Nozioni di probabilità

Laura Ventura
Dipartimento di Scienze Statistiche
Università degli Studi di Padova
ventura@stat.unipd.it

FareStat – copyright@2019
Materiale a cura di Laura Ventura e Alessandra Salvan
Cagliari, 5 Dicembre 2019

Il caso di studio (già noto)

- A tutti noi capita di doverci sottoporre a un test clinico per controllare l'eventuale presenza di una patologia.
- Alcuni test sono molto semplici (termometro o sfigmomanometro); altri si basano su esami clinici (sangue o urine).
- Ahinoi... tutti i test clinici non producono risultati sicuri al 100%.

Un esempio

- *Ambientazione:* nello studio del pediatra di vostro figlio.
- Il bambino piagnucola e il genitore appare piuttosto agitato.
- *Il genitore:* "Il mio piccino ha la febbre alta e la lingua a lampone. Dottore ... che sia la scarlattina?"

Da Wikipedia: La scarlattina è una malattia infettiva acuta contagiosa, caratteristica dell'età 6-12 anni, che si manifesta con febbre e enantema. A differenza di rosolia, varicella ecc. è l'unica provocata da batteri.

Il caso di studio: l'esperimento

L'indagine.

- *Il dottore* prende un tampone faringeo, lo passa leggermente sulle tonsille del bimbo. Quindi inserisce il bastoncino nell'apposito astuccio e attende l'esito.
- Il test diagnostico (tampone faringeo) è positivo.
- Il medico sa anche che nella popolazione in età 6-12 anni la proporzione di soggetti affetti da una certa malattia (prevalenza) è del 10%. E sa anche che il tampone fornisce la risposta corretta nel 98% dei casi.

Sulla base dell'esito, il dottore può comunicare al genitore quanto vale la probabilità che il figlio abbia davvero la scarlattina, dato che è risultato positivo al test.

La soluzione alla fine, utilizzando la tabella:

	Paziente Malato	Paziente Sano
Test Positivo	vero positivo	falso positivo
Test Negativo	falso negativo	vero negativo

Nozioni di probabilità

- L'INCERTEZZA è una componente imprescindibile della vita quotidiana.
- I primi tentativi per comprendere l'incertezza e studiare "le regole del caso" sono avvenuti con i giochi d'azzardo. Non è nostro obiettivo diretto studiare i giochi d'azzardo, ma in questo contesto è facile introdurre degli esempi semplici per chiarire i concetti e i risultati del CALCOLO DELLE PROBABILITÀ.
  Si pensi a 'esperimenti' con esito non esattamente prevedibile, come: il numero che apparirà sulla faccia di un dado dopo un lancio, il risultato di estrazioni da un'urna con palline marcate diversamente (come nel gioco del Lotto), ...
- **Ma perché ci interessa il Calcolo delle Probabilità?**
- Fino a questo momento abbiamo visto come è possibile utilizzare la Statistica descrittiva per organizzare e sintetizzare i dati.
- Quando si analizzano dati campionari, interessa risalire, quantificando l'incertezza, alle caratteristiche della popolazione (inferenza). La misurazione dell'incertezza è possibile solo se il campione è casuale. È questa la condizione per avere quello che nel linguaggio comune è detto 'campione rappresentativo'.

Esperimento casuale

- Nel lancio di un dado è intuitivo il concetto di probabilità: grado di incertezza connesso al risultato di una prova (lancio del dado).

  DEF: Un ESPERIMENTO CASUALE è un esperimento il cui esito, di prova in prova, non è esattamente prevedibile.

- Dato un esperimento casuale, ci sono diversi esiti possibili.
- Alcuni esiti, ripetendo l'esperimento diverse volte, possono verificarsi più frequentemente di altri.
- In questo senso, questi eventi sono più probabili di quelli che si verificano meno frequentemente.
- Fin qui, il concetto di probabilità è naturale/intuitivo.
- Possiamo però fare un passo in più e valutare numericamente la probabilità di ciascun esito dell'esperimento.
- Non è detto che questa valutazione sia sempre semplice. . .

Primo esempio di esperimento casuale

- Si considera la popolazione dei residenti in Italia di 18 anni al 21/10/2001.
- Si seleziona casualmente da questa popolazione un soggetto (campione) e si osserva il genere di appartenenza.
- Il risultato può essere MASCHIO (M) o FEMMINA (F) e non si conosce il risultato prima di osservare il soggetto estratto.
- È noto dal 14mo censimento della popolazione che in tale data vi erano 607356 residenti diciottenni, di cui 311249 maschi e 296107 femmine.
- L'esperimento descritto equivale ad avere un'urna con 607356 palline, di cui 311249 marcate con M e 296107 marcate con F, estrarne una e osservare come è marcata.
- Si può quindi assegnare la funzione di probabilità associata a questo esperimento come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili:
  - $P(M) = 311249/607356 = 0.51$,
  - $P(F) = 296107/607356 = 0.49$, che coincide con $1 - P(M)$.

Secondo esempio di esperimento casuale

- Si consideri il lancio di un dado bilanciato.
- Gli esiti possibili s, detti eventi elementari dell'esperimento casuale, sono gli elementi dell'insieme
$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \, .$$
- Un EVENTO E è un'affermazione sull'esito dell'esperimento casuale che può essere soddisfatta da più eventi elementari:
  - Numero pari
  - Numero dispari
  - Numero minore di 5
  - ....

  Quindi un evento E è un sottoinsieme di $\mathcal{S}$.
- Interessa avere delle regole per calcolare la probabilità di un evento, $P(E)$.
- In questo esempio, la probabilità di un singolo evento elementare è $P\{s\} = 1/6$ per $s = 1, 2, \ldots, 6$.
  La probabilità di osservare un numero pari è uguale a 3/6, come pure la probabilità di osservare un numero dispari.
  La probabilità di $A = \{$il risultato è minore di 5$\}$ è $P(A) = 4/6 = 2/3$.

Spazio degli esiti ed evento

DEF: L'insieme di tutti i possibili esiti (o risultati o eventi elementari) di un esperimento casuale costituisce lo SPAZIO DEGLI ESITI (spazio $\mathcal{S}$).

DEF: Un EVENTO è un'affermazione sull'esito di un esperimento casuale. In altre parole, è un sottoinsieme di $\mathcal{S}$. Un evento si verifica o non si verifica.

Nell'esempio del lancio del dado, possiamo considerare gli eventi:
– Evento 1: Numero pari $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
– Evento 2: Numero dispari $\Rightarrow B = \{1, 3, 5\}$
– Evento 3: Numeri minori di 5 $\Rightarrow C = \{1, 2, 3, 4\}$
– Evento 4: Numero 3 $\Rightarrow D = \{3\}$

Eventi di interesse in applicazioni della Statistica possono essere ad esempio:
– $A =$ (una donna di trent'anni vive fino al suo settantesimo compleanno)
– $B =$ (una patologia congenita viene diagnosticata prima dei 50 anni)
– $C =$ (un esame universitario viene superato entro un certo appello)
– $D =$ (un farmaco sperimentato su una certa cavia risulta efficace)

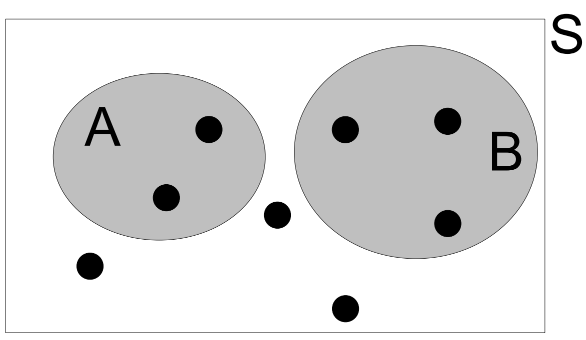
Operazioni su eventi

Gli eventi si trattano come insiemi ed è quindi possibile eseguire diverse operazioni sugli eventi, ad esempio unione ($\cup$, 'o'), intersezione ($\cap$, 'e') e complementazione ($^{-}$, 'non').

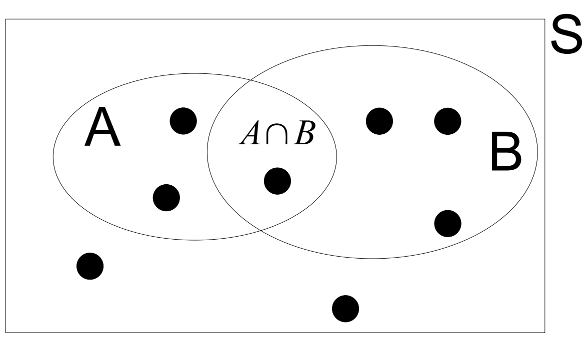
– evento intersezione: $A \cap B$ si verifica se si verificano "sia A che B";
– evento unione: $A \cup B$ si verifica se si verifica "A o B o entrambi";
– evento complementare: $\bar{A}$, "non A", si verifica se non si verifica A;
– inclusione: $A \subseteq B$ quando gli esiti di A sono un sottoinsieme di quelli di B.

NOTA: Queste operazioni possono essere utilizzate per descrivere eventi più complessi in termini di eventi più semplici.

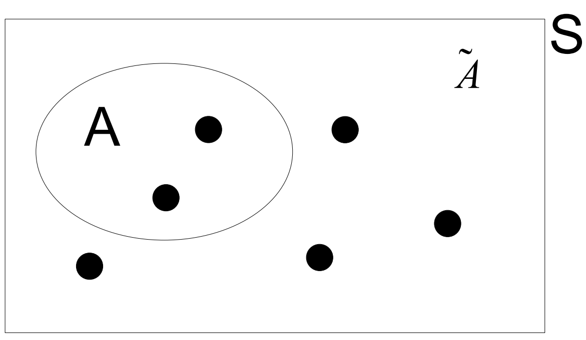
Unione $A \cup B$



Intersezione $A \cap B$



Negazione $\bar{A}$



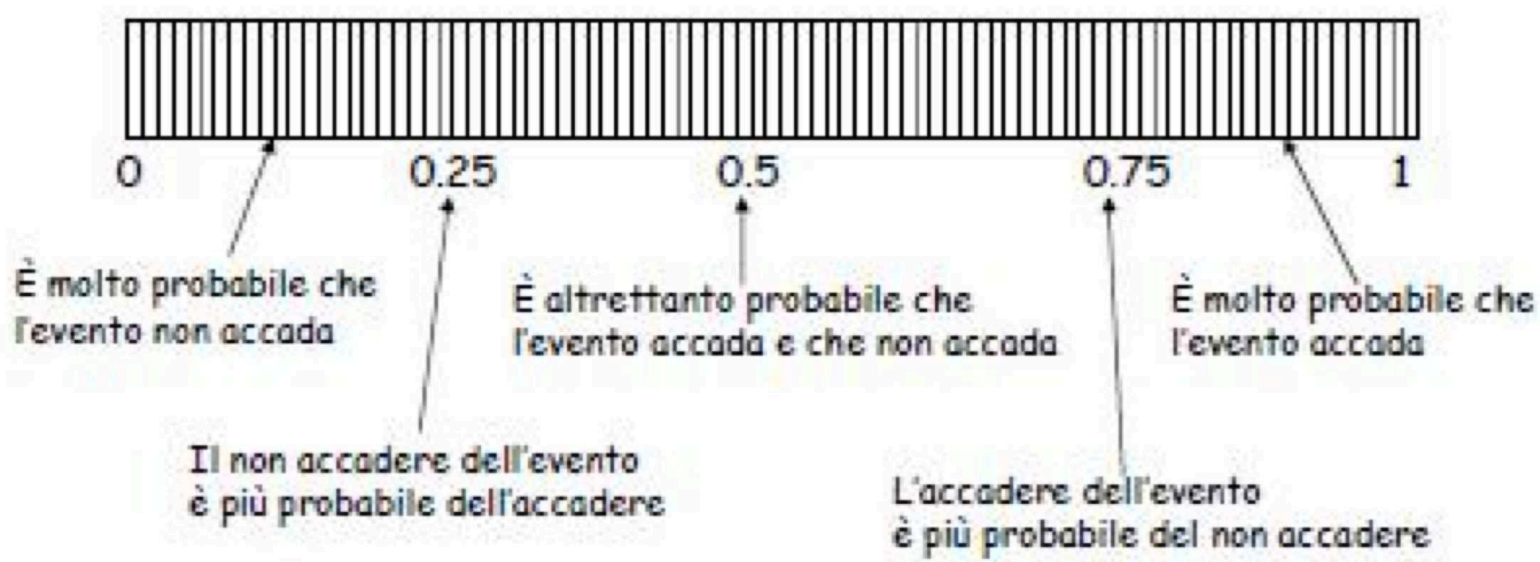
Esempi di operazioni su eventi

$A =$ (un soggetto è vivo a 70 anni) e $B =$ (un soggetto è vivo a 80 anni)

- $A \cap B =$ (un soggetto è vivo a 80 anni) $= B$, perché $B \subset A$
- $A \cup B =$ (un soggetto è vivo a 70 anni) $= A$
- $\bar{A} =$ (un soggetto non è vivo a 70 anni)

La probabilità

- La probabilità di un evento A è una misura, che può variare da 0 a 1, della tendenza di un evento a verificarsi, si indica con $P(A)$.
- Se siamo sicuri che l'evento avrà luogo la sua probabilità è 1.
  Se siamo sicuri che l'evento non avrà luogo la sua probabiltà è 0.
- Negli altri casi, quando non è sicuro né che l'evento accadrà né che non accadrà, si avranno probabilità intermedie tra 0 e 1. Se un evento ha una probabilità 0.5 è altrettanto probabile che accada e che non accada.



Come si assegna la probabilità di un evento?

Sia A un evento e $P(A)$ la probabilità che esso accada.

La situazione più semplice si ha quando vi è completa simmetria, per cui ogni evento elementare ha la stessa probabilità,

- nel lancio di un dado, ogni esito ha probabilità $1/6$;
- nel lancio di una moneta, ogni faccia ha probabilità $1/2$.

Il totale delle probabilità di tutti gli eventi elementari (ossia di $\mathcal{S}$) è uguale a 1.

Il numero di casi possibili è il numero di elementi di $\mathcal{S}$.
Per calcolare la probabilità di un evento A, basterà allora contare il numero di eventi elementari in A (casi favorevoli) e dividere questo numero per il numero di casi possibili.

Quindi per calcolare una probabilità basta contare!

Ed è lo stesso tipo di calcolo che si fa per ottenere le frequenze relative.

DEF.: Quando tutti gli esiti sono ugualmente probabili, la probabilità di un evento A si ottiene dividendo il numero di casi favorevoli per il numero di casi possibili.

Questa è la definizione classica di probabilità, che risale a P.-S. Laplace (1749-1827).

Come si assegna la probabilità di un evento?

A volte però gli eventi elementari non sono equiprobabili o il numero di elementi di $\mathcal{S}$ non è finito ...

Si ricorre allora più in generale alla definizione FREQUENTISTA:

Def.: La probabilità di un evento, in una serie di prove condotte nelle stesse condizioni, è il valore a cui tende la sua frequenza relativa quando il numero di prove diventa molto grande.

Pensiamo al lancio di una moneta truccata, con esito T o C, con $P(T) \neq 1/2$. Lanciandola n volte e contando le volte n_T che si ottiene testa, il rapporto n_T/n darà una valutazione di $P(T)$, tanto più accurata quanto più grande è n.

Nell'approccio SOGGETTIVO, infine, si ha la definizione:

Def.: La probabilità di un evento viene stimata sulla base della conoscenza di tutte le circostanze significative.

Come si assegna la probabilità di un evento? esempi

1. Si sta svolgendo uno studio che coinvolge i genotipi AA, Aa, aA e aa. Estraendo a caso un genotipo, qual è la probabilità di aver scelto il genotipo Aa?
   Soluzione: Lo spazio degli esiti $\mathcal{S} = \{AA, Aa, aA, aa\}$ è formato da esiti equiprobabili. L'approccio classico della probabilità fornisce $P(\text{Aa}) = 1/4$.
2. Si vuole determinare la probabilità che un adulto americano scelto a caso dichiari che il fumo passivo è innocuo. In un sodaggio Gallup, su 1038 adulti scelti a caso, 52 hanno dichiarato che il fumo passivo è innocuo.
   Soluzione: Lo spazio degli esiti è formato da due eventi (non equiprobabili): la persona scelta crede che il fumo passivo sia innocuo (A) o la persona scelta non crede che il fumo passivo sia innocuo $(\bar{A})$. L'approccio frequentista, sfruttando i risultati del sodaggio Gallup, fornisce $P(A) = 52/1038 = 0.005$.
3. Qual e' la probabilità che mio figlio prenda i pidocchi al centro estivo?
   Non si hanno dati storici sul fenomeno e gli esiti non sono equiprobabili: approccio della probabilità soggettiva. In questo caso la probabilità potrebbe essere del 20%. In pratica, attribuendo a un evento la probabilità del 20%, si è disposti a pagare una somma di 20 per riceverne 100 in caso di evento che accade oppure di perdere tutto in caso di evento che non accade. È fondamentale che, nel fissare la probabilità, si abbia il maggior numero di informazioni possibili: in tal caso la probabilità soggettiva si può ritenere affidabile.

Esempio da prove e simulazioni Invalsi: esiti NON equiprobabili

In un dado truccato avente le facce numerate da 1 a 6, la probabilità di uscita di un numero è direttamente proporzionale al numero stesso. Quanto vale la probabilità che, lanciando il dado, esca il numero 5?

Lo spazio degli esiti è sempre $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ma

$$\begin{array}{llll} P(1) \propto 1 & \text{ossia} & P(1) = c \times 1 \\ P(2) \propto 2 & \text{ossia} & P(2) = c \times 2 \\ P(3) \propto 3 & \text{ossia} & P(3) = c \times 3 \\ P(4) \propto 4 & \text{ossia} & P(4) = c \times 4 \\ P(5) \propto 5 & \text{ossia} & P(5) = c \times 5 \\ P(6) \propto 6 & \text{ossia} & P(6) = c \times 6\,. \end{array}$$

Poiché la somma delle 6 probabilità deve valere 1,

$$c \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1 \quad \Longrightarrow \quad c \times 21 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = 1/21\,.$$

Quindi $P(5) = 5/21$.

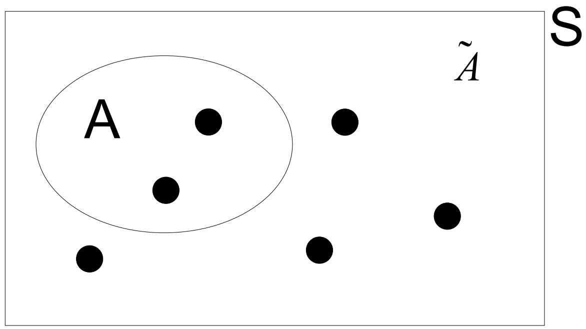
Probabilità di eventi

La probabilità è una funzione che associa agli eventi A (sottoinsiemi di $\mathcal{S}$) un valore tra 0 e 1, ossia $0 \leq P(A) \leq 1$, e che rispetta le seguenti condizioni:

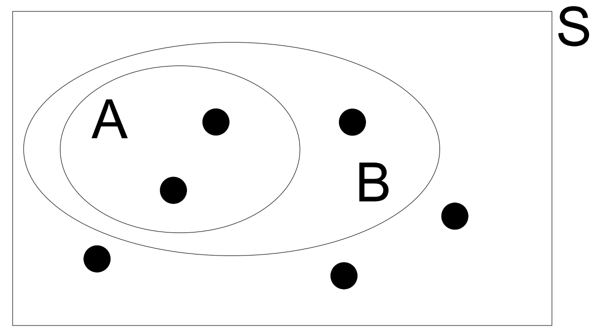
- La probabilità dell'evento certo $\mathcal{S} = A \cup \bar{A}$ è 1 $\Rightarrow P(\mathcal{S}) = 1$.
- La probabilità dell'evento impossibile $N = A \cap \bar{A} = \varnothing$ è 0 $\Rightarrow P(N) = 0$.
- Probabilità dell'evento complementare: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Probabilità dell'evento unione: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si noti che queste proprietà sono del tutto analoghe a quelle delle frequenze relative, con A e B sottoinsiemi delle modalità osservabili.

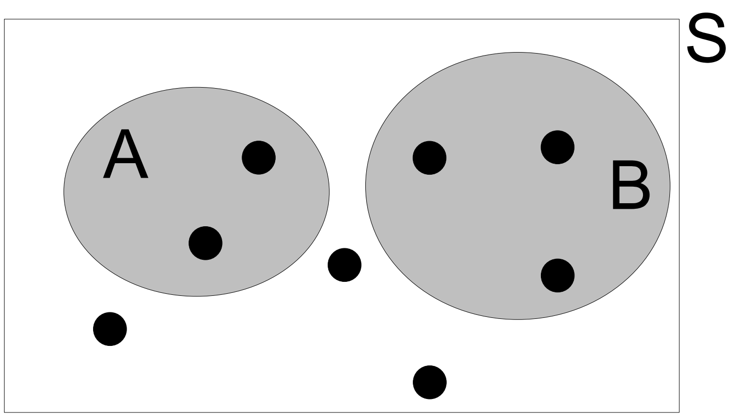
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



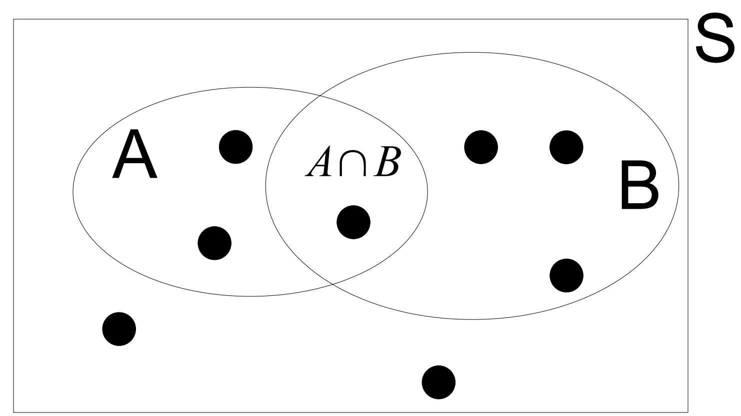
$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Esempio

Qual è la probabilità che la carta che estraiamo da un mazzo ben mescolato sia una carta di cuori (B) o un asso (A)?

$$
\begin{aligned}
P(B) + P(A) - P(A \cap B) &= P(\text{cuori}) + P(\text{asso}) - P(\text{asso di cuori}) \\
&= 13/52 + 4/52 - 1/52 = 16/52 = 4/13\,.
\end{aligned}
$$

$A\heartsuit$	$A\diamondsuit$	$A\clubsuit$	$A\spadesuit$
$K\heartsuit$	$K\diamondsuit$	$K\clubsuit$	$K\spadesuit$
$Q\heartsuit$	$Q\diamondsuit$	$Q\clubsuit$	$Q\spadesuit$
$J\heartsuit$	$J\diamondsuit$	$J\clubsuit$	$J\spadesuit$
$10\heartsuit$	$10\diamondsuit$	$10\clubsuit$	$10\spadesuit$
$9\heartsuit$	$9\diamondsuit$	$9\clubsuit$	$9\spadesuit$
$8\heartsuit$	$8\diamondsuit$	$8\clubsuit$	$8\spadesuit$
$7\heartsuit$	$7\diamondsuit$	$7\clubsuit$	$7\spadesuit$
$6\heartsuit$	$6\diamondsuit$	$6\clubsuit$	$6\spadesuit$
$5\heartsuit$	$5\diamondsuit$	$5\clubsuit$	$5\spadesuit$
$4\heartsuit$	$4\diamondsuit$	$4\clubsuit$	$4\spadesuit$
$3\heartsuit$	$3\diamondsuit$	$3\clubsuit$	$3\spadesuit$
$2\heartsuit$	$2\diamondsuit$	$2\clubsuit$	$2\spadesuit$

Probabilità di eventi mutuamente esclusivi

Due (o più) eventi sono detti mutuamente esclusivi (o incompatibili) quando non possono verificarsi contemporaneamente. Allora:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ESEMPIO: Nel lancio di un dado regolare, si vuole calcolare la probabilità di $A \cup B$, con $A =$(esce il 3) e $B =$(esce un numero pari) $\Rightarrow$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/6 + 3/6 = 4/6 = 2/3$$

ESEMPIO (Invalsi): Data un'urna contenente 30 palline, di cui 6 rosse, 9 gialle, 3 verdi e 12 blu, qual è la probabilità che, estraendo una pallina a caso, sia rossa oppure blu?
Sia A=(la pallina è rossa) e B=(la pallina è blu).

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{30} + \frac{12}{30} = \frac{3}{5}\,.$$

Probabilità condizionata

- Si è interessati alla probabilità che un evento B si verifichi dato che un altro evento A si è già verificato. Il verificarsi di A modifica la probabilità di B?
  Invece che calcolare la probabilità che un soggetto viva sino a 75 anni, potremmo voler conoscere la probabilità che viva sino ai 75 anni dato che ha già raggiunto i 70 anni.

- **ESEMPIO**: lancio di un dado bilanciato,

  A=(il risultato è un numero pari), B=(il risultato è maggiore di 3).

  Si ha $P(B) = 3/6 = 1/2$.

  Come cambia la probabilità di B se sappiamo che il numero estratto è pari, ossia se sappiamo che si è verificato A?

  Quello che vogliamo calcolare si chiama PROBABILITÀ CONDIZIONATA,

  si scrive $P(B|A)$

  e si legge probabilità di B dato A o probabilità di B condizionata a A .

Probabilità condizionata: come si calcola?

Sapere che si è verificato A (magari un amico ha fatto il lancio e ci comunica solo che il risultato è pari), equivale a modificare/aggiornare lo spazio degli esiti, che diventa

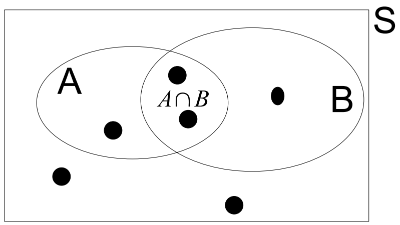
$$A = \{2, 4, 6\}\,.$$

Qui il numero di casi favorevoli a B è 2, mentre il numero di casi possibili è 3. Dunque avremo $P(B|A) = 2/3$ che è diversa da $P(B)$.

Notiamo che, dato A, il numero di casi favorevoli a B è dato dal numero di esiti in $A \cap B$.

Quindi, ricordando che lo spazio degli esiti $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ha 6 elementi,

$$P(B|A) = \frac{\text{numero di esiti in } A \cap B}{\text{numero di esiti in } A} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\,.$$



Probabilità condizionata:

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) \quad \text{con } P(A) \neq 0$$
$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \quad \text{con } P(B) \neq 0$$

Si ha $P(A|A) = P(B|B) = 1$.

La probabilità condizionata può rendere più facile il calcolo di $P(A \cap B)$ grazie alla formula della

Probabilità COMPOSTA: La probabilità che si verifichino entrambi gli eventi A e B è uguale alla probabilità di A per la probabilità di B dato che A si è verificato:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \quad \text{con} \quad P(A) \neq 0$$
$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) \quad \text{con} \quad P(B) \neq 0$$

quindi $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$.

Esempio

In una stanza ci sono 10 persone, cinque uomini e cinque donne. Qual è la probabilità che due persone, scelte a caso, siano entrambe donne?

Consideriamo gli eventi:
– $E1 =$ (la prima persona scelta è donna)
– $E2 =$ (la seconda persona scelta è donna)

Allora,

$$\begin{aligned} P(E1) &= 5/10 \\ P(E2|E1) &= 4/9 \\ \Rightarrow \quad P(E2 \cap E1) &= P(E2|E1)P(E1) = \frac{5}{10}\,\frac{4}{9} = \frac{20}{90} = 0.22 \end{aligned}$$

Indipendenza

Se un dado dà 2, la probabilità che dia 2 anche al secondo lancio aumenta?

Consideriamo gli eventi:

$E1 = $ (2 al primo lancio) $\qquad E2 = $ (2 al secondo lancio)

Allora:

$$\begin{aligned} P(E1) &= \frac{1}{6} \\ P(E2 \cap E1) &= \frac{1}{36} \;\; \text{(rapporto tra casi favorevoli, 1, e casi possibili, 36)} \\ \Rightarrow P(E2|E1) &= \frac{P(E2 \cap E1)}{P(E1)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\,, \end{aligned}$$

che coincide con la probabilità non condizionata $P(E2) = 1/6$.

$\Longrightarrow$ Conoscere l'esito del primo lancio, non altera la nostra incertezza sull'esito del secondo.
Il processo è senza memoria e i due eventi $E1$ e $E2$ sono detti indipendenti.
Sono anche indipendenti, tendenzialmente, eventi lontani nel tempo e nello spazio: sono indipendenti, ad esempio, i risultati delle elezioni del sindaco di Padova e il verificarsi di una tempesta in Tasmania.

DEF.: Due eventi A e B sono INDIPENDENTI quando il verificarsi di uno non ha alcuna influenza sulla probabilità di verificarsi dell'altro:

$$P(A|B) = P(A)\,,$$

ossia il verificarsi di B non altera in alcun modo $P(A)$.

CONSEGUENZA: Se $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Longrightarrow$

Teorema del prodotto per eventi indipendenti. Se due eventi A e B sono indipendenti,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\,.$$

Vale anche il viceversa: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Longrightarrow P(A|B) = P(A)$

e anche $P(B|A) = P(B) \quad (P(A) \neq 0, P(B) \neq 0)$.

Esempio da prove e simulazioni Invalsi

Un contadino ha conservato vecchi semi di zucche e zucchine tutti insieme in una scatola. Sapendo che nella scatola ci sono 200 semi di zucca e 100 semi di zucchina e che la probabilità di germogliare di un vecchio seme è 1/3, qual è la probabilità che piantando un seme estratto a caso dalla scatola nasca una pianta di zucche?

Consideriamo gli eventi:
– $E1 =$ (il seme estratto è di zucca)
– $E2 =$ (il seme germoglia)

I due eventi sono indipendenti perché la probabilità di germogliare è la stessa per zucche e zucchine.

Allora,

$$\begin{aligned} & P(E1) && = 200/300 \\ & P(E2|E1) && = P(E2) = 1/3 \\ \Rightarrow \quad & P(E2 \cap E1) && = P(E1)P(E2) = \frac{200}{300} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}\,. \end{aligned}$$

Osservazione. Eventi indipendenti e eventi mutuamente esclusivi sono due definizioni diverse:
– Indipendenti: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ossia il verificarsi di A non altera in alcun modo la $P(B)$.
– Mutuamente esclusivi: $P(A \cap B) = 0$, ossia il verificarsi di A impedisce il verificarsi di B.

Proposizione: Se A e B sono indipendenti, allora lo sono anche $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Indipendenza

E se abbiamo tre eventi?

Tre eventi A, B e C si dicono indipendenti se:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

con

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad P(A \cap C) = P(A)P(C) \quad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Infatti la definizione di indipendenza per tre eventi si deve dare imponendo anche l'indipendenza a due a due. Il tutto è estendibile a k eventi.

E se vogliamo la probabilità dell'unione di eventi indipendenti?

$$P(A \cup B \cup C \cup \ldots) = 1 - [P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \ldots)] = 1 - [P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) \ldots]$$

Esempio

3 palline vengono estratte successivamente da una scatola contenente 6 palline rosse, 4 palline bianche, 5 palline nere. Trovare la probabilità che siano estratte nell'ordine (R,B,N).

Distinguiamo il caso con reinserimento con quello senza reinserimento.

ESTRAZIONI CON REINSERIMENTO

R, B, N sono eventi indipendenti. Allora:

$$\begin{aligned} P(R \cap B \cap N) &= P(R)P(B)P(N) \\ &= \frac{6}{15} \times \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{8}{225} = 0.036 \end{aligned}$$

ESTRAZIONI SENZA REINSERIMENTO

R, B, N sono eventi dipendenti. Allora:

$$\begin{aligned} P(R \cap B \cap N) &= P(R)P(B|R)P(N|R \cap B) \\ &= \frac{6}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{2730} = \frac{4}{91} = 0.044 \end{aligned}$$

Esempio: Successo in amore

Nelle prossime settimane uno studente uscirà con cinque fanciulle diverse. Le fanciulle non si conoscono tra di loro, e l'esito di un incontro non influenza l'esito del successivo. Perciò assumiamo che gli esiti di queste cinque uscite siano indipendenti.

- Lo studente valuta che la probabilità che un appuntamento vada bene sia 0.2 (20%: un ottimista!!).
- Qual è la probabilità che dopo le cinque uscite lo studente trovi almeno una fanciulla adatta a una relazione?

$$P(\text{abbia luogo almeno uno dei 5 eventi indipendenti})$$

$$= 1 - (0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8) = 0.67$$

  Per trovare la probabilità che almeno una uscita abbia successo, si sottrae da 1 il prodotto delle cinque probabilità che le singole uscite non vadano bene.
- Insomma, almeno una andrà bene se non tutte e cinque andranno male.

Esempio: Successo in amore (cont.)

- Ma potreste fare questa obiezione: c'era una probabilità elevata già in partenza (0.2), dunque è naturale che si abbia una probabilità elevata anche alla fine (0.67).
- Il ragionamento sembra buono, ma ...
- Supponiamo che la probabilità che un appuntamento vada bene sia 0.05 $\Rightarrow$

$$P(\text{successo}) = 1 - (0.95 \times 0.95 \times 0.95 \times 0.95 \times 0.95) = 0.23$$

- E se aumenta il numero delle uscite? Per esempio le fanciulle sono 20 $\Rightarrow$

$$P(\text{successo}) = 1 - (0.95^{20}) = 0.64$$

Insomma, se anche il singolo tentativo ha una probabilità di successo minuscola, si può virtualmente diventare sicuri di riuscire se si prova abbastanza spesso $\Rightarrow$ Se i tentativi sono indipendenti, continuate a tentare e alla fine riuscirete!

Purtroppo questa legge funziona anche per le cose brutte! La probabilità di essere investiti da una macchina mentre si attraversa la strada è piccolissima. Ma se in vita nostra attraversiamo molte strade, la probabilità diventa grande. Finiamo per essere investiti.

Esempio: Verso il Teorema di Bayes

PROBLEMA

- Il *NY State Health Department* riferisce che nella popolazione la proporzione di soggetti affetti da una certa malattia (prevalenza) è del 10%.
- Sotto certe condizioni, un test diagnostico di *screening* fornisce la risposta corretta nel 98% dei casi.
- Ad una persona scelta a caso dalla popolazione il test risulta positivo.

Qual è la probabilità che la persona abbia davvero la patologia, dato che è risultata positiva al test?

DEFINIAMO GLI EVENTI

- $M^+ =$ (il paziente è malato) e $M^- =$ (il paziente è sano)
- $T^+ =$ (il test è positivo) e $T^- =$ (il test è negativo)

Esempio: Verso il Teorema di Bayes (Cont.)

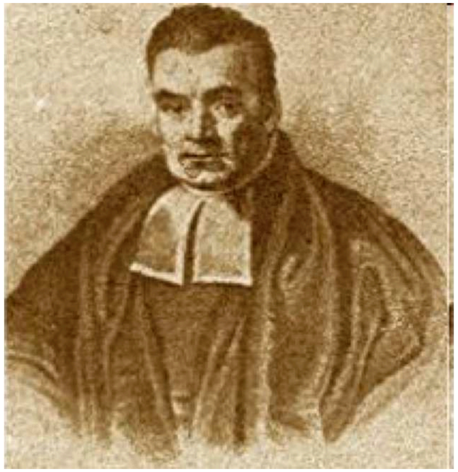
ASSEGNIAMO LE PROBABILITÀ

– $P(M^+) = 0.10$ e $P(M^-) = 1 - P(M^+) = 0.9$

– $P(T^+|M^+) = P(T^-|M^-) = 0.98$

– $P(T^-|M^+) = P(T^+|M^-) = 0.02$

CI INTERESSA $P(M^+|T^+)$



Reverendo Thomas Bayes (1702-1761) – Teorema di Bayes

Ci insegna ad aggiornare la valutazione della probabilità di un evento alla luce di nuove informazioni, oltre a quelle iniziali.

La tabella

	Paziente Malato	Paziente Sano	Totale
Test Positivo	$P(M^+ \cap T^+)$	$P(M^- \cap T^+)$	$P(T^+)$
Test Negativo	$P(M^+ \cap T^-)$	$P(M^- \cap T^-)$	$P(T^-)$
Totale	$P(M^+)=0.1$	$P(M^-)=0.9$	

- Da $P(T^+ \mid M^+) = P(M^+ \cap T^+) \,/\, P(M^+) = 0.98$, si trova

  $P(M^+ \cap T^+) = P(T^+ \mid M^+)\, P(M^+) = 0.98 \times 0.1 = 0.098$
- Analogamente: $P(M^- \cap T^-) = 0.098$
- $P(T^- \cap M^+) = P(T^+ \cap M^-) = 0.02 \times 0.9 = 0.018$

Vogliamo $P(M^+ \mid T^+)$

Da P(M^+) a P(M^+| T^+)

	Paziente Malato	Paziente Sano	Totale
Test Positivo	P($M^+ \cap T^+$)	P($M^- \cap T^+$)	P(T^+)
Test Negativo	P($M^+ \cap T^-$)	P($M^- \cap T^-$)	P(T^-)
Totale	P(M^+)=0.1	P(M^-)=0.9	

$$
\begin{aligned}
P(M^+|T^+) &= \frac{P(M^+ \cap T^+)}{P(T^+)} \\
&= \frac{P(T^+|M^+)P(M^+)}{P(M^+ \cap T^+) + P(M^- \cap T^+)} \\
&= \frac{P(T^+|M^+)P(M^+)}{P(T^+|M^+)P(M^+) + P(T^+|M^-)P(M^-)} \\
&= \frac{0.98 \times 0.1}{0.98 \times 0.1 + 0.02 \times 0.9} = 0.844
\end{aligned}
$$

(P.S. questo il Teorema di Bayes)

Nota

L'evento T^+ può essere rappresentato come unione degli eventi mutuamente esclusivi $T^+ \cap M^+$ e $T^+ \cap M^-$ e la probabilità di ciascuno di questi può essere calcolata con la formula della probabilità composta. Si ottiene

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+|M^+)P(M^+) + P(T^+|M^-)P(M^-) \\ &= 0.98 \times 0.1 + 0.02 \times 0.9 = 0.116 \end{aligned}$$

Allora $$P(M^+|T^+) = \frac{P(M^+ \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{P(T^+|M^+)P(M^+)}{P(T^+)}$$

$$P(M^+|T^+) = \frac{0.98 \times 0.1}{0.116} = 0.844$$

Teorema di Bayes

- Vi è una probabilità a priori che il paziente sia malato ($\mathrm{P}(\mathrm{M}^+) = 0.10$).
- Si conoscono le proprietà del test diagnostico (sensibilità e specificità).
- Vi è l'evidenza sperimentale: il test risulta positivo.
- Tramite il teorema di Bayes si aggiorna la $\mathrm{P}(\mathrm{M}^+)$ in $\mathrm{P}(\mathrm{M}^+|\mathrm{T}^+)$, ottendendo la probabilità a posteriori:

$$P(M^+|T^+) = \frac{P(T^+|M^+)P(M^+)}{P(T^+|M^+)P(M^+) + P(T^+|M^-)P(M^-)}$$

Per capirne meglio l'importanza: il dramma del professore

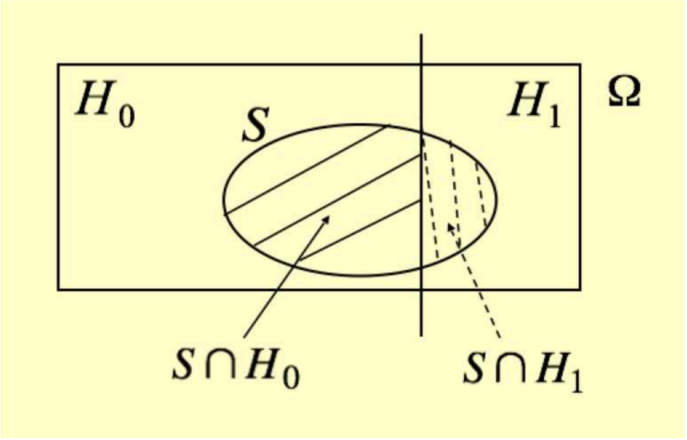
- All'esame lo studente può essere:

$$\begin{cases} \text{preparato} \quad H_0 \\ \text{impreparato} \quad H_1 (= \bar{H}_0) \end{cases}$$

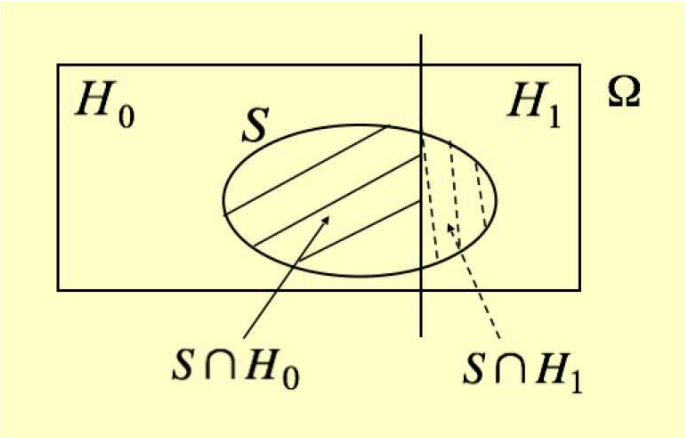
- Per l'evento $S =$ "lo studente supera l'esame" si ha:

$$S = (S \cap H_0) \cup (S \cap H_1)$$

$$P(S) = P(S \cap H_0) + P(S \cap H_1) = P(H_0)P(S|H_0) + P(H_1)P(S|H_1)$$



Le informazioni del professore



Il professore "sa" che

$$P(H_0) = 0.75 \quad \text{(prob. che uno studente sia preparato)}$$

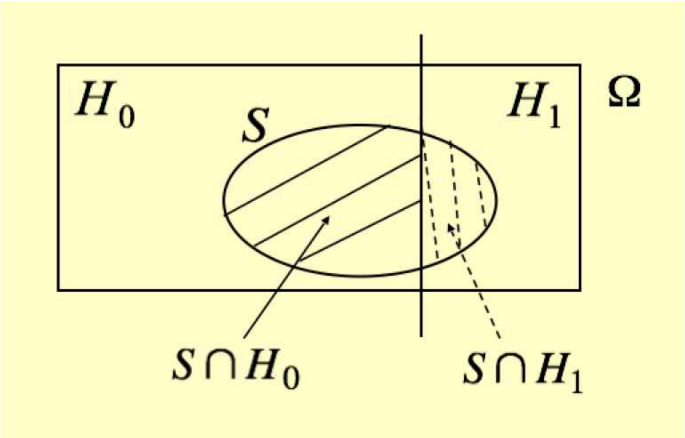
$$P(H_1) = 0.25 \quad \text{(prob. che uno studente sia non-preparato)}$$

e che

$$P(S|H_0) = 0.85 \quad \text{(prob. che, essendo preparato, superi l'esame)}$$

$$P(S|H_1) = 0.25 \quad \text{(prob. che, essendo non preparato, superi l'esame)}$$

La verifica



Lo studente supera l'esame

$$P(H_0|S) = \frac{P(H_0)P(S|H_0)}{P(H_0)P(S|H_0) + P(H_1)P(S|H_1)} = 0.93$$

$$P(H_1|S) = \frac{P(H_1)P(S|H_1)}{P(H_0)P(S|H_0) + P(H_1)P(S|H_1)} = 0.07$$

da $P(H_0) = 0.75$ a $P(H_0|S) = 0.93$

e da $P(H_1) = 0.25$ a $P(H_0|S) = 0.07$

Teorema delle cause (Bayes)

Nel trattare le probabilità condizionate è spesso utile poter mettere in relazione $P(B|A)$ con $P(A|B)$. Ci viene allora in aiuto un risultato dato per primo da Thomas Bayes nel 1763: Il Teorema delle Cause.

TEOREMA: Sia A un evento, e $C_1, C_2, \ldots, C_k$ una famiglia di eventi mutuamente esclusivi ed esaustivi ($C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_k = \mathcal{S}$), con probabilità non nulla. Allora

$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i)P(A|C_i)}{P(A)} = \frac{P(C_i)P(A|C_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(C_j)P(A|C_j)}\,.$$

La seconda espressione per $P(C_i|A)$ nel teorema è una conseguenza del Teorema delle Probabilità Totali:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(C_j)P(A|C_j)$$

NOTA: Nel Teorema delle Cause la situazione è “rovesciata”. Si conosce il risultato dell’esperimento e si vuole calcolare la probabilità che sia dovuto ad una certa causa.

Esempio: test sul DNA

In un caso di omicidio ci sono due sospetti, A e B, considerati dalla polizia "ugualmente sospettati". Sul luogo del delitto sono stati rinvenuti dei capelli non appartenenti alla vittima, e quindi appartenenti al colpevole. La prova del DNA sui capelli e sui due sospetti ha portato alla conclusione che la probabilità di ottenere quel DNA facendo il test su A è 0.80 e quella di ottenere lo stesso DNA da B è 0.5. Qual è la probabilità che sia A il colpevole alla luce dell'analisi del test sul DNA? E che sia B?

- Abbiamo:

  $P(A) = P(B) = 0.5$

  $P(\text{DNA osservato}|A) = 0.80$ e $P(\text{DNA osservato}|B) = 0.50$

- Allora:

  $P(\text{DNA osservato}|A)P(A) + P(\text{DNA osservato}|B)P(B) =$
  $0.8 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5 = 0.65$

  e

  $P(A|\text{DNA osservato}) = 0.8 \times 0.5/0.65 = 0.6$

  $P(B|\text{DNA osservato}) = 0.5 \times 0.5/0.65 = 0.4$

Esercizi

(1) Qual è la probabilità di estrarre una carta di fiori da un mazzo ben mescolato? E che la carta estratta sia una figura o una carta di picche?

(2) Ci sono 4 urne: la prima contiene 15 palline gialle e 5 rosse, la seconda 6 gialle e 2 rosse, la terza 20 gialle e 6 rosse, la quarta 18 gialle e 5 rosse. Luigi vince se pesca una pallina rossa. In quale urna gli conviene pescare?

(3) Qual è il risultato più probabile come somma dei punteggi quando si lanciano due dadi?

(4) Una scatola della Sugar contiene 100 zollette di zucchero e una di queste è rotta. Se prendiamo due zollette a caso da mettere nel caffè, qual è la probabilità che una sia rotta?

(5) Ogni anno negli Stati Uniti circa 12 persone vengono uccise dai cani. Supponendo che nei prossimi decenni la popolazione resti ferma a trecento milioni, qual è la probabilità qualcuno negli Stati Uniti sia ucciso da un cane nel giro di vent'anni?

(6) In un condominio ci sono cinque appartamenti. Nel primo abitano due uomini, nel secondo una donna e due uomini, nel terzo due donne e tre uomini, nel quarto sei donne e un uomo e nell'ultimo una coppia sposata. Se busso in uno dei 5 appartamenti scegliendo a caso e viene ad aprirmi una donna, quale probabilità ho di avere bussato a quello con la coppia sposata?

Esercizi

(7) Da un'urna contenente un ugual numero di palline bianche e di palline nere, vengono rimosse 2 palline bianche. Sapendo che ora la probabilità di estrarre una pallina bianca è 3/8, quante palline si trovavano inizialmente nell'urna?

(8) Se ci sono 25 studenti in una classe e se assumiamo che ciascuno abbia il compleanno in un giorno a caso dei 365 dell'anno, e che le date di nascita degli studenti siano indipendenti (non ci sono gemelli nella classe!), qual'è la probabilità che almeno 2 dei 25 studenti compiano gli anni nello stesso giorno? $[1 - \{(365 \times 364 \times \cdots \times 341)/365^{25}\} = 0.57]$

(9) Scegli a caso 10 studenti nella tua scuola, e nessuno di loro è vegetariano. Pensi che questo significhi che la probabilità che uno studente della scuola sia vegetariano sia zero? Prova a dare una spiegazione.

(10) Viene scelta a caso dalla popolazione una giuria di 12 persone e, nonostante vi sia lo stesso numero di uomini e donne nella popolazione, la giuria risulta composta di soli uomini. Qual è la probabilità che ciò accada? Pensate che cia stato un imbroglio?