioni nelle due incognite u_x e u_y : l'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes proiettata secondo l'asse x , nella quale sono stati trascurati i termini di ordine λ od inferiore (*equazione di Prandtl* (Prandtl, 1904):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \end{cases} \quad (373)$$

9.2. Stato di tensione

Si vuole valutare l'ordine di grandezza degli sforzi tangenziali nello strato limite utilizzando un procedimento simile a quello del paragrafo precedente. Consideriamo innanzitutto l'equazione costitutiva (148), scritta per fluidi incomprimibili:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{e}}$$

ed adimensionalizziamola utilizzando le scale definite al paragrafo precedente, e la stessa scala della pressione (ρu_∞^2) per adimensionalizzare le tensioni, $\underline{\underline{\tau}} = \rho u_\infty^2 \underline{\underline{\tau}}^*$:

$$\underline{\underline{\tau}}^* = -p^* \underline{\underline{I}} + \frac{2}{R_e} \underline{\underline{e}}^* \quad (374)$$

La componente τ_{xy} è data da:

$$\tau_{xy}^* = \frac{2}{R_{eL}} e_{xy}^* = \frac{1}{R_{eL}} \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x^*} \right).$$

$\frac{1}{\lambda} \quad \frac{\lambda}{1}$

Nella parentesi all'ultimo membro, il primo termine è di ordine $1/\lambda$, mentre il secondo è di ordine $\lambda/1$; si può dunque trascurare il secondo termine rispetto al primo:

$$\tau_{xy}^* = \frac{2}{R_{eL}} e_{xy}^* = \frac{1}{R_{eL}} \frac{\partial u_x^*}{\frac{1}{\lambda} \frac{\partial y^*}{\lambda^2}} \quad (375)$$

e, ricordando che $1/R_{eL}$ è di ordine λ^2 , otteniamo:

$$\tau_{xy}^* \propto \frac{\lambda^2}{\lambda} = \lambda \propto \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_\infty}} \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (376)$$

avendo tenuto conto dell'ordine di grandezza di λ espresso nella (371). Passando alle grandezze dimensionali otteniamo:

$$\tau_{xy} \propto \sqrt{\rho u_{\infty}^3 \mu} \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (377)$$

Questa relazione vale a qualsiasi quota interna allo strato limite, ma è particolarmente significativa calcolata in corrispondenza della parete, dove ci permette di ricavare che gli sforzi tangenziali alla parete τ_0 , sono inversamente proporzionali alla radice quadrata della distanza dal bordo d'attacco, L , e direttamente proporzionali alla velocità del flusso indisturbato elevato alla 3/2; infatti, attraverso gli sforzi alla parete, τ_0 , possiamo calcolare la forza per unità di larghezza esercitata dal fluido nel lambire una lastra piana di lunghezza complessiva d :

$$D = \int_0^d \tau_0 dx \propto \sqrt{\rho u_{\infty}^3 \mu} \sqrt{d} \quad (378)$$

9.3. Spessore dello strato limite

La definizione dello spessore δ dello strato limite non può essere data in modo univoco poiché non esiste una separazione netta tra la zona in cui gli effetti della viscosità sono trascurabili e la zona in cui è necessario tenerne conto. In generale, esso è caratterizzato da un difetto di velocità, rispetto alla zona esterna, e si fa spesso riferimento a questa caratteristica per giungere ad una definizione.

Prandtl propose di definire altezza dello strato limite, come quella distanza dalla parete alla quale la velocità raggiunge una percentuale data (per esempio il 99%) della velocità nella zona esterna. Tale definizione però soffre dell'arbitrarietà della percentuale per cui si considerano coincidenti le velocità all'interno dello strato limite con quella del flusso esterno. Se tale costante è scelta in modo che la differenza sia troppo elevata si escludono dallo strato limite delle zone in cui gli effetti della viscosità risultano ancora rilevanti, se la differenza è piccola si includono zone ove la viscosità ha un ruolo irrilevante. Per eliminare questi inconvenienti si introducono altre definizioni che, essendo di natura integrale, non dipendono da scelte arbitrarie.

9.3.1. Spessore di spostamento

Come accennato in precedenza, alla presenza dello strato limite corrisponde una diminuzione della velocità in prossimità della parete che determina una diminuzione della portata (ovvero del flusso volumetrico) fluente attraverso una sezione ortogonale al flusso e che si estende dalla superficie della lastra fino all'infinito. Possiamo definire lo spessore dello strato limite in base a questo effetto: immaginiamo di schematizzarlo come l'annullarsi della velocità per uno spessore δ_1 mentre il resto del flusso rimane indisturbato, e definiamo δ_1 in modo che determini la stessa diminuzione di portata che si verifica a causa dell'effettivo campo di velocità: per tale altezza, le due aree campite in Figura 88 sono uguali tra loro. Ragioniamo su di uno strato di spessore unitario in direzione ortogonale al moto: la riduzione di portata dovuta all'annullamento della velocità in un strato di spessore δ_1 è pari al prodotto della velocità esterna, u_e per lo spessore δ_1 . La riduzione di portata dovuta alla presenza dello strato limite è invece $\int_0^{\infty} (u_e - u_x) dy$, quindi:

$$\delta_1 = \frac{1}{u_e} \int_0^{\infty} (u_e - u_x) dy \quad (379)$$

Lo spessore di spostamento δ_1 è la distanza di cui si spostano, nella direzione ortogonale al corpo, le linee di corrente lontane da esso, per effetto della riduzione di velocità dovuta alla presenza dello strato limite.

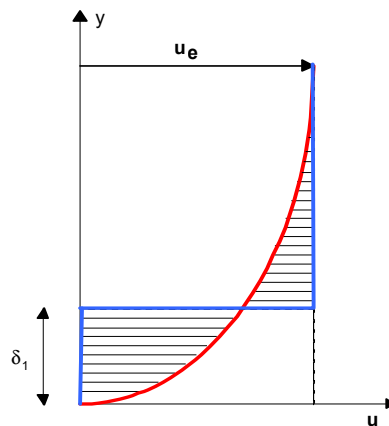


FIGURA 88

9.3.2. Spessore di quantità di moto

Utilizzando la stessa schematizzazione dello strato limite si può ottenere un'altra definizione di spessore a partire dalla variazione di quantità di moto in direzione x che genera la diminuzione di velocità in prossimità della parete. Procediamo in modo analogo a quanto fatto per lo spessore di spostamento, e immaginiamo una configurazione schematica nella quale la velocità è uniforme ovunque tranne che per uno strato in prossimità della parete nel quale la velocità è nulla. Definiamo *spessore di quantità di moto*, δ_2 , lo spessore che deve avere questo strato per determinare una variazione del flusso di quantità di moto uguale a quella prodotta dalla presenza dello strato limite.

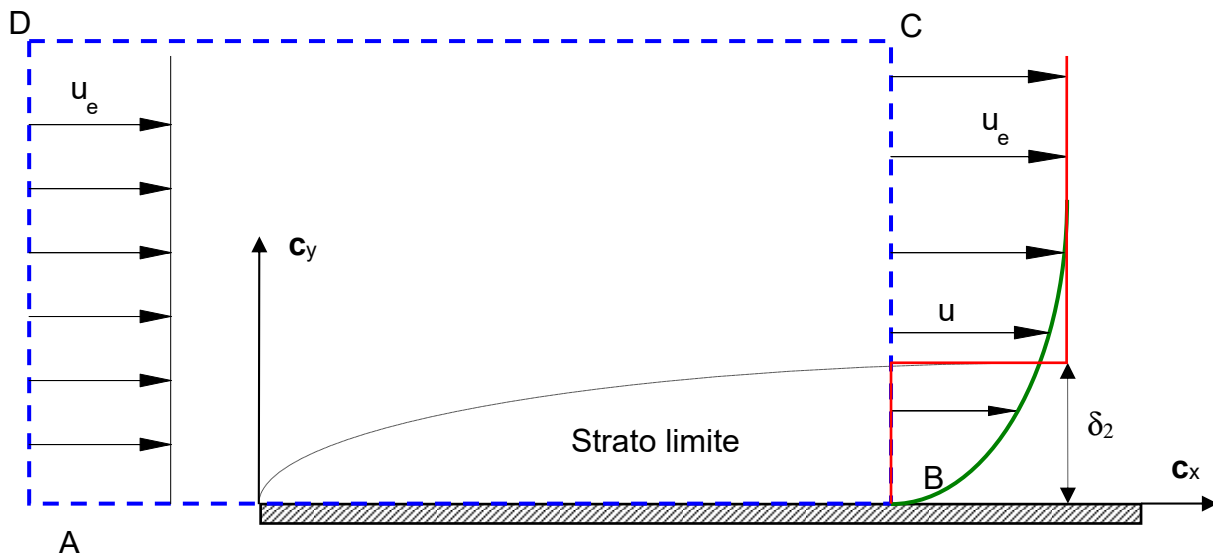


FIGURA 89

Consideriamo ancora una volta una profondità unitaria in direzione ortogonale al moto: la variazione di flusso di quantità di moto in direzione x determinata dall'annullarsi della velocità in uno strato δ_2 è pari a $-\rho u_e^2 \delta_2$; per calcolare invece la variazione di quantità di moto dovuta alla presenza dello strato limite, facciamo riferimento al volume di controllo V_c , indicato con la linea tratteggiata in Figura 89, scelto in modo che il lato AD sia attraversato dal flusso indisturbato u_e , e la sua altezza, $\Delta \rightarrow \infty$, sia tale che il lato CD sia esterno allo strato limite. La variazione dovuta allo

strato limite sarà data dalla differenza tra il flusso di quantità di moto del flusso indisturbato, attraverso la sezione AD, ed il flusso di quantità di moto attraverso le superficie BC e CD. Avremo dunque:

$$M_{AD} = \int_0^{\infty} \rho u_e^2 dy; \quad M_{BC} = \int_0^{\infty} \rho u_x^2 dy.$$

Il flusso attraverso il lato CD si può calcolare come il prodotto del flusso di massa attraverso quella superficie moltiplicato per la velocità lungo x del fluido che, sul lato CD, è proprio pari ad u_e , per averlo scelto esterno allo strato limite. Nell'ipotesi di fluido incomprimibile, il flusso di massa attraverso CD si può calcolare come la differenza tra quello entrante da AD e quello uscente

attraverso BC, $\int_0^{\infty} \rho(u_e - u_x) dy$, quindi si avrà:

$$M_{CD} = \int_0^{\infty} \rho u_e (u_e - u_x) dy.$$

Infine si può scrivere la variazione di flusso di quantità di moto:

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_{BC} + M_{CD} - M_{AD} = \int_0^{\infty} \rho u_x^2 dy + \int_0^{\infty} \rho u_e (u_e - u_x) dy - \int_0^{\infty} \rho u_e^2 dy = \\ &= - \int_0^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy \end{aligned}$$

Uguagliando alla variazione di quantità di moto dovuta all'annullarsi della velocità per uno spessore δ_2 si ottiene l'espressione cercata:

$$\boxed{\delta_2 = \frac{1}{u_e^2} \int_0^{\infty} u_x (u_e - u_x) dy = \int_0^{\infty} \frac{u_x}{u_e} \left(1 - \frac{u_x}{u_e} \right) dy.} \quad (380)$$

9.4. Resistenza di una lastra piana

Lo spessore di quantità di moto è strettamente legato alla resistenza offerta da un corpo investito da un fluido in conseguenza della generazione dello strato limite. Consideriamo, ad esempio, il caso di una lastra piana, di lunghezza L, disposta orizzontalmente, investita da un flusso uniforme di velocità u_e , ed applichiamo l'equazione globale della quantità di moto al volume ABCD, ragionando per unità di lunghezza nella direzione ortogonale al piano del disegno e proiettandola in direzione x:

$$I_x + M_x = \Pi_x + G_x$$

il termine di inerzia locale, I_x , è nullo perché il problema è stazionario, il termine G_x è nullo perché la gravità non ha componente in direzione orizzontale, il termine Π_x , rappresenta invece le forze di superficie che sono applicate al fluido contenuto nel volume di controllo.

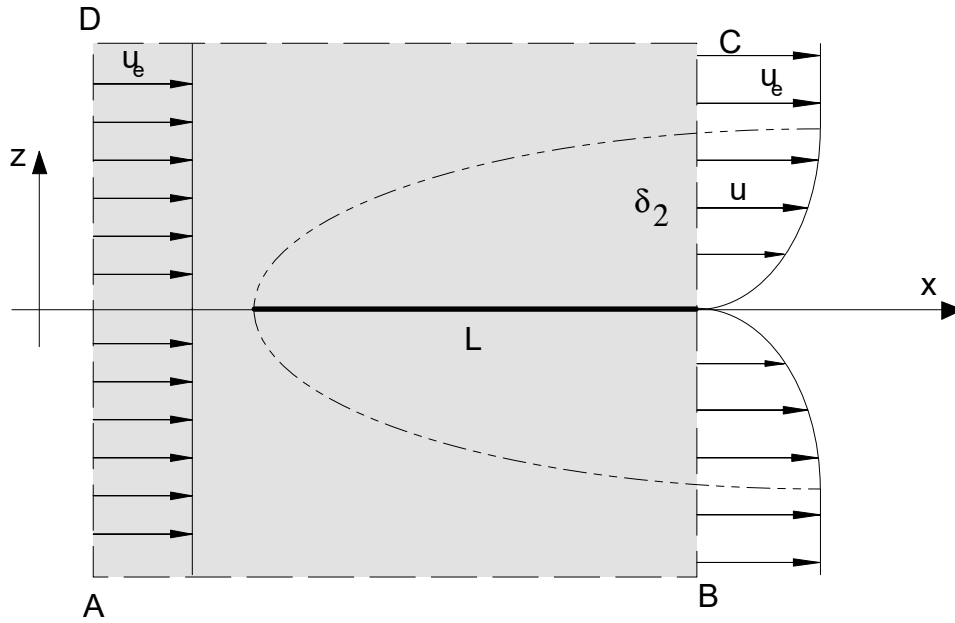


FIGURA 90

In questo caso, le uniche forze di superficie che hanno componente lungo x sono quelle tangenziali che la lastra esercita sul fluido, che sono uguali ed opposte a quelle che il fluido esercita sulla lastra; quindi la resistenza R sarà: $R = -\Pi_x$. Non rimane che calcolare il termine M_x . I flussi attraverso AD e BC sono:

$$M_{AD} = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_e^2 dy; \quad M_{BC} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x^2 dy,$$

avendo tenuto conto del fatto che sono considerati positivi i flussi uscenti dal volume di controllo; quelli attraverso AB e CD possono essere valutati, in analogia a quanto fatto nel calcolo dello spessore di quantità di moto come:

$$M_{AB} + M_{CD} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_e (u_e - u_x) dy.$$

Il flusso totale risulta quindi:

$$\begin{aligned} M &= M_{AB} + M_{BC} + M_{CD} + M_{AD} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x^2 dy + \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_e (u_e - u_x) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_e^2 dy = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy = -2 \int_0^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy = -2 \delta_2(L) \rho u_e^2 \end{aligned}$$

La resistenza offerta dalla piastra al fluido che la lambisce è dunque:

$$\boxed{R = -\Pi_x = -M_x = 2 \delta_2(L) \rho u_e^2} \quad (381)$$

9.4.1. Soluzione di Blasius

Trattandosi di un campo bidimensionale piano è possibile introdurre la funzione di corrente ψ . L'equazione di Prandtl, in forma dimensionale, nel caso stazionario, risulta dunque:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (382)$$

Utilizzando in luogo di y la variabile $\eta = y/\delta$, il campo di integrazione della precedente equazione risulta essere rettangolare. Si vuole verificare se esiste una soluzione a variabili separate per la funzione di corrente:

$$\boxed{\psi(x, \eta) = f(\eta)g(x)} \quad (383)$$

Se tale soluzione esiste, una volta noto il profilo di velocità ad una assegnata x , è possibile ricostruire il profilo in qualsiasi punto, nota la $g(x)$. I profili opportunamente scalati sono tra loro sovrapponibili; per questo si parla di soluzione simile.

Tenendo conto della legge di crescita dello spessore dello strato limite (372) risulta:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\delta}; \quad \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} \quad (384)$$

Indicando con l'apice ' le derivate di f e g rispetto ai relativi argomenti si ha:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = g f' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{g f'}{\delta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{g f''}{\delta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{g f'''}{\delta^3} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{g' f'}{\delta} - \frac{g f'' \eta}{2x \delta} - \frac{g f'}{2 \delta x} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -g' f + g \frac{f' \eta}{2x} \end{aligned} \quad (385)$$

Sostituite nella equazione di Prandtl si ha:

$$f''' + f'' f \left(\frac{g' \delta}{\nu} \right) + \frac{f'^2 \delta}{\nu} \left(\frac{g}{2x} - g' \right) = 0 \quad (386)$$

Affinché la soluzione a variabili separate esista, le quantità tra parentesi debbono risultare costanti; sulla g vengono imposte quindi due condizioni e non è detto che il problema abbia soluzione. La prima condizione sull'equazione differenziale risulta:

$$\frac{g' \delta}{\nu} = \text{cost} \quad (387)$$

senza perdita di generalità si propone la costante uguale a 1/2 e la funzione di corrente uguale a zero per la linea limite coincidente con la piastra; si ha:

$$g = \sqrt{v u_{\infty} x} \quad (388)$$

L'espressione ottenuta per la g porta ad affermare che anche la seconda quantità tra parentesi nella (386) è costante, in particolare è zero. Per trovare l'andamento della velocità nella direzione ortogonale alla parete si deve integrare la seguente equazione differenziale alle derivate ordinarie del terzo ordine (*equazione di Blasius*):

$$f''' + \frac{1}{2} f'' f = 0 \quad (389)$$

Le condizioni ai limiti sono:

- alla parete $\eta=0$:

$$u = \frac{g f'}{\delta} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \quad (390)$$

$$v = -g' f + \frac{g f' \eta}{2x} = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (391)$$

- al di fuori dello strato limite $\eta \gg 1$:

$$u = u_{\infty} = \frac{g f'}{\delta} = \frac{\sqrt{v u_{\infty} x}}{\sqrt{\frac{xv}{u_{\infty}}}} f'(\eta) \Rightarrow f'(\eta) = 1 \quad (392)$$

Poiché non si hanno tutte le condizioni iniziali per $\eta=0$, si impone, per potere integrare la (389), un valore iniziale per f'' ripetendo il procedimento di integrazione fin tanto che la condizione finale (392) non è soddisfatta a meno di un prefissato errore. La condizione iniziale sulla derivata seconda che permette di soddisfare le condizioni ai limiti è:

$$f''(0) = 0.332 \quad (393)$$

Nella Figura 91 è riportato l'andamento di $f(\eta)$, $f'(\eta)$ ed $f''(\eta)$. Lo spessore dello strato limite δ , per il quale la velocità si discosta dell'1% dalla u_{∞} , si ottiene identificando il valore di η per il quale $f' = 0.99$; tale valore risulta circa pari a 5, quindi la legge di crescita è:

$$\eta = 5 \sqrt{\frac{v x}{u_{\infty}}} \quad (394)$$

Lo sforzo tangenziale alla parete è dato da:

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{g f''}{\delta^2} = \mu \frac{u_{\infty}}{\delta} f''(0) \quad (395)$$

il coefficiente di attrito locale è quindi:

$$c_f(x) = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{Re_x}} \quad (396)$$

con $Re_x = \rho u_\infty x / \mu$. La resistenza della lastra risulta:

$$R = 2 \int_0^L \tau_0 dx = 4f''(0) \sqrt{u_\infty^3 \mu \rho L} \quad (397)$$

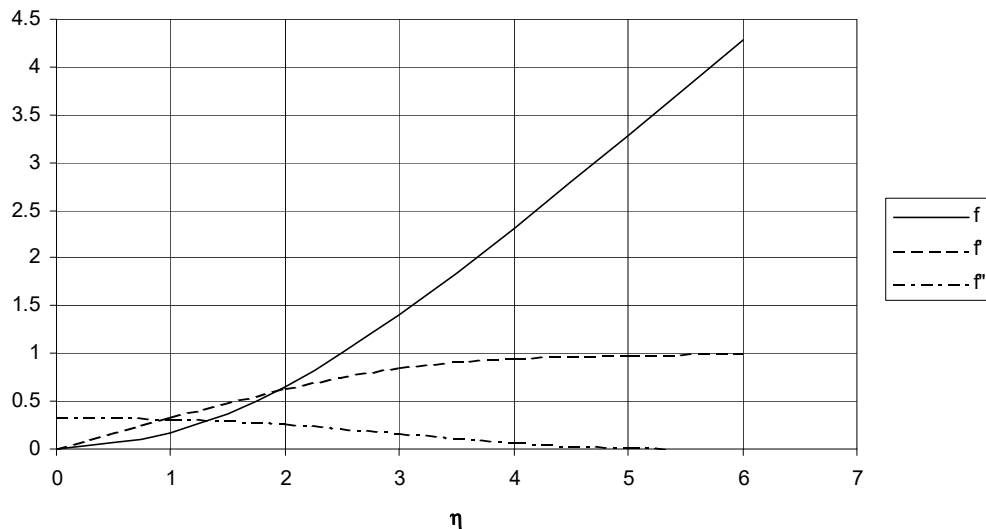


FIGURA 91

9.5. Separazione dello strato limite

Quando il fluido che investe una parete è costretto a repentini cambiamenti di direzione può avvenire la cosiddetta *separazione della vena fluida*: la linea di corrente che lambisce la parete si stacca e, a valle di questa separazione, si crea una zona vorticoso nella quale il moto non contribuisce al flusso medio del fluido ma ha la sola conseguenza di determinare elevati tassi di dissipazione di energia. Questo fenomeno può avvenire sul dorso di un profilo alare investito da un flusso, quando esso sia posto ad un angolo di attacco sufficientemente grande rispetto al flusso incidente, oppure in prossimità di oggetti tozzi o, infine, in corrispondenza di curvature della parete (per esempio l'allargamento di un tubo) che determinino un gradiente di pressione avverso (Figura 92).

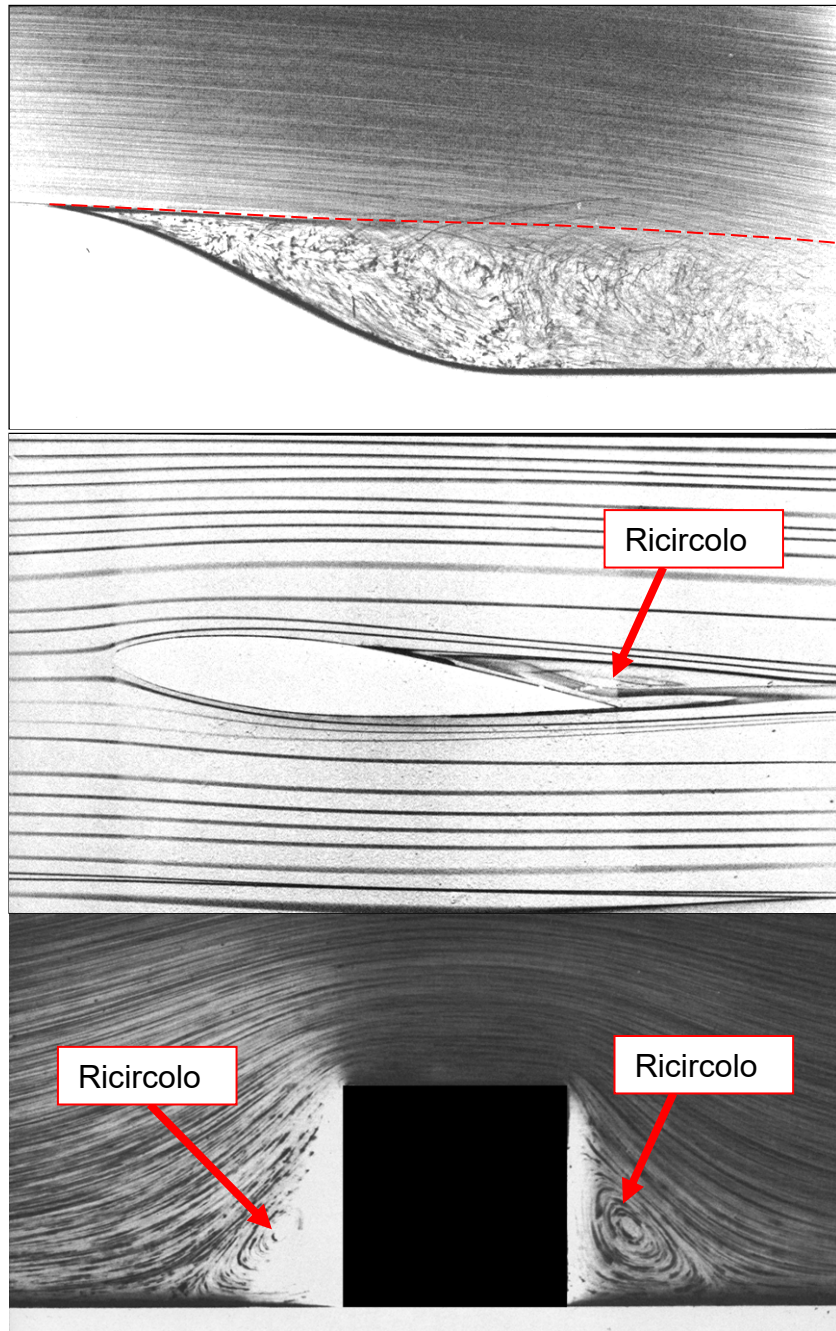


FIGURA 92

Il meccanismo attraverso il quale avviene il distacco è schematizzato in Figura 93, nella quale sono rappresentati i profili di velocità in 3 sezioni di un flusso che incontra un gradiente avverso di pressione a causa di un'espansione. Nel profilo S1, prima del distacco della vena, la velocità in prossimità della parete è ovunque positiva e la derivata $u_{x,y} > 0$; andando verso valle, la velocità diminuisce sempre più all'interno dello strato fino a quando, nel punto di separazione, il profilo ha tangente verticale alla parete (sezione S2):

$$u_{x,y} \Big|_{y=0} = 0 ; \quad (398)$$

a valle di questo punto si ha una zona di ricircolo, nella quale la velocità in prossimità della parete diventa negativa (sezione S3) e la derivata $u_{x,y}$ alla parete è negativa. L'equazione di Prandtl, in forma dimensionale, scritta sulla parete, dove $u_x = u_y = 0$, è:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} . \quad (399)$$

Questa equazione mette in relazione la concavità o convessità del profilo con il gradiente di carico piezometrico. Il profilo S1 è ovunque convesso nello strato limite ($\partial^2 u_x / \partial y^2 < 0$) e quindi non ha punti di flesso: per la equazione precedente questo profilo è compatibile con un gradiente di carico piezometrico negativo; il profilo S2, invece, cambia concavità e mostra un flesso; poiché la curva è ancora convessa nella parte lontana dalla parete, essa dovrà essere concava in prossimità di essa, questo implica che $\partial^2 u_x / \partial y^2 > 0$ e quindi tale configurazione è compatibile solo con un gradiente di carico piezometrico positivo. Si può concludere quindi che *la separazione dello strato limite può avvenire solo in corrispondenza di una zona nella quale il gradiente di carico piezometrico sia positivo*, ciò corrisponde ad una zona di flusso rallentato (Prandtl, 1904). Se consideriamo, ad esempio, il flusso all'interno di un condotto nel quale sia introdotta una diminuzione locale della sezione, l'eventuale distacco dello strato limite avviene generalmente prima nella zona di espansione che non in quella di contrazione.

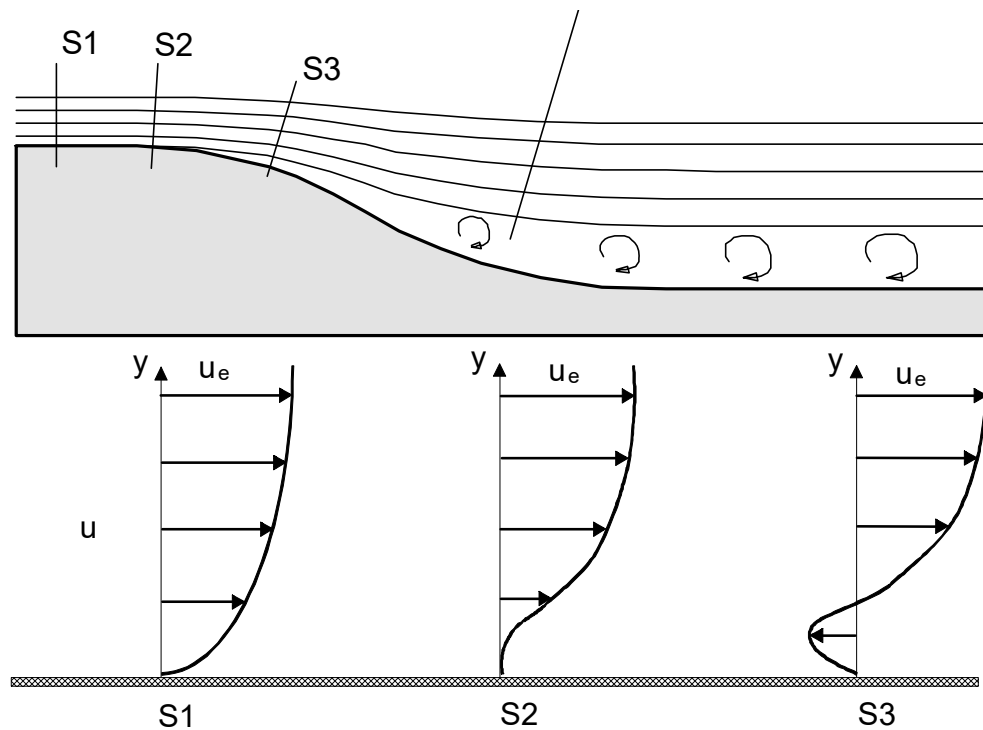


FIGURA 93

10. TURBOLENZA

10.1. Definizione

Nella trattazione sinora svolta, è stata fatta l'ipotesi implicita che i flussi studiati fossero deterministici, nel senso che, una volta note le equazioni che li reggono con le loro condizioni iniziali ed al contorno, fosse possibile, almeno in linea di principio, risolverle e prevedere l'evoluzione del sistema per un intervallo di tempo finito. In effetti, vi sono situazioni nelle quali questa prevedibilità viene a mancare, ed il moto si dice *turbolento*, distinguendolo dai moti prevedibili che si dicono *laminari*. Si può avere flusso turbolento a valle di una separazione dello strato limite, oppure nel flusso ad elevato numero di Reynolds in un condotto, ed in molti altri casi. In effetti, la maggior parte dei flussi di carattere ingegneristico sono turbolenti.

Il regime turbolento nel moto di un fluido è caratterizzato, in relazione al regime laminare, dai seguenti aspetti:

- il movimento è disorganizzato ed è irregolare nel tempo e nello spazio;
- il moto turbolento è *sensibile alle condizioni iniziali*, nel senso che piccole modifiche danno luogo a successivi grandi cambiamenti: la sensibilità alle condizioni iniziali è ciò che caratterizza un sistema caotico;
- i fenomeni di dispersione sono molto accentuati;
- gli esperimenti non sono ripetibili; per esempio, se si ripete uno stesso esperimento più volte con le stesse condizioni iniziali e al contorno, la velocità in un assegnato punto ed in un assegnato istante risulta diversa in ogni realizzazione dell'esperimento.

Le caratteristiche caotiche di un moto turbolento e la non prevedibilità dei suoi dettagli non significano che non esista una relazione di causa ed effetto che regola il verificarsi delle fluttuazioni turbolente, la loro apparente aleatorietà è solo un effetto della sensibilità alle condizioni iniziali. Analizziamo il problema più in dettaglio: in un sistema sensibile alle condizioni iniziali una perturbazione infinitesima porta a variazioni finite nell'evoluzione del sistema nell'arco di un tempo finito; in un sistema deterministico invece, ovvero non sensibile alle condizioni iniziali, una perturbazione infinitesima porta ad una variazione infinitesima dell'evoluzione in un intervallo di tempo finito.

Per chiarire questo punto immaginiamo di condurre un semplice esperimento: consideriamo il flusso all'interno di un condotto (Figura 94), e supponiamo di rilasciare, all'istante t_0 , una particella, P, nella posizione $\mathbf{x}_0$. Dopo un tempo finito, Δt , la particella si troverà nella posizione $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0 + \Delta t)$. Se ripetiamo l'esperimento, nel posizionare la particella P', commetteremo necessariamente un errore, tutt'al più infinitesimo, ϵ . Se il flusso è laminare, dopo l'intervallo Δt , l'ordine dell'errore sarà di ordine $\lambda|\epsilon|$, con λ una costante di ordine 1, cioè dello stesso ordine di grandezza di ϵ (Figura 94a). Quindi se abbiamo identificato la posizione iniziale della particella con un errore così piccolo da essere trascurabile, anche l'errore nella posizione finale sarà trascurabile. Conduciamo lo stesso esperimento in un flusso turbolento: in questo caso la particella P', che viene rilasciata con un errore iniziale ϵ , si troverà, dopo lo stesso intervallo di tempo Δt , in una posizione

$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \Delta \mathbf{x}$. In questo caso non si può asserire che $\Delta x = \lambda \varepsilon$ sia dello stesso ordine di grandezza di ε , al contrario, anche se ε è infinitesimo λ può essere molto maggiore di 1 e quindi Δx può risultare una quantità finita (Figura 94b). Questo vuol dire che, per quanto si riduca l'errore iniziale, l'errore nella determinazione della posizione finale della particella rimane finito, e quindi non trascurabile: di fatto non è possibile prevedere, quale sarà la posizione finale della particella con un errore trascurabile.

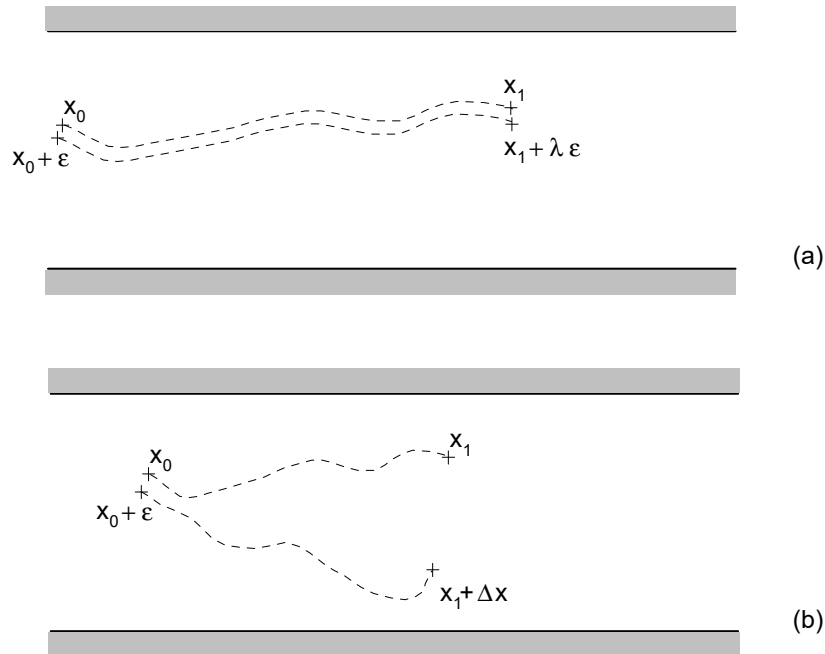


FIGURA 94

Per individuare quali parametri influenzino il fatto che un flusso sia laminare o turbolento affrontiamo il problema dal punto di vista della stabilità: se il moto è laminare una perturbazione cede energia al flusso e quindi tende a smorzarsi per effetto della viscosità, quando invece gli effetti di smorzamento della viscosità non sono sufficienti la perturbazione assorbe energia dal flusso e tende quindi ad essere amplificata, passando da infinitesima a finita in un tempo finito e il flusso è turbolento. L'analisi dimensionale condotta quando abbiamo ricavato l'equazione di Navier-Stokes adimensionalizzata (159) ci ha permesso di evidenziare il fatto che il parametro che definisce l'ordine di grandezza dei termini (stabilizzanti) viscosi rispetto a quelli inerziali (che sono instabilizzanti), è il numero di Reynolds:

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

Quindi possiamo dedurre che esisterà un valore critico del numero di Reynolds, Re_c , che separa i due comportamenti: per $Re > Re_c$ prevale l'effetto instabilizzante dei termini inerziali e il flusso è turbolento, mentre per $Re < Re_c$ il flusso è laminare. Ad esempio il flusso diventa turbolento:

- in un condotto a sezione circolare quando $Re = \frac{UD}{\nu} \geq 2000$ (essendo U la velocità media, D il diametro del condotto e ν la viscosità cinematica);
- nello strato limite, quando $Re = \frac{\delta_1 u_e}{\nu} \geq 600$ (essendo u_e la velocità al di fuori dello strato limite, e δ_1 lo spessore di spostamento).

10.2. Descrizione statistica della turbolenza

La sensibilità alle condizioni iniziali che caratterizza la turbolenza fa perdere ogni interesse nel cercare di prevedere il comportamento della singola particella fluida o l'evoluzione del campo di moto nella singola realizzazione di un esperimento. In effetti viene a mancare uno dei fondamenti della indagine scientifica: la ripetibilità degli esperimenti. Anche l'avere a disposizione una soluzione analitica del sistema di equazioni differenziali che regge il fenomeno (Navier-Stokes, continuità, ecc.) non porta a risultati utili a prevedere il fenomeno perché i risultati ottenuti sono rappresentativi solo di *quella* configurazione e di nessun'altra anche se infinitamente vicina ad essa.

Sfortunatamente, nella realizzazione concreta di un esperimento le condizioni iniziali ed al contorno non saranno mai *esattamente* quelle imposte per ottenere la soluzione analitica, e dunque l'evoluzione sarà completamente diversa da quella prevista.

Conviene allora considerare il fenomeno come aleatorio e condurne una analisi statistica. Dovremo allora ripetere lo stesso esperimento per un numero molto elevato (teoricamente infinito) di volte (ciascuna esperienza che riproduce le stesse condizioni sarà chiamata *realizzazione* dell'esperimento) e fare un'analisi statistica dei risultati ottenuti nelle diverse realizzazioni dell'esperimento.

Riprendendo l'esempio precedente, si tratta di ripetere un gran numero di volte l'esperimento nel quale viene rilasciata una particella sempre dallo stesso punto e sempre allo stesso istante, t_0 (Figura 95). Ad ogni realizzazione dell'esperimento la posizione finale della particella sarà diversa, e dovremo fare un'analisi statistica di tutte le posizioni ottenute al tempo $t_0 + \Delta t$.

10.2.1. Media di insieme e media temporale

Supponiamo di ripetere N volte un esperimento e misurando una componente della velocità in un dato punto, $\mathbf{x}$, e ad un dato istante t , misurato a partire dall'inizio dell'esperimento. Si ottiene così un insieme di valori $u^{(i)}$ di una componente della velocità, con $i=1, \dots, N$.

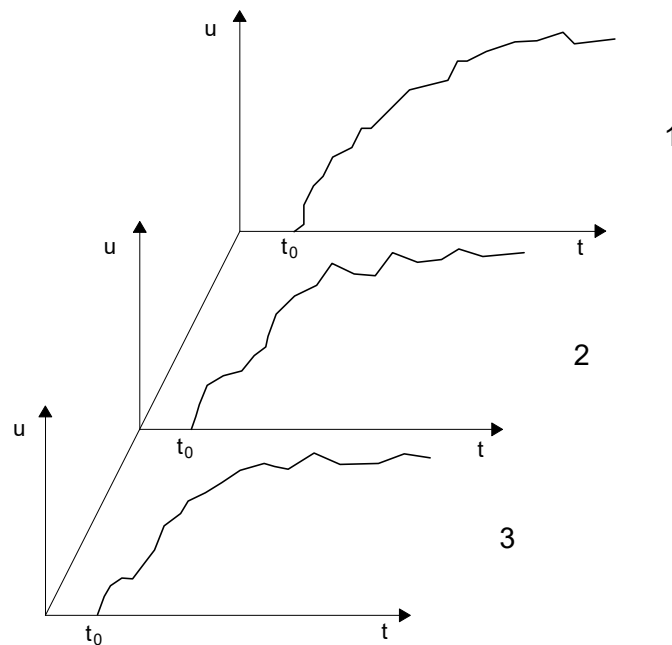


FIGURA 95

La *media di insieme* di tutti i valori di u nelle diverse realizzazioni al medesimo istante e nel punto $\mathbf{x}$ è data da:

$$\bar{u}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(N)}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^{(k)}$$

In un assegnato intervallo temporale, T , la turbolenza è detta stazionaria se le statistiche della turbolenza fatte su diverse realizzazioni dell'esperimento (innanzitutto le medie di insieme) non dipendono dal tempo; in detto intervallo è possibile definire una *media temporale*:

$$\hat{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (400)$$

Il processo è detto *ergodico* se la media di insieme e la media temporale coincidono. Per quanto dimostrare in modo rigoroso che un fenomeno sia ergodico è tutt'altro che semplice, l'esperienza permette di affermare che l'ipotesi di ergodicità è sempre soddisfatta nei fenomeni fisici reali quando sono statisticamente stazionari.

Osserviamo infine che l'operatore media statistica è un operatore lineare per cui può essere scambiato nell'ordine di applicazione, con altri operatori lineari, perciò:

$$\overline{(u_t)} = (\bar{u})_t ; \overline{(u_i)} = (\bar{u})_i .$$

10.2.2. Densità di probabilità

Sempre a partire dall'insieme di dati ottenuto misurando la grandezza u al tempo t , nella posizione $\mathbf{x}$, in N realizzazioni di un esperimento, introduciamo innanzitutto la *funzione di ripartizione*:

$$F(u) = \frac{N_u}{N} \quad (401)$$

dove $u^{(k)}$ è il valore misurato nella k -esima realizzazione ed N_u è il numero di realizzazioni per le quali $u^{(k)} < u$. Data la sua definizione, la funzione di ripartizione è monotona crescente. La *funzione densità di probabilità* è la data dalla derivata rispetto ad u della funzione di ripartizione:

$$p(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial u} \quad (402)$$

ed è tale che il valore $p(u)du$ rappresenta la probabilità che la velocità assuma in una realizzazione un valore compreso tra u ed $u+du$. Per questo motivo, essa può anche essere espressa come:

$$p(u) = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{N_{u, \Delta u}}{N \Delta u} \quad (403)$$

essendo N il numero di prove effettuate ed $N_{u, \Delta u}$ il numero di realizzazioni in cui la velocità assume un valore compreso tra u e $u+\Delta u$.

Per mezzo della densità di probabilità è possibile ricavare la media di insieme:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u p(u) du . \quad (404)$$

10.2.3. Momenti di ordine superiore

Le grandezze che caratterizzano il moto turbolento, ed in particolare le velocità, possono essere decomposte in valore medio e uno scostamento dal valor medio detto parte fluttuante, secondo quella che viene chiamata *decomposizione di Reynolds*:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (405)$$

Per ciascuna componente può essere valutato il momento centrale del secondo ordine (*scarto quadratico medio*):

$$\sigma_i^2 = \overline{u_i'^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \bar{u}_i)^2 \quad (406)$$

avendo indicato con σ_i la *deviazione standard*, ovvero la radice quadrata dello scarto quadratico medio, la quale rappresenta una misura della tipica fluttuazione di velocità attorno al valor medio. Questa quantità può anche essere espressa per mezzo della densità di probabilità come:

$$\sigma_i^2 = \overline{u_i'^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i'^2 p(u_i') du_i' \quad (407)$$

Si definisce intensità turbolenta in direzione x_i :

$$I_i = \sqrt{\overline{u_i'^2}} / |\bar{\mathbf{u}}| \quad (408)$$

L'energia cinetica media della turbolenza $\bar{e}$ è data da:

$$\bar{e} = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) = \frac{\overline{u_j' u_j'}}{2} \quad (409)$$

Considerati i momenti del terzo e quarto ordine:

$$\overline{u'^3} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \bar{u}_i)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} u'^3 p(u') du' ; \quad \overline{u'^4} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \bar{u}_i)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} u'^4 p(u') du'$$

è possibile definire i fattori di forma per la distribuzione di probabilità:

– dissimmetria (*skewness*):

$$S = \overline{u'^3} / \sigma^3 \quad (410)$$

(nullo nel caso di distribuzione simmetrica);

– appiattimento (*kurtosis*):

$$K = \overline{u'^4} / \sigma^4 \quad (411)$$

che dà una misura della presenza di eventi rari ma intensi.

10.2.4. Correlazioni

Siano u'_i e u'_j le parti fluttuanti delle componenti della velocità in due punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ valutate in due istanti t_1 e t_2 ; la *correlazione spazio-temporale* è definita dalla relazione:

$$R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) = \overline{u'_i(\mathbf{x}_1, t_1) u'_j(\mathbf{x}_2, t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_i(\mathbf{x}_1, t_1) u'_j(\mathbf{x}_2, t_2) p(u'_i, u'_j) du'_i du'_j \quad (412)$$

essendo $p(u'_i, u'_j)$ la funzione densità di probabilità congiunta; posto:

$$t_1 = t ; \quad t_2 = t + \tau ; \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x} ; \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{r}$$

si indica la correlazione spazio-temporale in forma più sintetica:

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) = R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2)$$

R_{ij} risulta un tensore del secondo ordine simmetrico.

In modo analogo è possibile definire correlazioni spazio-temporali tra due grandezze scalari (ad esempio pressione e temperatura, la correlazione in questo caso è uno scalare) o tra grandezze scalari e velocità (la correlazione risulta un vettore).

Il coefficiente di correlazione ρ_{ij} è definito dalla relazione:

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) = \frac{R_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (413)$$

essendo valida l'ineguaglianza di Schwartz:

$$\overline{u'_i u'_j} \leq \sqrt{\overline{u'^2_i}} \sqrt{\overline{u'^2_j}}$$

risulta:

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1 \quad (414)$$

Le correlazioni spazio-temporali rappresentano la descrizione statistica delle relazioni che legano i fenomeni che accadono in due diversi punti ed in due diversi istanti. In linea di massima valori assoluti più alti del coefficiente di correlazione indicano una relazione di causalità più stretta, mentre valori prossimi allo zero indicano fenomeni che non sono legati tra loro.

Sono introdotte le seguenti definizioni:

- correlazioni spaziali $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, 0)$, quando le grandezze sono considerate allo stesso istante ($\tau=0$);
- correlazioni temporali $R_{ij}(\mathbf{x}, 0, t, \tau)$, quando le grandezze sono considerate nello stesso punto ($\mathbf{r}=0$);

Dalle proprietà delle correlazione si ricavano caratteristiche fondamentali della turbolenza; si ha:

- turbolenza statisticamente stazionaria quando la funzione densità di probabilità e quindi la correlazione non dipende dal tempo $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau)$;
- turbolenza statisticamente omogenea quando la funzione densità di probabilità e quindi la correlazione non dipende dal punto $R_{ij}(\mathbf{r}, t, \tau)$;
- turbolenza isotropa quando le funzioni di correlazione spaziali non dipendono dalla direzione e quindi solo dal modulo di $\mathbf{r}$, $R_{ij}(\mathbf{x}, |\mathbf{r}|, t, 0)$.

Se non si fornisse energia ad un flusso turbolento, questo è destinato a ridurre la propria energia cinetica a causa della viscosità che la trasforma in calore e quindi il fenomeno non può ritenersi stazionario. Per introdurre energia nel sistema fluidodinamico è necessario produrre delle disomogeneità spaziali (gradienti di velocità) e quindi il flusso non può più ritenersi né omogeneo né isotropo. Pur non potendosi realizzare una condizione di turbolenza stazionaria, omogenea ed isotropa, ad essa si fa idealmente riferimento per studiare in forma più semplice i meccanismi, comunque complessi, che caratterizzano l'evoluzione di un flusso turbolento.

A tale tipo di turbolenza si farà in genere riferimento, pertanto, le correlazioni spazio-temporali sono funzioni di τ e di $|\mathbf{r}|$: $R_{ij}(\mathbf{r}, \tau)$. Risulta:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = R_{ij}(\mathbf{r}, -\tau);$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = R_{ij}(-\mathbf{r}, \tau)$$

quando le due grandezze che entrano nella definizione di correlazione coincidono, si parla di autocorrelazione (ad esempio stessa componente della velocità in forma più sintetica si caratterizzerà la autocorrelazione con un solo pedice: $R_{ii}=R_i$). In base alle relazioni precedenti risulta che le autocorrelazioni sono funzioni simmetriche rispetto all'origine degli assi.

10.2.5. Spettri di potenza

La descrizione statistica della turbolenza, oltre che nel dominio del tempo e dello spazio attraverso la funzione di correlazione, può avvenire nel dominio della frequenza e dei numeri d'onda attraverso le densità spettrali di potenza che sono legati alle funzioni di correlazione attraverso il teorema di Wiener-Khintchine. Facendo riferimento alla turbolenza stazionaria ed isotropa sono definite le seguenti funzioni ottenute mediante operazioni di trasformata di Fourier della funzione di correlazione:

- densità spettrale di potenza nel dominio dei numeri d'onda:

$$B_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (415)$$

- densità spettrale di potenza nel dominio della frequenza:

$$P_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (416)$$

- densità spettrale di potenza nel dominio dei numeri d'onda e delle frequenze:

$$\begin{aligned} E_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ij}(\mathbf{r}, \omega) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (417)$$

Le funzioni B_{ij} e P_{ij} sono funzioni ibride in quanto conservano il duplice significato di correlazione e di spettro. È possibile passare da una descrizione spettrale ad una tramite correlazione mediante operazioni di antitrasformazione di Fourier.

10.3. Le scale della turbolenza

L'autocorrelazione temporale ci dà una indicazione di quanto ciò che succede in un dato punto ed in un dato istante influenza ciò che avviene in quel punto dopo un intervallo di tempo τ . Questa

informazione può anche essere interpretata come una misura della memoria che il fenomeno ad un certo istante ha di quanto è accaduto un intervallo di tempo τ prima. L'autocorrelazione temporale dà una descrizione analitica per ogni diverso intervallo di tempo τ , a volte è però più utile avere una indicazione globale che, con un numero, dia una misura complessiva della memoria che il fenomeno ha di sé stesso; a tal fine si definiscono le cosiddette scale temporali della turbolenza. Naturalmente è possibile ripetere i ragionamenti sopra esposti anche per le correlazioni spaziali e definire delle analoghe scale spaziali.

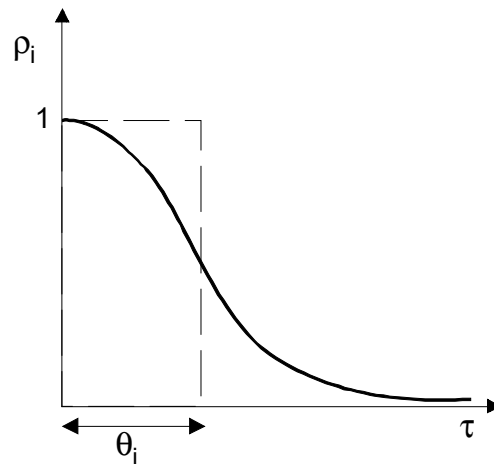


FIGURA 96

10.3.1. Scale integrali

La scala integrale, che, come detto in precedenza, può essere sia temporale sia spaziale, fornisce una valutazione globale della memoria che il fenomeno ha di sé stesso tenendo conto di tutte le strutture che costituiscono la turbolenza, sia le più piccole, alle quali corrispondono τ piccoli, sia le più grandi, che incidono su intervalli di tempo maggiori. In Figura 96 è riportato un tipico andamento del coefficiente di autocorrelazione temporale per una componente della velocità. In generale partendo dal valore unitario ($\rho(0) = 1$ per definizione), il coefficiente di autocorrelazione tende a zero per τ tendente all'infinito poiché due eventi separati da un tempo molto grande tendono ad essere scorrelati tra loro.

L'area compresa tra l'autocorrelazione e l'asse delle ascisse è una misura di quanto a lungo il fenomeno rimane correlato; partendo dalle autocorrelazioni temporali, è dunque definita *scala integrale temporale*:

$$\theta_i = \int_0^{+\infty} \rho_i(0, \tau) d\tau \quad (418)$$

In modo schematico si potrebbe dire che il fenomeno è correlato con se stesso per tempi inferiori a θ_i , ed è scorrelato per tempi superiori.

10.3.2. Scala di Taylor

Se si vuole dare una descrizione complessiva del comportamento delle strutture più piccole, ovvero quelle caratterizzate da scale sia spaziali sia temporali piccole, si fa ricorso alla scala di Taylor, ricavata a partire dalla forma della funzione di autocorrelazione nell'origine.

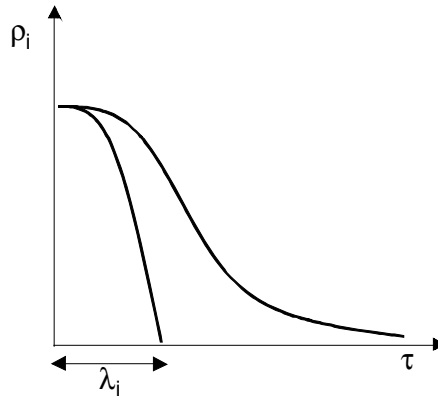


FIGURA 97

Sviluppando in serie di Taylor u'_i , intorno al tempo t ($\tau = 0$), otteniamo:

$$u'_i(\mathbf{x}, t + \tau) = u'_i(\mathbf{x}, t) + u'_{i,\tau} \tau + u'_{i,\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Poiché derivare rispetto a t o rispetto a τ è equivalente, $u'_{i,\tau} = u'_{i,t}$ risulta:

$$R_i(0, \tau) = \overline{u'_i(\mathbf{x}, t) u'_i(\mathbf{x}, t + \tau)} = \overline{u'^2_i} + \overline{u'_i u'_{i,t}} \tau + \overline{u'_i u'_{i,tt}} \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

se supponiamo il fenomeno stazionario, tutte le derivate temporali delle quantità medie si annullano:

$$\overline{u'_i u'_{i,t}} = \frac{1}{2} \overline{u'^2_{i,t}} = 0$$

ed anche:

$$\left(\overline{u'^2_i} \right)_{,tt} = \left(2 \overline{u'_i u'_{i,t}} \right)_{,t} = 2 \overline{u'_i u'_{i,tt}} + 2 \left(\overline{u'_{i,t}} \right)^2 = 0$$

risulta dunque:

$$R_i(0, \tau) = \overline{u'^2_i} - \frac{\tau^2}{2} \overline{(u'_{i,t})^2} + \dots$$

dividendo per la varianza e troncando lo sviluppo al secondo ordine si trova l'equazione della *parabola osculatrice* al coefficiente di autocorrelazione nell'origine:

$$\rho_i(0, \tau) = 1 - \frac{\tau^2}{\lambda_i^2} \quad (419)$$

essendo λ_i la *scala di Taylor*:

$$\lambda_i^2 = \frac{\overline{u'^2_i}}{\overline{(u'_{i,t})^2}} \quad (420)$$

La scala di Taylor è la distanza dall'origine del punto ove la parabola osculatrice interseca l'asse delle ascisse (Figura 97).

In generale la scala di Taylor è di un ordine di grandezza inferiore alla scala integrale e spesso viene indicata con il nome di microscala della turbolenza.

10.4. Ipotesi di Taylor

L'ipotesi di Taylor, o della turbolenza congelata, afferma che per tempi piccoli (rispetto alle scale caratteristiche) le caratteristiche del moto turbolento non variano. Ciò significa che l'evoluzione in un punto di una grandezza turbolenta è uguale alla evoluzione nello spazio qualora ci si muova con la velocità media del fluido ovvero:

$$u'_i(\mathbf{x}, t + \tau) = u'_i(\mathbf{x} - \mathbf{u} \tau, t) \quad (421)$$

Ciò significa che la derivata sostanziale di una generica grandezza fluttuante è nulla. Da un punto di vista fisico questa ipotesi corrisponde ad assumere che il moto medio non influenzi la struttura della turbolenza, ma abbia semplicemente il ruolo di trasportare tali strutture verso valle.

Utilizzando l'ipotesi di Taylor è possibile passare da correlazioni temporali, facilmente desumibili da storie temporali, a correlazioni spaziali.

10.5. Equazioni per le quantità medie

È già stato messo in evidenza come non abbia senso fisico cercare di effettuare delle prognosi sulla evoluzione delle quantità istantanee che caratterizzano un flusso turbolento a causa della sensibilità alle condizioni iniziali. Ciò nondimeno è possibile scrivere delle equazioni che regolano l'evoluzione delle quantità medie le quali, essendo basate sull'insieme di tutte le possibili condizioni iniziali, non possono più risentire di tale sensibilità: ciò implica che per le quantità medie è possibile fare delle previsioni significative. Per ottenere queste equazioni è necessario considerare le equazioni che regolano il moto, effettuare la decomposizione di Reynolds per tutte le grandezze dipendenti ed effettuare poi la media delle equazioni così ottenute. Considereremo, per semplicità, il caso di fluido incomprimibile immerso in un campo gravitazionale.

10.5.1. Decomposizione di Reynolds

Prima di procedere allo studio delle singole equazioni, ricordiamo che la decomposizione di Reynolds prevede che una generica grandezza A , misurata nella singola realizzazione di un esperimento, sia decomposta in una parte media ed uno scostamento rispetto alla media, detto parte fluttuante:

$$A = \bar{A} + A' \quad (422)$$

applicando la media al primo e al secondo membro si ha:

$$\bar{A} = \overline{\bar{A} + A'} = \bar{\bar{A}} + \bar{A'} \quad (423)$$

Poiché l'operatore di media d'insieme è un operatore lineare, abbiamo potuto distribuirlo sui singoli termini della somma. Se osserviamo che $\bar{A}$ è uguale in tutte le realizzazioni dell'esperimento, possiamo concludere che applicargli ulteriormente l'operatore di media non ne cambia il valore: $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Quindi l'equazione precedente diventa: $\bar{A} = \bar{A} + \bar{A'}$ dalla quale si ricava banalmente:

$$\overline{A'} = 0 \quad (424)$$

ovvero, la media di una parte fluttuante è sempre nulla. Si noti inoltre, che nei ragionamenti che seguiranno, useremo frequentemente le proprietà della media come operatore lineare, le quali permettono per esempio di scambiare l'ordine di applicazione con altri operatori lineari. Per esempio avremo:

$$\overline{(A_{,i})} = (\overline{A})_{,i} \quad (425)$$

Consideriamo inoltre un'espressione del tipo: $\overline{A' \cdot \overline{B}}$. Poiché il valore di $\overline{B}$ è uguale in tutte le realizzazioni dell'esperimento (è già un valor medio), può essere portato fuori dall'operatore di media, ottenendo: $\overline{A'} \cdot \overline{B}$. D'altra parte la media di una parte fluttuante è nulla, quindi l'intero prodotto si annulla. Avremo quindi in sintesi che:

$$\overline{A' \cdot \overline{B}} = \overline{A'} \cdot \overline{B} = 0 \quad (426)$$

10.5.2. Equazione di bilancio della massa

Nel caso di fluido incomprimibile l'equazione di bilancio della massa è:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{j,j} = 0 \quad (427)$$

Operando la decomposizione di Reynolds, applicando l'operatore di media ed usando le proprietà degli operatori lineari si ha:

$$\boxed{\overline{(u_j + u'_j)_{,j}} = \overline{u_{j,j}} + \underbrace{\overline{u'_{j,j}}}_{=0} = 0}$$

il termine $\overline{u'_j}$ si annulla in quanto media di una parte fluttuante, quindi rimane:

$$\boxed{\overline{u_{j,j}} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0} \quad (428)$$

che rappresenta l'equazione di continuità per la parte media. Sottraendo la (428) alla (427), si ottiene un'equazione analoga per la parte fluttuante:

$$\boxed{u'_{j,j} = 0} \quad (429)$$

che ci sarà utile nel seguito.

10.5.3. Equazione di Reynolds

Applichiamo ora la decomposizione di Reynolds all'equazione che rappresenta il bilancio della quantità di moto in forma locale, ovvero l'equazione di Cauchy ed applichiamo la media ad entrambi i membri dell'equazione:

$$\overline{\rho(\overline{u_i} + u'_i)_{,t}} + \underbrace{\overline{\rho(\overline{u_j} + u'_j)(\overline{u_i} + u'_i)_{,j}}}_I = -\overline{\gamma z_{,i}} + \overline{(\overline{\tau_{ij}} + \tau'_{ij})_{,j}}$$

nella quale si è tenuto conto che, avendo ipotizzato il fluido incompressibile, la densità, così come il peso specifico, è costante e quindi non soggetta alla decomposizione. Ricordando che la media della somma è uguale alla somma delle medie dei vari termini, sviluppando il prodotto I dell'equazione precedente, e tenendo conto della linearità dell'operatore di media l'equazione diventa:

$$\underbrace{\rho \bar{u}_{i,t}}_I + \underbrace{\rho \bar{u}'_{i,t}}_{II} + \underbrace{\rho \bar{u}_j \bar{u}_{i,j}}_{III} + \underbrace{\rho \bar{u}_j \bar{u}'_{i,j}}_{IV} + \underbrace{\rho \bar{u}'_j \bar{u}_{i,j}}_V + \underbrace{\rho \bar{u}'_j \bar{u}'_{i,j}}_{VI} = \underbrace{-\rho g z_{,i}}_{VII} + \underbrace{\bar{\tau}_{ij,j}}_{VIII} + \underbrace{\bar{\tau}'_{ij,j}}_{IX}.$$

I termini II e IX sono nulli in quanto medie di parti fluttuanti (424), mentre i termini IV e V sono nulli in forza della (426). L'equazione si riduce di conseguenza a:

$$\rho \bar{u}_{i,t} + \rho \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \underbrace{\rho \bar{u}'_j \bar{u}'_{i,j}}_I = -\rho g z_{,i} + \bar{\tau}_{ij,j}. \quad (430)$$

il termine I può essere riscritto usando la regola di derivazione del prodotto:

$$\left(\bar{u}'_j \right)_{,j} = \bar{u}'_{j,j} + \underbrace{\bar{u}'_j \bar{u}'_{j,j}}_I = \bar{u}'_{j,j}; \quad (431)$$

poiché, per l'equazione di bilancio della massa per la parte fluttuante (429), il termine I è nullo, e si ottiene:

$$\rho \bar{u}_{i,t} + \rho \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\rho g z_{,i} + \bar{\tau}_{ij,j} - \rho \left(\bar{u}'_j \bar{u}'_{i,j} \right)_{,j} \quad (432)$$

Se si introduce il cosiddetto *tensore di Reynolds* $\underline{\tau}_R$ definito come:

$$\left(\tau_R \right)_{ij} = -\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j, \quad (433)$$

l'effetto della turbolenza sul moto medio può essere rappresentato come uno stato di tensione aggiuntiva e l'equazione di Cauchy mediata diventa:

$$\rho \bar{u}_{i,t} + \rho \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\rho g z_{,i} + \left(\bar{\tau}_{ij} + \tau_{Rij} \right)_{,j}. \quad (434)$$

Il ruolo svolto dal tensore di Reynolds è formalmente identico a quello svolto dal tensore degli sforzi viscosi, anche se esso non dipende soltanto dalle caratteristiche del fluido come quest'ultimo, ma da quelle della turbolenza e, in ultima analisi, dal flusso stesso. In ogni caso, grazie a questa analogia formale, l'effetto della turbolenza viene rappresentato spesso come quello di uno stato tensionale aggiuntivo (i cosiddetti *sforzi turbolenti*) a quello effettivamente esistente ed il tensore sopra definito viene detto tensore degli sforzi turbolenti. In questa interpretazione, l'equazione per il moto diventa formalmente identica a quella per il moto istantaneo introducendo un sforzo totale pari alla somma degli sforzi viscosi e quelli turbolenti: $\underline{\tau}_T = \underline{\tau} + \underline{\tau}_R$.

Sostituendo le equazioni costitutive per un fluido incompressibile mediate,

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + 2\mu \underline{\underline{e}} = -\bar{p} \delta_{ij} + \mu (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$$

nella (434), come già fatto in precedenza quando si sono ricavate le equazioni di Navier-Stokes, ed introducendo il carico piezometrico, si ottiene, con passaggi e ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti in precedenza, l'equazione di Navier-Stokes per il moto turbolento, altrimenti detta *equazione di Reynolds*:

$$\boxed{\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -gz_{,i} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} + \nu \bar{u}_{i,jj} - \overline{(u'_i u'_j)}_{,j}} \quad (435)$$

Utilizzando la decomposizione di Reynolds si rinuncia a prevedere cosa accade nella singola realizzazione di un esperimento per ottenere delle equazioni prognostiche per le quantità medie che, per loro natura, non risentono delle condizioni iniziali; in questo modo, tuttavia, si hanno a disposizione 4 equazioni (3 componenti dell'equazione vettoriale di Reynolds + 1 di continuità):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_{,t} + \bar{\mathbf{u}}(\nabla \mathbf{u}^t) = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{=R} \end{cases} \quad (436)$$

mentre le incognite sono ora 10: 1 per la pressione media, 3 per la velocità media, e 6 per le componenti del tensore simmetrico τ_R . Il problema così posto non è perciò determinato, sarà necessario individuare altre 6 equazioni che permettano di chiudere il sistema.

10.6. Ipotesi di Boussinesq

Le 6 equazioni mancanti, necessarie per poter risolvere il sistema di equazioni per le quantità medie sono dette *equazioni di chiusura* e si dimostra che non possono essere ricavate a partire dai principi della meccanica dei fluidi. Sarà quindi necessario ricorrere ad equazioni semiempiriche. Ci sono diversi tipi di equazioni di chiusura, di diversa complessità e grado di approssimazione. Data la loro origine empirica però, nessuna di esse ha carattere generale, ma vanno adattate di volta in volta allo specifico tipo di flusso che si sta studiando e poi verificate.

Una delle chiusure più semplici e più diffuse è quella basata sulla cosiddetta Ipotesi di Boussinesq. Secondo questa ipotesi, gli effetti della turbolenza possono in qualche misura essere descritti con un meccanismo simile a quello con cui agisce la viscosità. Supponiamo di avere due strati di fluido separati da una superficie piana che si muovono con differenti velocità medie parallele alla superficie di separazione. In presenza della turbolenza alcune particelle fluide vengono scambiate tra i due strati provocando un rallentamento dello strato più veloce ed un'accelerazione dello strato più lento. In definitiva alla superficie di separazione è come si avesse uno sforzo di taglio direttamente proporzionale alla differenza di velocità tra i due strati ed inversamente proporzionale alla distanza in cui tale differenza si manifesta.

In analogia con le equazioni costitutive per gli sforzi viscosi e, sulla base di quanto osservato in precedenza, Boussinesq ha proposto di assumere che il tensore di Reynolds sia legato alla parte simmetrica del gradiente di velocità media attraverso un *coefficiente di viscosità turbolenta*, μ_T :

$$\boxed{\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_T \bar{e}_{ij} = \mu_T (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})} \quad (437)$$

Una sostanziale differenza tra sforzi viscosi e quelli turbolenti è legata al fatto che mentre ν è una caratteristica del fluido, μ_T , oltre che dal fluido, dipende anche dal tipo di flusso¹⁸.

Con questa ipotesi, l'equazione di Reynolds per la parte media si può riscrivere:

$$\boxed{\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -gz_{,i} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} + (\nu + \nu_T) \bar{u}_{i,jj}},$$

¹⁸ Si consideri infatti che se il flusso è laminare, non ci sono fluttuazioni turbolente quindi $\mu_T = 0$

avendo definito $\nu_T = \mu_T / \rho$. L'ipotesi di Boussinesq, tuttora ampiamente utilizzata, non risulta completamente fondata:

- lo schema proposto vale solo per alcuni tipi di turbolenza, per esempio quella generata in prossimità di una parete lambita da un fluido, ma non in altri, come nel caso della convezione turbolenta;
- le direzioni principali del tensore di Reynolds non coincidono con quelle del tensore velocità di deformazione;
- misure sperimentali evidenziano casi nei quali lo sforzo di taglio turbolento è massimo lì dove non si hanno gradienti di velocità;

Infine questa ipotesi è incongruente da un punto di vista energetico: ponendo $i = j$ nella espressione (437), si ha:

$$\frac{\tau_{R11}}{\rho} = -\overline{u_1'^2} = 2\nu_T \bar{u}_{1,1}; \quad \frac{\tau_{R22}}{\rho} = -\overline{u_2'^2} = 2\nu_T \bar{u}_{2,2}; \quad \frac{\tau_{R33}}{\rho} = -\overline{u_3'^2} = 2\nu_T \bar{u}_{3,3}$$

quindi, l'energia cinetica associata alle fluttuazioni turbolente risulta:

$$\bar{\varepsilon}_T = \frac{1}{2} \left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} \right) = 2\nu_T (\bar{u}_{1,1} + \bar{u}_{2,2} + \bar{u}_{3,3}) = 2\nu_T \bar{u}_{j,j} = 0,$$

la quale risulta nulla poiché nell'ultimo membro compare l'equazione di bilancio della massa in termini di parte media (428); si avrebbe quindi un paradosso, ovvero un moto turbolento con energia cinetica della turbolenza nulla: risultato che conduce alla contraddittoria conclusione che il flusso sia laminare.

10.7. Equazioni globali per i flussi turbolenti

10.7.1. Conservazione della massa

Si vuole trovare una forma dell'equazione globale di conservazione della massa che permetta di fare previsioni per le quantità medie. Consideriamo un fluido barotropico ed ipotizziamo che, essendo esso debolmente comprimibile, la densità sia funzione della sola pressione media:

$$\rho = \rho(\bar{p}) \quad (438)$$

o, che è lo stesso, che le fluttuazioni di densità dovute alle fluttuazioni di pressione siano trascurabili. Per scrivere l'equazione cercata consideriamo l'equazione globale in termini delle quantità istantanee, decomponiamo secondo Reynolds e mediamo l'espressione così ottenuta.

Il principio di conservazione della massa (115), operando la decomposizione di Reynolds e mediando si scrive:

$$\overline{\int_{V_c} \rho_{,t} dV} + \overline{\int_S \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} dS} = 0$$

la quale, ricordando che la media dei termini fluttuanti è nulla e che $\bar{\rho} = \rho$ per l'ipotesi (438), diventa:

$$\int_{V_c} \rho_{,t} dV + \int_S \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (439)$$

Questa equazione, in analogia con la sua versione per le quantità istantanee (116) può essere scritta:

$$\boxed{\overline{m}_{,t} + \overline{\phi}_m = 0}. \quad (440)$$

Questa è la forma dell'equazione globale di conservazione della massa scritta per i flussi turbolenti.

10.7.2. Bilancio della quantità di moto

Seguiamo, per il bilancio della quantità di moto, la stessa procedura descritta nel paragrafo precedente. Consideriamo l'equazione globale (127), mediamola

$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}} = \bar{\Pi} + \bar{\mathbf{G}}$$

e consideriamo i termini uno ad uno.

La variazione di quantità di moto contenuta nel volume di controllo è:

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{u}} dV = \mathbf{I}$$

che ha la stessa forma di quella scritta per il moto istantaneo anche se vi compare la velocità media.

Il flusso medio di quantità di moto è:

$$\bar{\mathbf{M}} = \int_{S_c} \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_c} (\rho \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_c} \rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} \cdot \mathbf{n} dS$$

ed è quindi determinato da due componenti: un flusso dovuto al moto medio, che corrisponde al primo termine dell'ultimo membro, ed un flusso dovuto alle fluttuazioni turbolente, che corrisponde al secondo termine. Indichiamo con $\mathbf{M} = \int_{S_c} (\rho \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS$ il flusso dovuto al moto medio, e con:

$$\Pi_R = - \int_{S_c} \rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}}_R \cdot \mathbf{n} dS \quad (441)$$

il flusso dovuto alle fluttuazioni turbolente, che può essere letto come risultante degli sforzi turbolenti sulla superficie del volume di controllo. Si ha dunque:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - \Pi_R.$$

Le forze di superficie sono:

$$\bar{\Pi} = \int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}') \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{n} dS$$

e raggruppandole con la risultante degli sforzi turbolenti possiamo definire una *risultante degli sforzi totali*:

$$\Pi_T = \bar{\Pi} + \Pi_R = \int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_R) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (442)$$

Le forze di volume sono:

$$\overline{\mathbf{G}} = \overline{\int_{V_c} \rho (\bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}') dV} = \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{f}} dV = \mathbf{G} .$$

Riunendo i risultati sin qui raggiunti nell'equazione globale ne otteniamo la forma per i moti turbolenti:

$$\boxed{\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{II}_T + \mathbf{G}} \quad (443)$$

11. STRATO LIMITE TURBOLENTO

11.1. Transizione dello strato limite

Analizziamo il comportamento di un flusso uniforme che viene in contatto con una parete scabra.

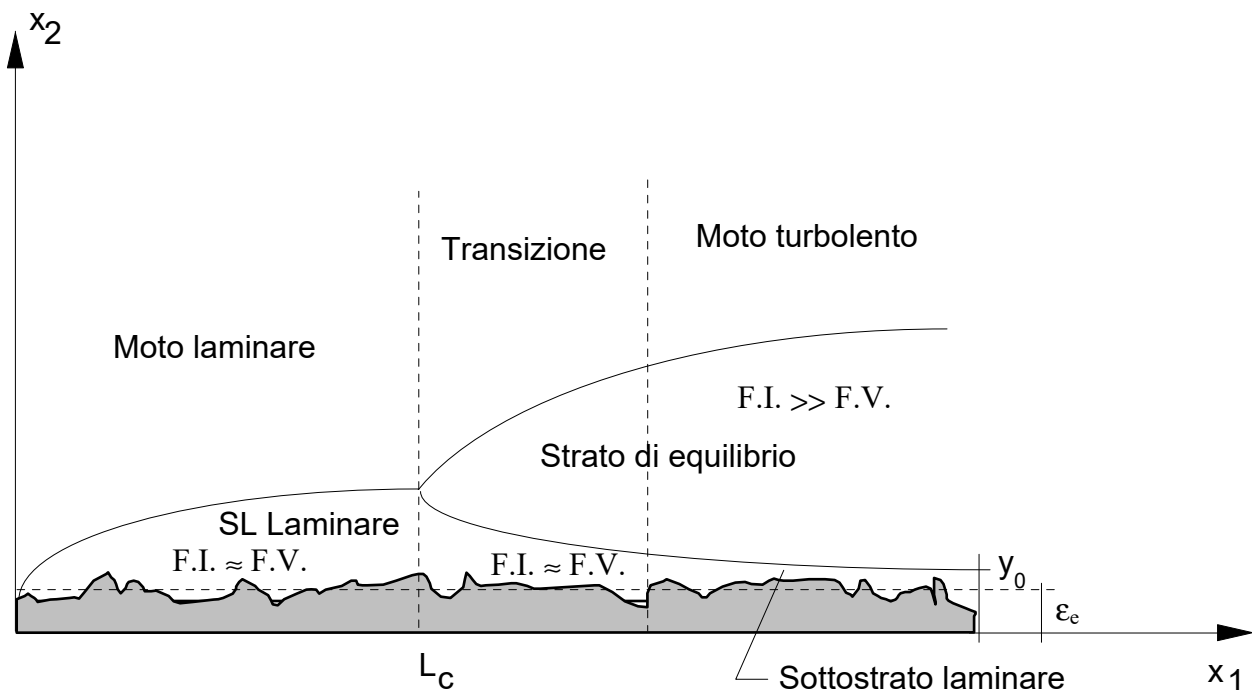


FIGURA 98

Abbiamo visto nel capitolo 9. che lo strato limite nasce all'attacco della parete e comincia ad aumentare di spessore proporzionalmente a $\sqrt{x_1}$. In questa regione, il moto all'interno dello strato limite risulta laminare, ed eventuali disturbi non si propagano, ma si estinguono immediatamente per effetto delle forze viscose, che risultano dello stesso ordine di grandezza di quelle d'inerzia. La zona appena descritta prende il nome di *strato limite laminare*. All'aumentare di x_1 il numero di Reynolds, $Re = Ux_1/\nu$, cresce, quindi le forze di inerzia diventano preponderanti rispetto a quelle viscose ed il flusso diventa turbolento. La transizione tra un tipo di flusso e l'altro avviene per un Re critico, Re_c , il cui valore è stato trovato sperimentalmente essere $Re_c = 465$.

Oltre questo punto il flusso diventa instabile originando due differenti strati che costituiscono lo *strato limite turbolento*. Queste due zone prendono il nome di *strato di equilibrio* e *substrato laminare*.

Lo strato di equilibrio è caratterizzato da un moto turbolento, nel quale i disturbi indotti si propagano in maniera imprevedibile in quanto le forze d'inerzia risultano molto maggiori di quelle

viscose ($Re \gg 1$) e le perturbazioni si amplificano esponenzialmente senza essere efficacemente smorzate dalle forze viscose. Il sottostrato laminare è, invece, una zona in cui, a causa degli elevati gradienti di velocità, le forze viscose hanno lo stesso ordine di grandezza di quelle di inerzia e riescono dunque a smorzare le fluttuazioni turbolente: pertanto il moto risulta laminare. Lo spessore di questo strato, che sarà indicato con y_0 , è solitamente molto piccolo e, a differenza dello spessore dello strato limite laminare, non dipende da x_1 .

Dal punto di vista dello strato di equilibrio possiamo distinguere due situazioni in funzione del rapporto tra l'altezza del sottostrato laminare, y_0 , e quella della scabrezza, ϵ_e :

- $y_0 > \epsilon_e$: in tal caso le asperità della parete sono completamente immerse nel substrato laminare e le perturbazioni che generano vengono immediatamente smorzate: la scabrezza non influenza lo strato di equilibrio, la parete si dice *fluidodinamicamente liscia*;
- $y_0 < \epsilon_e$: in tal caso le asperità sono esterne al substrato laminare e generano perturbazioni nello strato di equilibrio, dove le forze di inerzia sono dominanti e quindi non vengono smorzate: la scabrezza influenza tutto lo strato limite e la parete si dice *fluidodinamicamente scabra*.

Se lo strato limite è generato all'interno di un condotto, o tra due lastre piane parallele, dopo una fase iniziale in cui lo sviluppo non differisce da quello descritto sinora, esso interagisce con quello che si è generato sulla parete opposta. Esaminiamo, per semplicità il caso di un condotto bidimensionale delimitato da due pareti piane infinitamente estese. Possono verificarsi due situazioni differenti: nel primo caso i due strati si incontrano ad una distanza dall'imbocco L_i inferiore alla distanza critica L_c : i due strati si incontrano quando sono ancora laminari e si raccordano tra loro. All'interno del condotto si crea un flusso laminare uniforme, il profilo di velocità in una generica sezione è del tipo parabolico ricavato nel paragrafo 3.9.2. e tale rimane all'aumentare di x_1 (Figura 99).

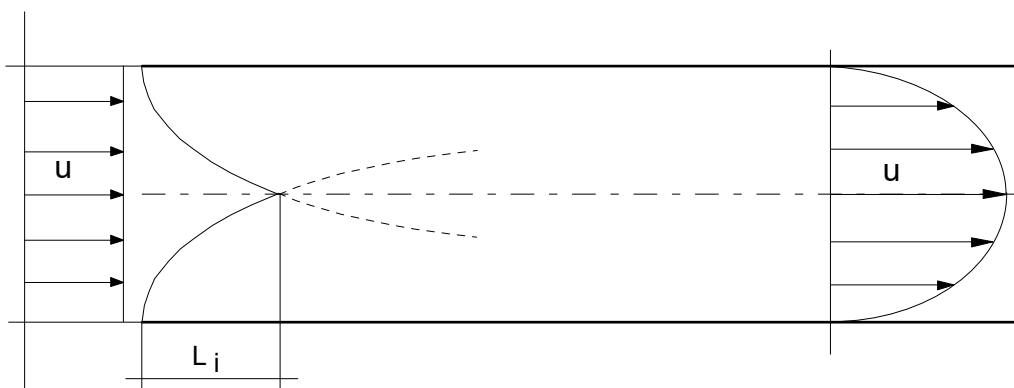


FIGURA 99

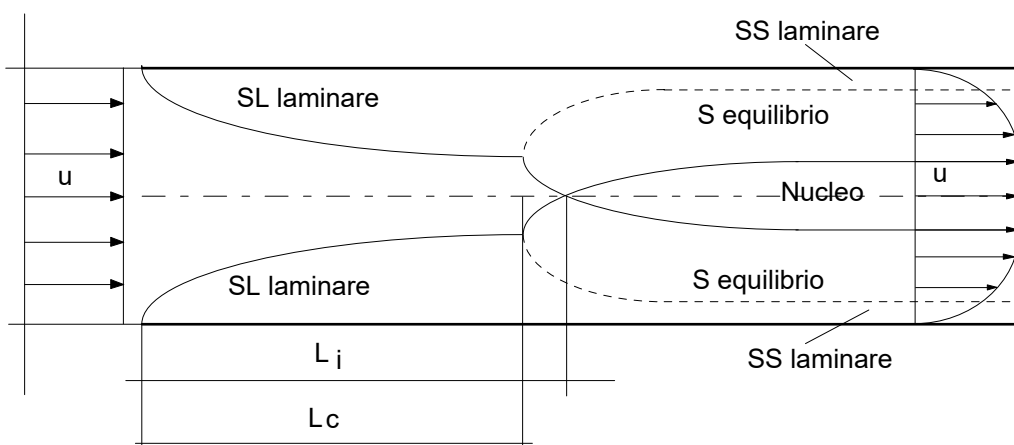


FIGURA 100

Nel secondo caso invece, i due strati limite interagiscono ad una distanza, L_i , maggiore della distanza critica L_c , alla quale avviene la transizione a strato limite turbolento (Figura 100). Si generano quindi un sottostrato laminare ed uno strato di equilibrio in modo analogo a quanto descritto precedentemente. Nella parte centrale invece, l'interazione dei due strati porta alla generazione di una zona di raccordo che viene chiamata *nucleo*.

11.2. Equazioni per lo strato limite turbolento

Scriviamo l'equazione di Reynolds per lo strato limite turbolento che si sviluppa nello spazio tra due lastre piane parallele infinitamente estese distanti $2D$, nella zona lontana dall'imbocco, ove il flusso si è completamente sviluppato. Assumiamo che la velocità media sia orientata secondo l'asse x_1 , e che l'asse x_2 sia ortogonale alle lastre piane. Così formulato il problema è bidimensionale poiché nessuna quantità dipende da x_3 . Possiamo cioè affermare che su tutti i piani paralleli a quello rappresentato in Figura 101 il fenomeno sia identico. Per questo motivo, nella trattazione considereremo solo le dimensioni x_1 e x_2 , tralasciando i termini in x_3 , che comunque sarebbero sempre nulli. Formuliamo le seguenti ipotesi:

- a) asse x_1 orientato nella direzione della velocità media: $\bar{u}_1 \neq 0$; $\bar{u}_2 = 0$;
- b) problema stazionario: $\bar{a}_{,t} = 0$ (indicando con a , una grandezza generica);
- c) turbolenza completamente sviluppata: tutte le caratteristiche della turbolenza, ed in particolare gli sforzi di Reynolds, non dipendano dalla x_1 ;
- d) fluido incomprimibile: $\rho = \text{cost.}$

L'equazione di continuità per il moto turbolento e nel caso di fluido incomprimibile (d) è: $\bar{u}_{1,1} + \bar{u}_{2,2} = 0$. La quale, sotto l'ipotesi (a) si riduce a:

$$\bar{u}_{1,1} = 0, \quad (444)$$

essendo nulle le componenti lungo x_2 e x_3 della velocità media. Questa equazione stabilisce che la velocità media non dipende da x_1 , quindi non può che dipendere dalla variabile rimanente ovvero:

- e) $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_2)$
- f) Le condizioni al contorno impongono infine che la velocità si annulli alle pareti (Figura 101).

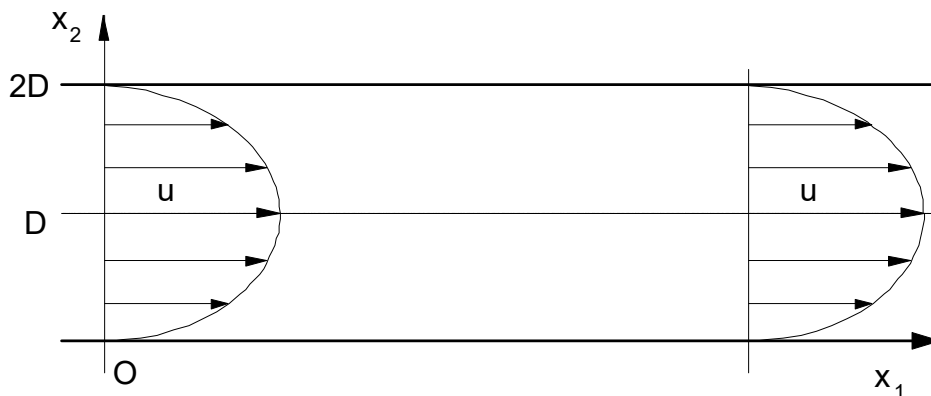


FIGURA 101

L'equazione di Reynolds (435) proiettata lungo l'asse x_1 ($i = 1$) e ricordando che, per la notazione di Einstein, sono sottintese le somme per $j = 1, 2$ (come anticipato, non consideriamo la terza dimensione), si scrive:

$$\underbrace{\bar{u}_{1,1}}_I + \underbrace{\bar{u}_1 \bar{u}_{1,1}}_{II} + \underbrace{\bar{u}_2 \bar{u}_{1,2}}_{III} = -\underbrace{g\bar{h}_{,1}}_{IV} + \nu \left(\underbrace{\bar{u}_{1,11}}_V + \underbrace{\bar{u}_{1,22}}_{VI} \right) - \underbrace{(\overline{u'_1 u'_1})_{,1}}_{VII} - \underbrace{(\overline{u'_1 u'_2})_{,2}}_{VIII}, \quad (445)$$

avendo inoltre introdotto il carico piezometrico $h = z + p/\gamma$. Analizzando i suoi termini alla luce delle ipotesi sopra elencate abbiamo che $I=0$ per la stazionarietà (b), $II=0$ per la (444), $III=0$ per la unidirezionalità (a), $V=0$ per l'equazione di continuità (444), e $VII=0$ perché secondo la (c) le caratteristiche della turbolenza non dipendono da x_1 . Rimane quindi:

$$g\bar{h}_{,1} = \nu \bar{u}_{1,22} - (\overline{u'_1 u'_2})_{,2} \quad (446)$$

La stessa equazione, proiettata lungo x_2 ($i=2, j=1,2$) dà:

$$\underbrace{\bar{u}_{2,1}}_I + \underbrace{\bar{u}_1 \bar{u}_{2,1}}_{II} + \underbrace{\bar{u}_2 \bar{u}_{2,2}}_{III} = -\underbrace{g\bar{h}_{,2}}_{IV} + \nu \left(\underbrace{\bar{u}_{2,11}}_V + \underbrace{\bar{u}_{2,22}}_{VI} \right) - \underbrace{(\overline{u'_2 u'_1})_{,1}}_{VII} - \underbrace{(\overline{u'_2 u'_2})_{,2}}_{VIII}$$

ed analizzando i termini si osserva che: $I=II=III=V=VI=0$ per la unidirezionalità (a) e $VII=0$ per l'ipotesi di turbolenza completamente sviluppata (c) la quale richiede che le caratteristiche della turbolenza non dipendano da x_1 . Rimane quindi:

$$g\bar{h}_{,2} = -(\overline{u'^2_2})_{,2}. \quad (447)$$

Il secondo membro di questa equazione è, per l'ipotesi di turbolenza completamente sviluppata (c), indipendente da x_1 . Integriamo la (447) rispetto ad x_2 :

$$g\bar{h} = -\overline{u'^2_2} + C(x_1);$$

nella quale $C(x_1)$ è una generica funzione che dipende dalle condizioni al contorno. Derivando questa equazione rispetto a x_1 il primo termine a secondo membro sparisce per la (c) e si ottiene un'espressione per la pendenza piezometrica media:

$$\bar{i} = -\bar{h}_{,1} = -\frac{1}{g} C(x_1)_{,1}, \quad (448)$$

la quale indica che la pendenza piezometrica media è funzione della sola x_1 :

$$\boxed{\bar{i} = \bar{i}(x_1)} \quad (449)$$

È importante osservare che l'equazione (447) mette in luce il fatto che il carico piezometrico medio non è costante sui piani ortogonali al moto, al contrario di quanto è stato dimostrato sia per i flussi paralleli sia per lo strato limite laminare, che sono gli altri flussi unidirezionali studiati finora. Rimane comunque costante su queste sezioni la pendenza piezometrica media garantendo che tutta la trattazione sulle correnti esposta in precedenza rimanga comunque valida.

Integriamo ora l'equazione (446) rispetto ad x_2 tenendo conto che $\bar{h}_{,1}$ non dipende da x_2 :

$$g\bar{h}_{,1} x_2 = \nu \bar{u}_{1,22} - \overline{u'_1 u'_2} + C_1(x_1) \quad (450)$$

Il valore della costante di integrazione $C_1(x_1)$ si ottiene calcolando l'equazione per $x_2 = 0$:

$$0 = v\bar{u}_{1,2}\big|_{x_2=0} + 0 + C_1(x_1) \quad (451)$$

Il secondo termine a secondo membro, relativo agli sforzi di Reynolds, alla parete è nullo in quanto la velocità e le sue fluttuazioni sono ivi nulle per la condizione al contorno di aderenza (f). Inoltre, ricordando l'equazione costitutiva per i fluidi Newtoniani (149) si può riconoscere che il primo termine rappresenta gli sforzi di taglio alla parete che, per convenzione, sono indicati con il simbolo τ_0 :

$$v\bar{u}_{1,2}\big|_{x_2=0} = \frac{\tau_{12}\big|_{x_2=0}}{\rho} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (452)$$

Ricavando $C_1(x_1) = -\frac{\tau_0}{\rho}$ e sostituendo:

$$gh_{,1} x_2 = v\bar{u}_{1,2} - \overline{u'_1 u'_2} - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (453)$$

Calcoliamo ora quest'equazione sull'asse di simmetria ($x_2 = D$):

$$gh_{,1} D = v\bar{u}_{1,2}\big|_{x_2=D} - \overline{u'_1 u'_2}\big|_{x_2=D} - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (454)$$

Su questo piano, proprio per la simmetria, cambiando verso all'asse x_2 il risultato non deve cambiare. Indichiamo con $x'_2 = -x_2$ un asse con la stessa direzione di x_2 ma verso opposto. Cambiando sistema di riferimento al termine degli sforzi viscosi risulta $\bar{u}_{1,2}\big|_{x_2=D} = -\bar{u}_{1,2'}\big|_{x'_2=D}$ (infatti la derivata cambierebbe segno se cambiamo verso all'asse x_2); quindi l'unica possibilità che rimanga invariato è che il termine sia nullo. Un ragionamento analogo può essere fatto per il termine degli sforzi di Reynolds; cambiando il sistema di riferimento si ha: $\overline{u'_1 u'_2}\big|_{x_2=D} = -\overline{u'_1 u'_2'}\big|_{x'_2=D}$, quindi anch'esso deve essere nullo. La (453) calcolata per $x_2 = D$, e divisa per D diventa quindi:

$$gh_{,1} = -\frac{\tau_0}{\rho D} \quad (455)$$

Sostituendo nella (453) e riorganizzando, otteniamo l'equazione dello strato limite nella forma cercata:

$$\boxed{\underbrace{v\bar{u}_{1,2}}_I - \underbrace{\overline{u'_1 u'_2}}_{II} = \frac{\tau_0}{\rho} \left(1 - \frac{x_2}{D}\right)} \quad (456)$$

Questa equazione descrive l'andamento degli sforzi totali, $\tau_{t12} = \tau_{12} + \tau_{R12}$, in un condotto, infatti il primo termine a primo membro rappresenta gli sforzi viscosi divisi per la densità, $I = \tau_{12}/\rho$, mentre il secondo termine rappresenta gli sforzi di Reynolds, divisi per la densità, $II = \tau_{R12}/\rho$; essa può dunque essere riscritta:

$$\boxed{\frac{\tau_{t12}}{\tau_0} = \left(1 - \frac{x_2}{R}\right)} \quad (457)$$

Per discutere la (456) in dettaglio conviene scriverla in forma adimensionale. Prima di tutto è necessario introdurre delle grandezze scala appropriate. Delle grandezze che influenzano il problema sono sicuramente ρ e ν , ma, non è individuabile in modo univoco una velocità che caratterizzi il moto in tutti i sottostrati che compongono lo strato limite in quanto le velocità che li caratterizzano sono molto diverse tra loro. Facciamo, allora, riferimento ad una grandezza che siamo in grado di misurare: lo sforzo tangenziale alla parete, τ_0 . Essa influenza sicuramente il problema in quanto senza attrito alla parte non ci sarebbe uno strato limite. Utilizzando queste grandezze fondamentali possiamo definire una scala delle velocità:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (458)$$

che è detta *velocità d'attrito*. La scala delle lunghezze appropriata dipende invece da quale zona dello strato limite stiamo considerando: nel nucleo sarà adatta la dimensione del condotto D , mentre nel sottostrato laminare, che è molto sottile rispetto al condotto, è necessario ricorrere ad una scala definita in base agli effetti di parete: $\ell^+ = \nu / u_*$. Il rapporto tra le due scale delle lunghezze è:

$$\frac{D}{\ell^+} = \frac{Du_*}{\nu} = Re_* \quad (459)$$

che può essere letto come il numero di Reynolds costruito con la velocità d'attrito, ed è anche il gruppo adimensionale che descrive il fenomeno. Sperimentalmente si osserva che lo spessore del sottostrato laminare è molto minore della dimensione della distanza tra le due lastre piane ($D \gg \ell^+$), perciò il numero di Reynolds appena definito dovrà essere $Re_* \gg 1$.

11.3. Sottostrato laminare

Se la parete è fluidodinamicamente liscia, in prossimità della parete si sviluppa uno strato nel quale gli effetti viscosi prevalgono su quelli turbolenti. Scelta la scala delle lunghezze $\ell^+ = \nu/u_*$ ed indicata con $y^+ = x_2 u_* / \nu$, la distanza dalla parete adimensionalizzata, l'equazione (456) può essere riscritta:

$$\bar{u}_1^*, y^+ - \overline{u_1' u_2'}^* = 1 - \frac{y^+}{Re_*} \approx 1 \quad (460)$$

il termine I può essere trascurato rispetto ad 1 essendo $Re_* \gg 1$. Se inoltre teniamo conto che, nel sottostrato laminare, gli sforzi di Reynolds sono trascurabili rispetto a quelli viscosi¹⁹, si ottiene:

$$\bar{u}_1^*, y^+ = \frac{\tau}{\tau_0} \approx 1$$

la quale ci permette di concludere che gli sforzi viscosi adimensionali sono costanti nel sottostrato laminare. Inoltre, integrandola lungo y^+ , si ottiene l'equazione del profilo di velocità:

$$\bar{u}_1^* = \frac{\bar{u}_1}{u_*} = y^+ \quad (461)$$

¹⁹ ricordiamo che il sottostrato laminare è proprio definito come una zona nella quale gli sforzi viscosi dominano rispetto a quelli turbolenti

che risulta lineare.

11.4. Nucleo

Questa volta deve essere scelta come scala delle lunghezze la dimensione caratteristica del condotto D , pari alla semidistanza tra le lastre piane. Indichiamo quindi la distanza dalla parete adimensionalizzata con $\eta = x_2 / D$. L'equazione (456) diventa quindi:

$$\underbrace{\frac{1}{Re^*} \bar{u}_1^*}_{\text{I}} - \underbrace{\overline{u_1' u_2'}^*}_{\text{II}} = 1 - \eta \quad (462)$$

la quale, essendo $Re^* \gg 1$, indica che gli sforzi viscosi (I) nel nucleo sono trascurabili rispetto a quelli turbolenti (II), e quindi questi ultimi hanno un andamento approssimativamente lineare. Per conoscere l'andamento degli sforzi totali è sufficiente far riferimento alla (457) la quale è già adimensionale ed espressa in termini della variabile η : questa equazione indica che l'andamento dello sforzo totale, lungo ciascuna sezione del condotto, è lineare come indicato in Figura 102.

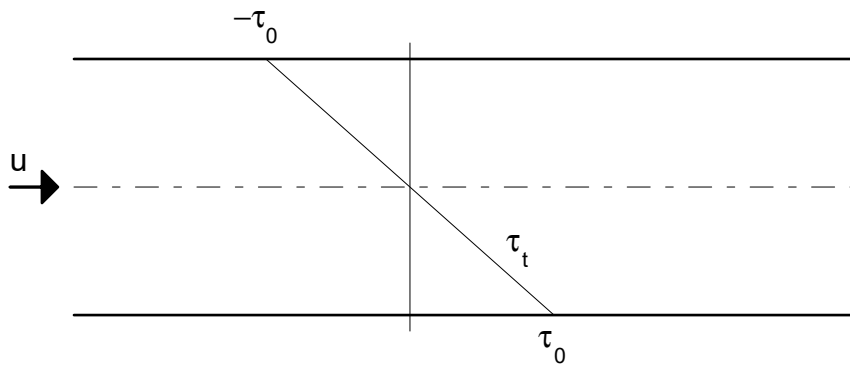


FIGURA 102

11.5. Strato di equilibrio

Si è già osservato che il rapporto tra l'altezza del nucleo e quella del sottostrato laminare è proprio il numero di Reynolds Re^* . Se questo numero è abbastanza grande, esiste una zona intermedia tra i due strati nella quale vale contemporaneamente $\ell^+ \ll x_2 \ll D$ e quindi si ha: $\eta \ll 1$ e $y^+ \gg 1$. In questa zona, detta *strato di equilibrio*, nessuna delle due scale è appropriata, dovranno invece raccordarsi le pendenze dei profili di velocità presenti nei due strati. Nel sottostrato laminare, date le scale scelte, il profilo di velocità adimensionale deve avere la forma:

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = f(y^+); \quad (463)$$

avendo indicato con f una generica funzione adimensionale. Nel nucleo, invece, la u^* non è una buona scala per la velocità media perché quest'ultima è troppo grande. Convienne allora adimensionalizzare lo scarto di velocità rispetto a quella massima, u_0 , assunta al centro del condotto:

$$\frac{\bar{u}_1 - u_0}{u_*} = g(\eta). \quad (464)$$

Nello strato di equilibrio i due profili e le loro inclinazioni debbono raccordarsi, quindi la:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial x_2} = \frac{u_*}{v} \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+}$$

dovrà coincidere con la:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{1}{D} \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta}.$$

Uguagliando e moltiplicando per x_2 entrambi i membri si ottiene:

$$y^+ \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+} = \eta \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta}; \quad (465)$$

il primo membro di questa equazione è funzione della sola y^+ , mentre il secondo membro è funzione della sola η : l'unica possibilità affinché l'uguaglianza sia verificata nello strato di equilibrio è che entrambe le espressioni siano costanti. Non comparendo nelle espressioni alcun gruppo adimensionale, la costante che devono uguagliare entrambi i membri, è indipendente dalle particolari condizioni nelle quali ci si pone. Essa è indicata con $1/\kappa$, dove κ è detta *costante di von Kármán* ed il suo valore è stato ricavato sperimentalmente: $\kappa = 0.41$.

Abbiamo quindi due equazioni differenziali per f e g che integrate danno:

$$\begin{cases} f(y^+) = \frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + \text{cost.} \\ g(\eta) = \frac{\bar{u}_1 - u_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(\eta) + \text{cost.} \end{cases} \quad (466)$$

Nel caso di condotto circolare, le costanti di integrazione sono state determinate mediante esperimenti di laboratorio e danno luogo alle leggi:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5 \\ \frac{\bar{u}_1 - u_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(\eta) - 1 \end{cases}} \quad (467)$$

11.6. Pareti fluidodinamicamente scabre

Si è già detto che l'influenza della scabrezza delle pareti si valuta attraverso il rapporto tra la scabrezza equivalente, ϵ_e , e l'altezza caratteristica del sottostrato laminare, ℓ^+ . Tale rapporto ha la forma di un numero di Reynolds:

$$R_{e\epsilon} = \frac{\epsilon_e u_*}{\nu} \quad (468)$$

Misure sperimentali hanno consentito di determinare i campi di variazione del parametro adimensionale nei quali valgono i diversi regimi:

- $R_{e\epsilon} < 5$: parete fluidodinamicamente liscia;
- $5 < R_{e\epsilon} < 70$: transizione;
- $R_{e\epsilon} > 70$: parete fluidodinamicamente scabra.

È utile ricordare che, introducendo la definizione di pendenza piezometrica nella (455), si ottiene: $\tau_0 = \gamma D \bar{i}$; ricordando la definizione di $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$, questo numero di Reynolds può essere espresso in funzione della pendenza piezometrica:

$$R_{e\epsilon} = \frac{\epsilon_e}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{\epsilon_e}{\nu} \sqrt{g \bar{i} D} \quad (469)$$

La quale mette in evidenza come la transizione tra la condizione di parete fluidodinamicamente liscia e quella di parete fluidodinamicamente scabra può aversi sia incrementando la scabrezza equivalente delle pareti, ma anche aumentando la pendenza piezometrica e quindi la portata che fluisce attraverso il condotto.

Nel caso di parete fluidodinamicamente scabra, tra i parametri che controllano il sistema dobbiamo aggiungere la scabrezza equivalente, questo fa sì che si possano costruire due gruppi adimensionali. L'equazione dello strato limite, adimensionalizzata diventa:

$$\boxed{\frac{1}{R_{e\epsilon}} \frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial \eta_e} - \bar{u}_1' \bar{u}_2' = 1 - 2\epsilon_r \eta_e} \quad (470)$$

con $\eta_e = x_2 / \epsilon_e$ ed avendo introdotto la *scabrezza relativa* $\epsilon_r = \epsilon_e / D$.

Il profilo di velocità deve avere la forma:

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = F(\eta_e, R_{e\epsilon}) \quad (471)$$

In questo caso la dipendenza da $R_{e\epsilon}$ rimane perché questo gruppo adimensionale, al contrario di $R_{e\epsilon}^*$, non può essere supposto molto maggiore di 1; mancando questa ipotesi, il termine che contiene $R_{e\epsilon}^{-1}$ non è più trascurabile rispetto agli altri ed il parametro rimane nella formulazione del profilo. Imponendo il raccordo delle pendenze nello strato di equilibrio otteniamo questa volta:

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2}{\epsilon_e} \right) + c(R_{e\epsilon}) \quad (472)$$

Osservando l'equazione dello strato limite adimensionalizzata per parete scabra, si può concludere che, anche in questo caso, l'andamento degli sforzi totali è lineare; inoltre, se $R_{e\epsilon} \gg 1$, gli sforzi viscosi sono trascurabili rispetto a quelli turbolenti e l'equazione non dipende più dal numero di Reynolds, $R_{e\epsilon}$, ciò implica che, in queste condizioni, il fenomeno diventa indipendente da questo parametro ed anche nel profilo di velocità questa dipendenza dovrà sparire: $c(R_{e\epsilon}) = \text{cost.}$

*Qui termina il racconto della Meccanica dei Fluidi e
dobbiamo citare l'antico adagio dei cantastorie:
"Larga è la foglia, stretta è la via, dite la vostra che
ho detto la mia"*