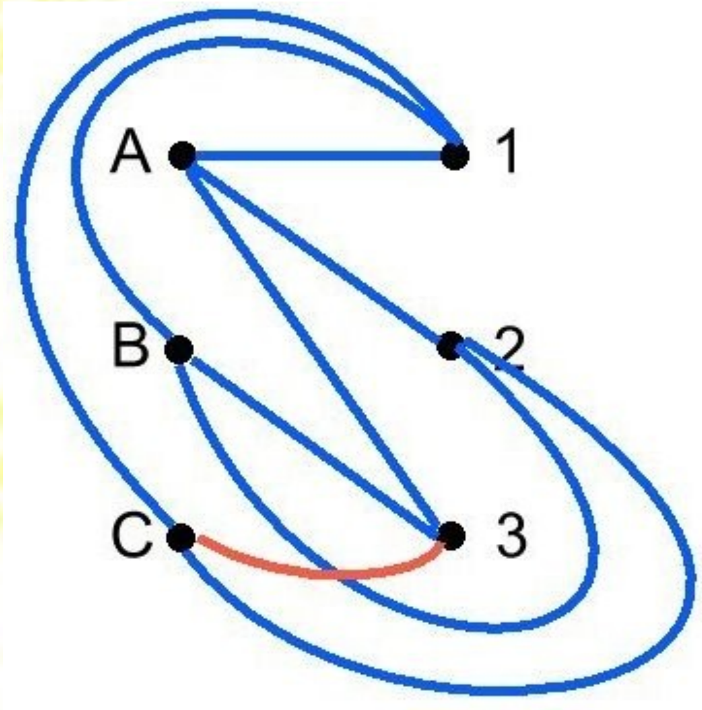
Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- **Teoria dei grafi**
  - Dalle bettole di Königsberg al DNA
  - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
  - **Da tre vicini ostili alla microelettronica**
  - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
  - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
  - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Da tre vicini ostili alla microelettronica

Non si conosce l'origine di questo antico problema.

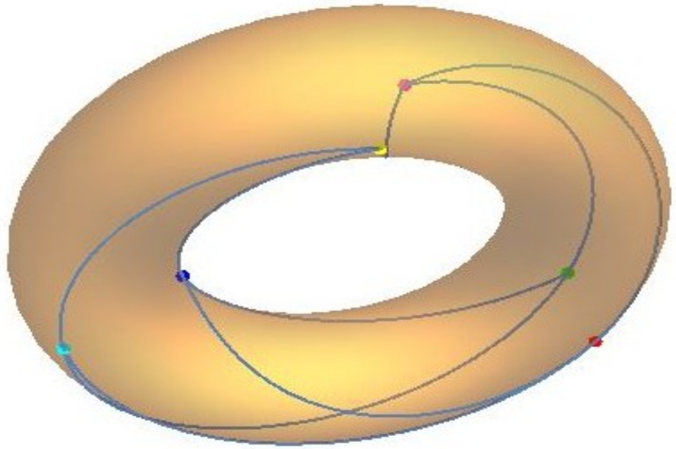


Tre vicini A, B, C devono tracciare delle vie verso tre negozi 1, 2, 3 ma non vogliono incontrarsi per strada. È possibile risolvere il loro problema senza ponti o tunnel?

Anche questa volta non bastano tentativi vani per asserire l'impossibilità. Occorre una dimostrazione.

Da tre vicini ostili alla microelettronica

Il problema si può risolvere su
un asteroide a ciambella:



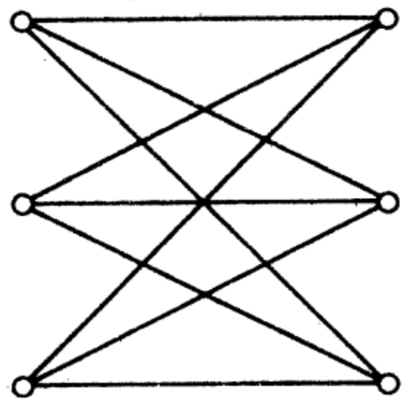
Un grafo si dice *planare* se è possibile rappresentarlo su un piano senza intersezioni degli spigoli se non nei vertici.

La non planarità del grafo del problema dei tre vicini (chiamato K33) si dimostra facilmente mediante la caratteristica di Eulero (ancora lui!) V-E+F, che nel piano vale 2.

Da tre vicini ostili alla microelettronica

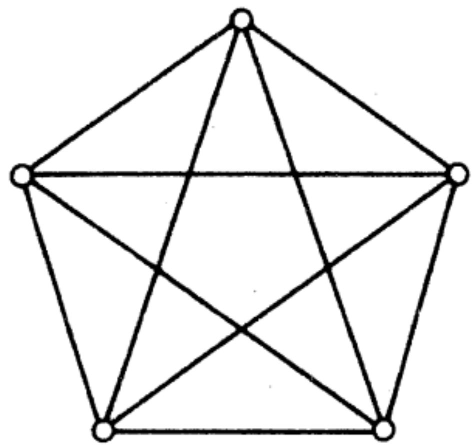
$$V = 6 \quad E = 9 \qquad 4F \leq 2E \implies F \leq E/2$$

$$V-E+F \;\leq\; V-E+E/2 \;=\; 6-9+9/2 \;=\; 3/2 \;<\; 2$$



K_{33}

Ma c'è di più! Kazimierz Kuratowski (1896-1980) dimostra nel **1930**:



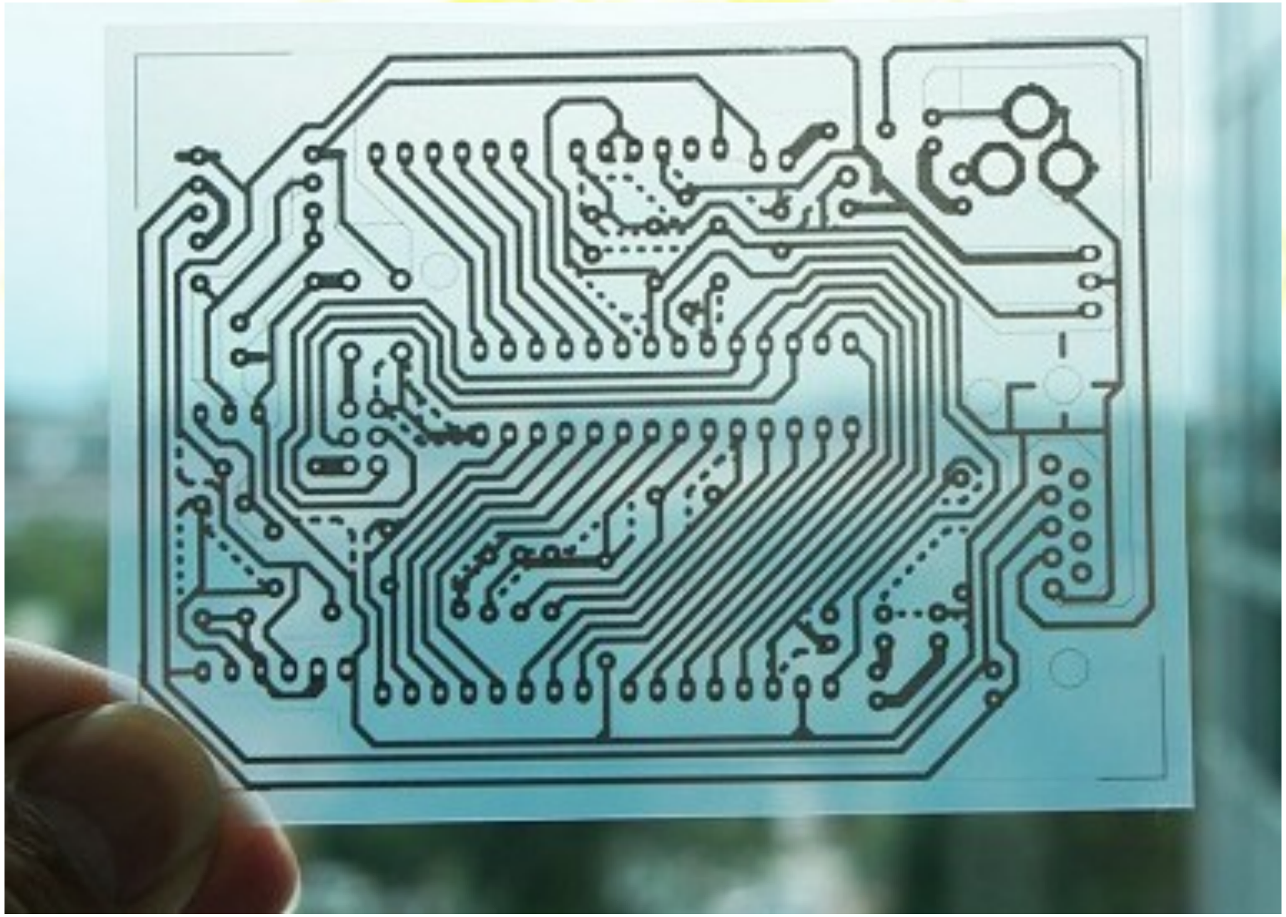
K_5

Teorema - Un grafo è planare se e solo se contiene una suddivisione di K_{33} o di K_5.

Kuratowski, Kazimierz, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fundamenta Mathematicae **15** (1930),: 271–283

Da tre vicini ostili alla microelettronica

Il teorema di Kuratowski diventa dunque essenziale per la progettazione di circuiti stampati e microcircuiti.



Matematica fra gioco e lavoro

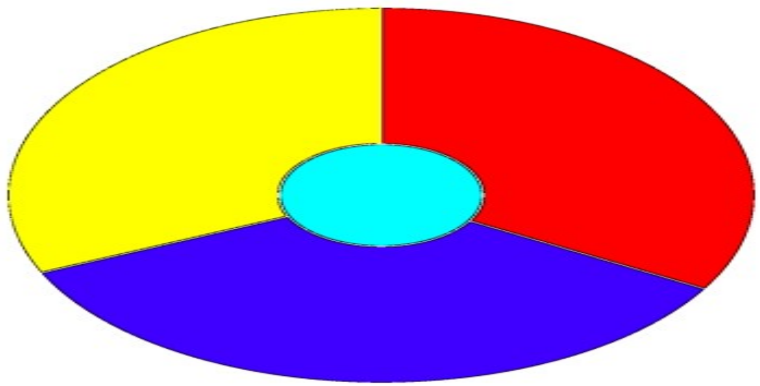
- Gioco o lavoro?
- **Teoria dei grafi**
  - Dalle bettole di Königsberg al DNA
  - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
  - Da tre vicini ostili alla microelettronica
  - **Da una curiosità di studenti alla robotica**
- Probabilità
  - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
  - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Da una curiosità di studenti alla robotica

Nel **1852** Francis Guthrie, uno studente di Londra, pone un problema:

sono sufficienti quattro colori per colorare qualunque mappa politica in modo che regioni confinanti per almeno un tratto abbiano colori diversi?

Che quattro siano necessari è dimostrato, per esempio, da questa mappa:

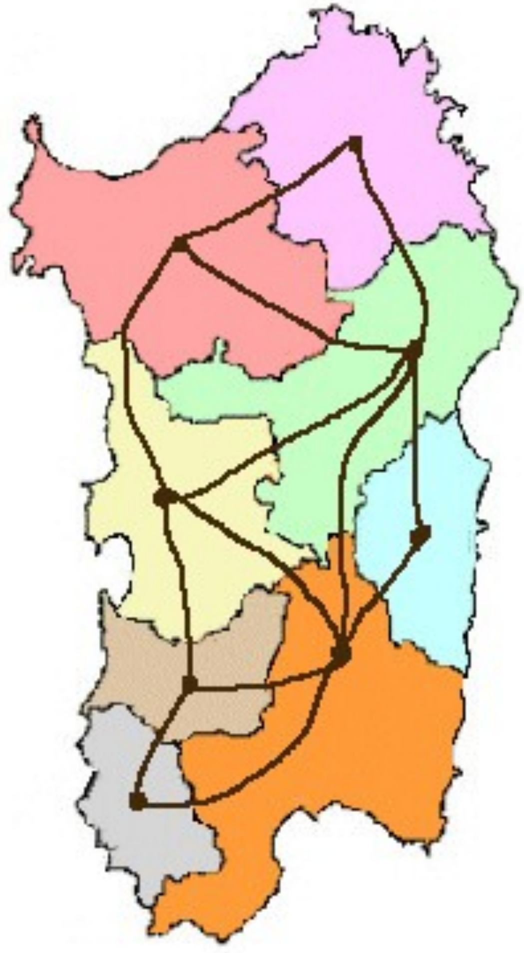


Da una curiosità di studenti alla robotica

Da quel momento si susseguono i più varii tentativi, spesso anche dimostrazioni sbagliate.

La maggior parte delle strategie passa per il duale di Whitney della mappa in questione, trasformando il problema in uno più generale di teoria dei grafi:

quanti colori sono necessari per colorare i vertici di un grafo con colori diversi per vertici collegati da uno spigolo?



Da una curiosità di studenti alla robotica

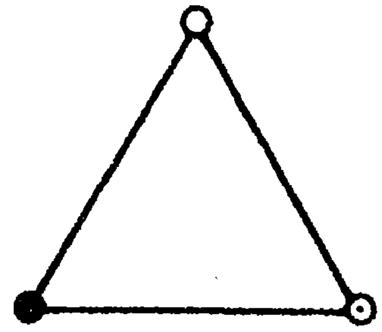
La risposta positiva (ora **Teorema dei quattro colori**) viene data con l'imprescindibile ausilio di un supercalcolatore nel **1976** da Kenneth Appel (1932-2013) e Wolfgang Haken (1928-).

Ma ciò di cui voglio parlare non è la loro dimostrazione, bensì una costruzione ausiliaria di rara bellezza, che non ha portato alla soluzione del problema originario ma ha aperto la strada a nuovi panorami della matematica discreta: il polinomio cromatico.

Appel, Kenneth; Haken, Wolfgang, *Solution of the Four Color Map Problem*, Scientific American, **237** (4) (1977), pp. 108–121,

Da una curiosità di studenti alla robotica

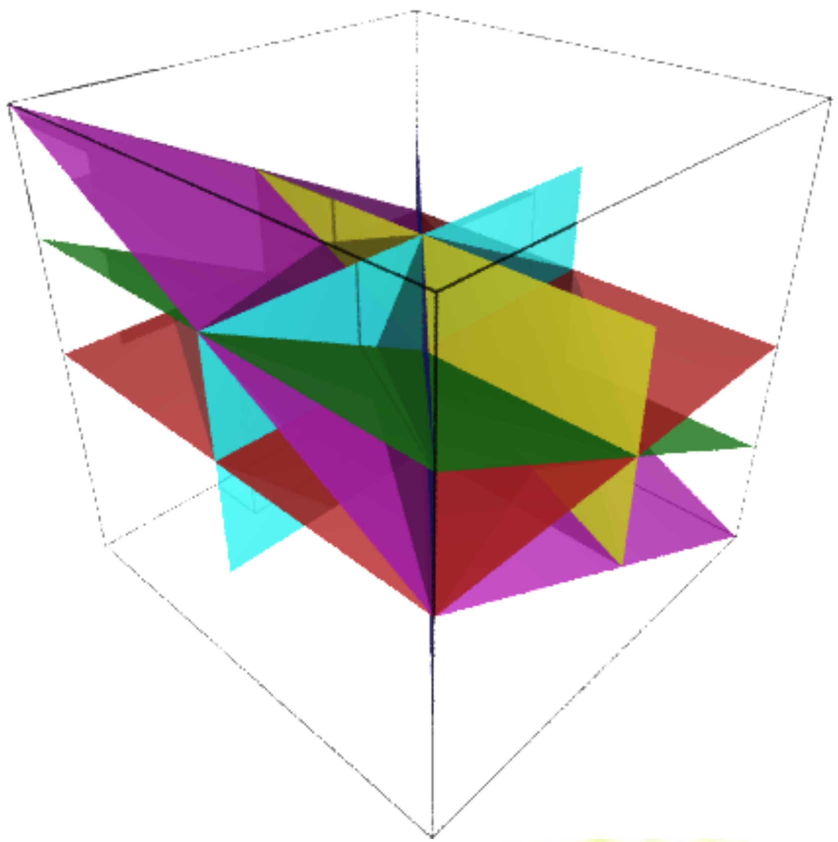
Dato un grafo *G*, la funzione $P_G(k)$, che associa ad ogni naturale *k* il numero di diverse colorazioni dei vertici con *k* colori, risulta essere un polinomio con certe caratteristiche, introdotto da George David Birkhoff (1884-1944) nel **1912**: il *polinomio cromatico* di *G.*



$P_G(k) = k^3 - 3k^2 + 2k$

Birkhoff, G. D. *A Determinant Formula for the Number of Ways of Coloring a Map.* Ann. Math. **14** (1912), 42-46.

Da una curiosità di studenti alla robotica



In uno spazio affine reale A^n consideriamo un insieme di iperpiani.

Le *camere* di questo *arrangiamento* di iperpiani sono le componenti connesse di A^n - {iperpiani}

Da una curiosità di studenti alla robotica

Ad ogni arrangiamento di iperpiani si può far corrispondere un grafo *G*.

Diverse informazioni sulle camere dell'arrangiamento si possono ottenere da $P_G(k)$!

Per esempio:

il numero di camere è $(-1)^n P_G(-1)$;

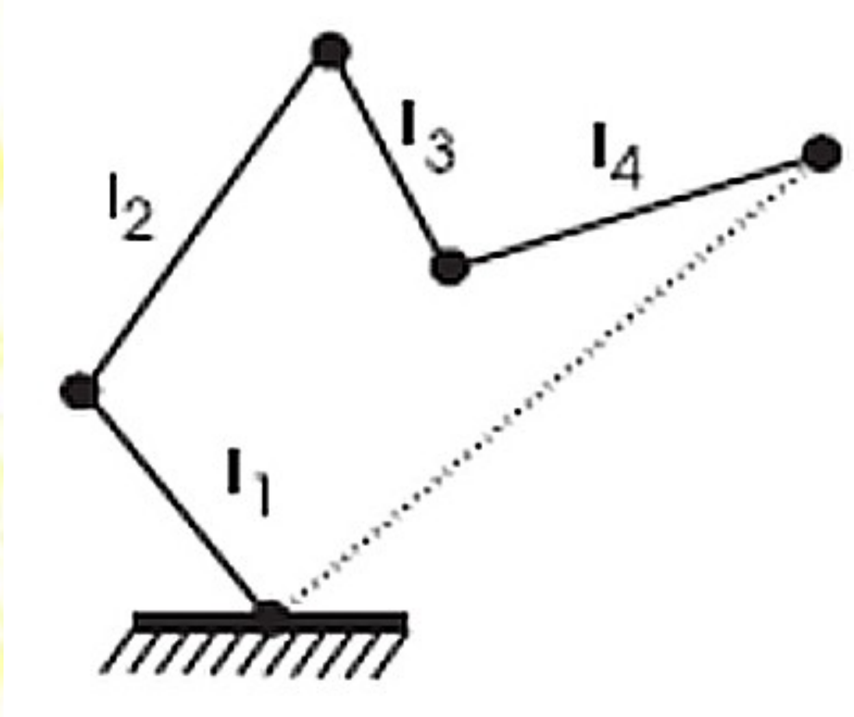
il numero di camere limitate è $(-1)^n P_G(1)$.

Zaslavsky, Thomas , *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*, Memoirs of the American Mathematical Society 154 (1975)

Da una curiosità di studenti alla robotica

Gli arrangiamenti di iperpiani risultano essere importanti in robotica meccanica:

nel **2009** si riconosce che la natura dello spazio delle configurazioni di un braccio robotico dipende dalla camera in cui si trova, dato un particolare arrangiamento di iperpiani!



Farber, M., Hausmann, J. C., Schütz, D., *On the conjecture of Kevin Walker.* Journal of Topology and Analysis, *1*(01) (2009), 65-86.