Matematica fra gioco e lavoro

Massimo Ferri
Dip. di Matematica
Univ. di Bologna

Matematica fra gioco e lavoro

- **Gioco o lavoro?**
- Teoria dei grafi
  - Dalle bettole di Königsberg al DNA
  - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
  - Da tre vicini ostili alla microelettronica
  - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
  - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
  - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Gioco o lavoro?

Un'idea viene (se viene...) quando ce n'è bisogno. E poco importa se chi la concepisce è o si sente matematico, fisico, ingegnere o astronomo. O artista.

Alle volte non è nemmeno un’esigenza pratica, o scientifica, o tecnologica, a far sorgere idee: a volte è per gioco!

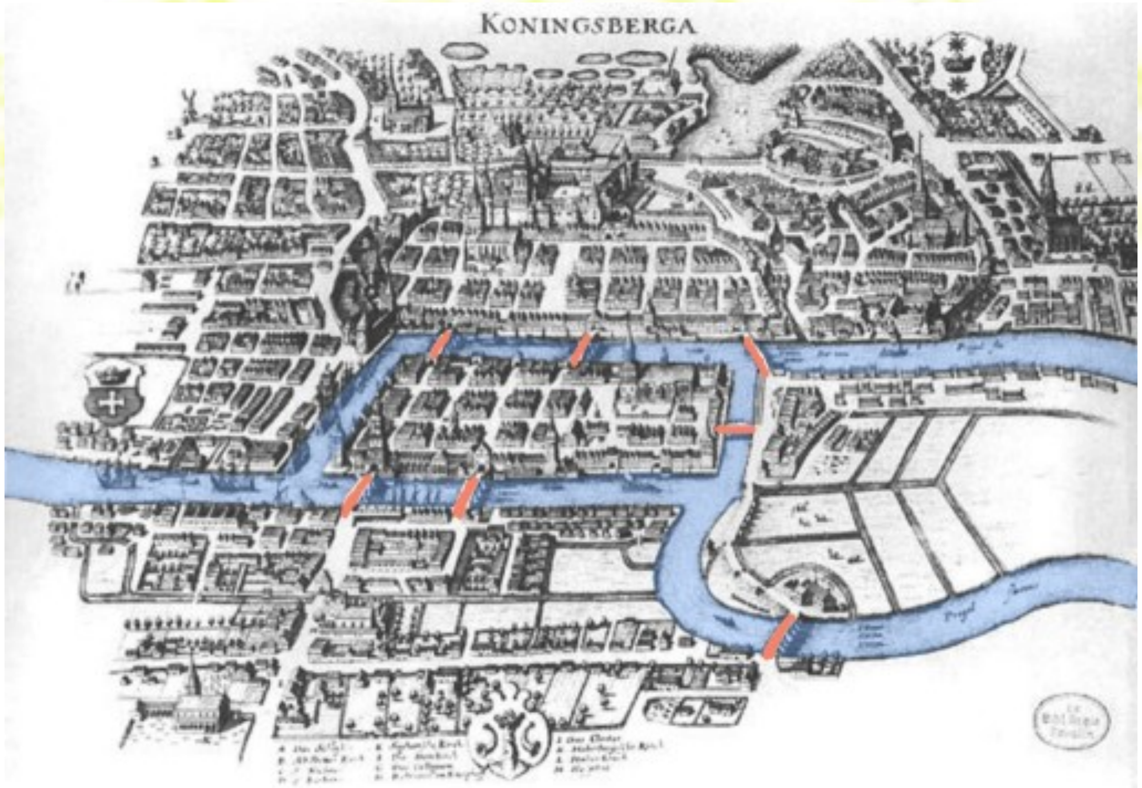
E’ facile, allora, che i matematici vi trovino spunti interessanti per una teoria. Ecco che, quando la teoria è matura, ne possono nascere applicazioni inaspettate!

Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- **Teoria dei grafi**
  - **Dalle bettole di Königsberg al DNA**
  - Da un gioco da tavolo all’ottimizzazione
  - Da tre vicini ostili alla microelettronica
  - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
  - Dal gioco d’azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
  - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Dalle bettole di Königsberg al DNA

La città di Königsberg (oggi Kaliningrad, Russia; allora Prussia Orientale) sorge sulle due rive e sulle isole Kneiphof e Lomse del fiume Pregel. I collegamenti sono garantiti da sette ponti:



Dalle bettole di Königsberg al DNA

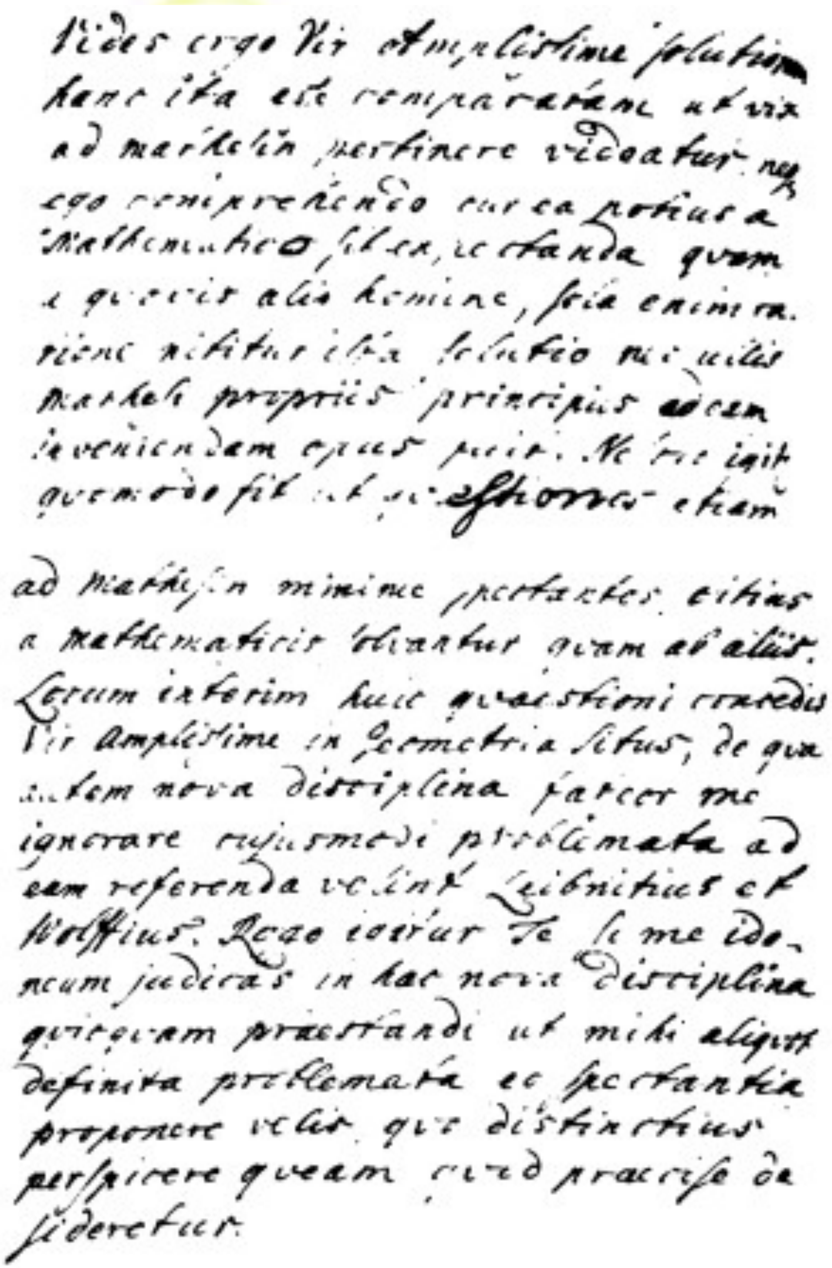
Nel **1736** nelle bettole di Königsberg gira un problema: è possibile percorrere tutti i ponti una sola volta e tornare al punto di partenza?

Nessuno ci riesce; ma è chiaro che questo non basta per asserire che sia impossibile. Il sindaco della vicina Danzica, Carl Leonhard Gottlieb Ehler, ha un'idea: chiedere lumi al grande matematico Leonhard Euler (1707-1783)!

L'impegnatissimo genio gli risponde, sulle prime, in modo altezzoso, aderendo a un atteggiamento che oggi, purtroppo, è molto diffuso; sostanzialmente: *questa non è matematica.*

Dalle bettole di Königsberg al DNA

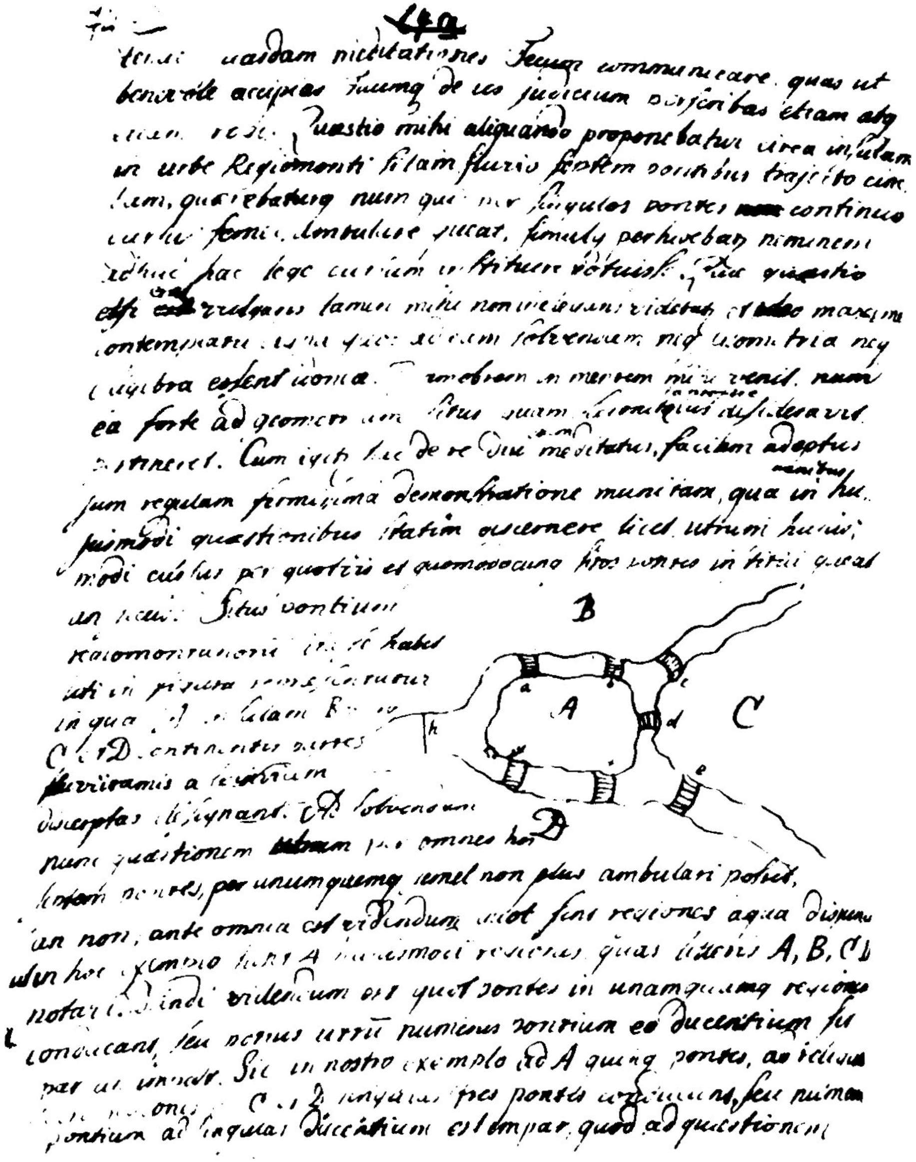
Perciò vede, nobile Signore, come questo tipo di soluzione abbia poco a che fare con la matematica, in quanto dipende dalla sola ragione e non da qualche principio matematico. Perciò non so perché questioni che hanno così poca relazione con la matematica debbano essere risolte più rapidamente da matematici […]



Vides ergo Vir Amplissime solutionem
hanc ita esse comparatam ut vix
ad Mathesin pertinere videatur, neque
ego comprehendo cur ea potius a
Mathematico sit expectanda quam
a quovis alio homine, solutio enim ra-
tione nititur ista solutio nec ullis
Matheseos propriis principiis ad eam
inveniendam opus fuit. Nescio igit
quomodo fit ut quaestiones etiam

ad Mathesin minime pertinentes citius
a mathematicis solvantur quam ab aliis.
Locum interim huic quaestioni concedis
Vir Amplissime in Geometria Situs, de qua
autem nova disciplina fateor me
ignorare cujusmodi problemata ad
eam referenda velint Leibnitius et
Wolffius. Rogo igitur Te si me ido-
neum judicas in hac nova disciplina
quicquam praestandi ut mihi aliquot
definita problemata eo spectantia
proponere velis quo distinctius
perspicere queam quod praecise de-
sideretur.

Dalle bettole di Königsberg al DNA



Poi però (non per nulla è un genio) Eulero si ricrede e pubblica un articolo proprio su questo problema.

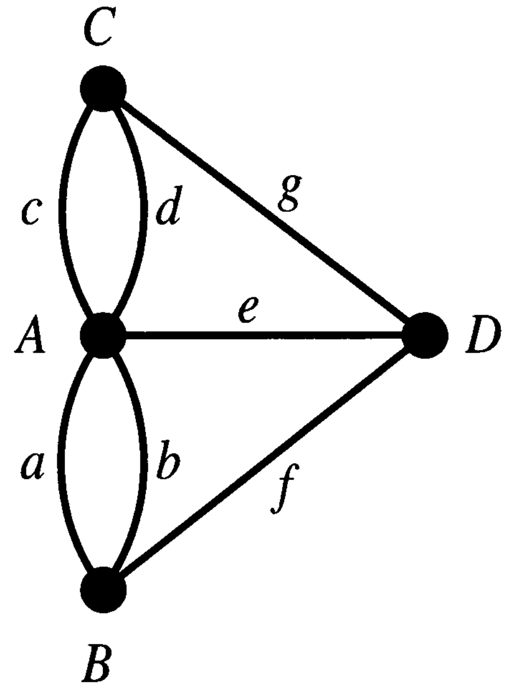
Eulero riconosce che nel problema le distanze sono inessenziali. Esso rientra, cioè, in quella che Leibniz chiama *geometria della posizione*: oggi la chiamiamo *topologia*.

Dalle bettole di Königsberg al DNA

In termini moderni, il problema si formalizza in un *grafo*, cioè una struttura in cui *spigoli* incidono su paia di *vertici*.

Usualmente un grafo si rappresenta graficamente con i vertici segnati come punti e gli spigoli come curve che uniscono i vertici su cui incidono.

Questo è il grafo che rappresenta la situazione delle rive ed isole (vertici) e dei ponti (spigoli) di Königsberg :



Dalle bettole di Königsberg al DNA

Un *percorso* in un grafo è una successione finita vertice-spigolo-vertice -…-spigolo-vertice in cui ogni spigolo è preceduto e seguito dai due vertici su cui incide.

Un *tour di Eulero* è (se esiste) un percorso che inizia e finisce nello stesso vertice e che comprende ogni spigolo una volta sola.

Teorema – In un grafo *G* esiste un tour di Eulero se e solo se su ogni vertice incide un numero pari di spigoli.

Un tale grafo si dice *euleriano*.

Dalle bettole di Königsberg al DNA

Variante - Il *problema cinese del postino*

Minimizzare il percorso di un postino che deve percorrere tutte le strade del quartiere dove opera.

Se il grafo delle strade è euleriano, ogni tour di Eulero è una soluzione ottima.

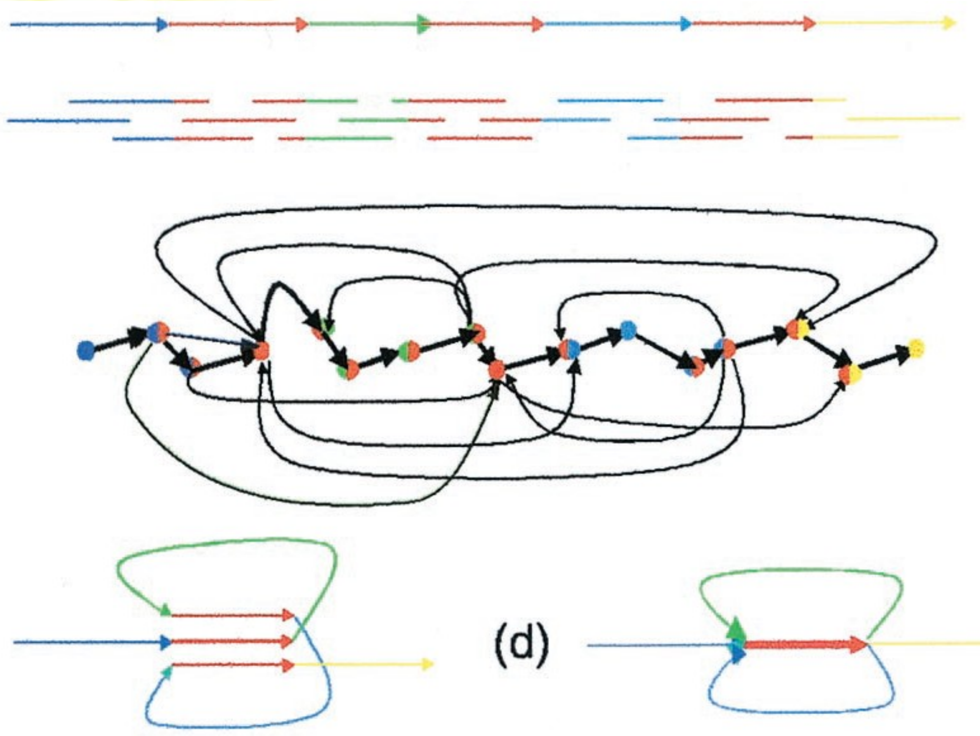
C’è un procedimento standard per risolvere il problema: l’*algoritmo di Fleury*.

Fleury, M., *Deux problèmes de Géométrie de situation,* Journal de mathématiques élémentaires, 2nd ser., **2** (1883): 257–261.

Dalle bettole di Königsberg al DNA

La ricostruzione del DNA a partire da suoi frammenti è un difficile problema affrontato con diverse tecniche.

Una di esse, Sequencing By Hybridization (SBH), utilizza nel **2001** la ricerca di tour di Eulero in un grafo associato all'insieme dei frammenti (grafo di de Bruijn)!



Pevzner, P. A., Tang, H., & Waterman, M. S. *An Eulerian path approach to DNA fragment assembly*. Proceedings of the national academy of sciences, *98*(17) (2001), 9748-9753.

Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- **Teoria dei grafi**
  - Dalle bettole di Königsberg al DNA
  - **Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione**
  - Da tre vicini ostili alla microelettronica
  - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
  - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
  - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione

Al poliedrico genio della meccanica (e non solo) Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) viene proposto nel **1856** di inventare un gioco da tavolo.

Hamilton accetta e ne viene fuori un gioco che ha un certo successo commerciale.

Essenzialmente si tratta di trovare un percorso chiuso lungo gli spigoli di un dodecaedro che tocchi ogni vertice una sola volta.

Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione

Da allora si chiama *ciclo hamiltoniano* in un grafo un percorso chiuso (se esiste), che passi per ogni vertice una volta sola.

Nonostante la somiglianza col problema di Eulero, a tutt'oggi non esiste una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano in un dato grafo!

Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione

Variante - Il *problema del commesso viaggiatore*

Minimizzare il percorso di un commesso viaggiatore che debba visitare tutte le città della sua zona.

Questo problema è paradigmatico come problema di ottimizzazione; insieme al problema della ricerca di un ciclo hamiltoniano, è stato uno dei primi ad essere stato riconosciuto, nel **1972**, come NP-completo!

Richard M. Karp. *Reducibility Among Combinatorial Problems*. In R. E. Miller; J. W. Thatcher (eds.). Complexity of Computer Computations. New York: Plenum. (1972) pp. 85–103.

Papadimitriou, Christos H., *The Euclidean traveling salesman problem is NP-complete*, Theoretical Computer Science, **4** (3) (1977): 237–244