



Matematica fra gioco e lavoro

Massimo Ferri

Dip. di Matematica

Univ. di Bologna

Matematica fra gioco e lavoro

- **Gioco o lavoro?**
- Teoria dei grafi
 - Dalle bettole di Königsberg al DNA
 - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
 - Da tre vicini ostili alla microelettronica
 - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
 - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
 - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Gioco o lavoro?

Un'idea viene (se viene...) quando ce n'è bisogno. E poco importa se chi la concepisce è o si sente matematico, fisico, ingegnere o astronomo. O artista.

Alle volte non è nemmeno un'esigenza pratica, o scientifica, o tecnologica, a far sorgere idee: a volte è per gioco!

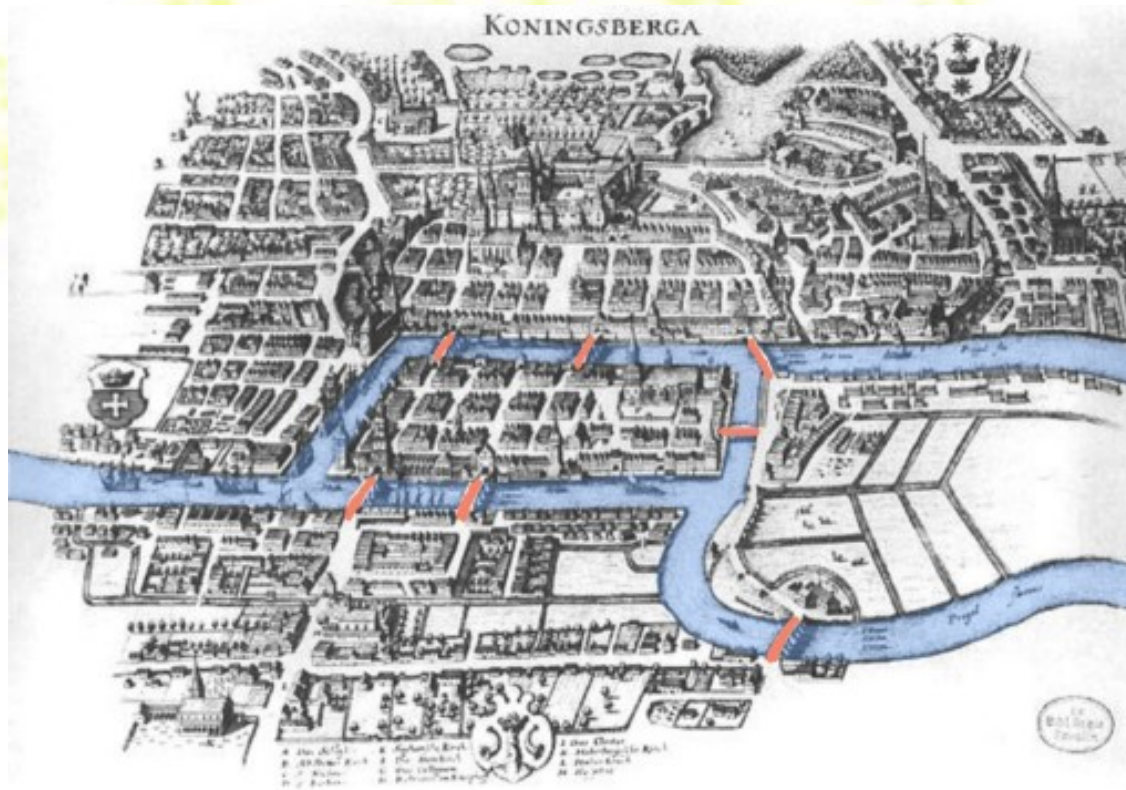
E' facile, allora, che i matematici vi trovino spunti interessanti per una teoria. Ecco che, quando la teoria è matura, ne possono nascere applicazioni inaspettate!

Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- **Teoria dei grafi**
 - **Dalle bettole di Königsberg al DNA**
 - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
 - Da tre vicini ostili alla microelettronica
 - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
 - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
 - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Dalle bettole di Königsberg al DNA

La città di Königsberg (oggi Kaliningrad, Russia; allora Prussia Orientale) sorge sulle due rive e sulle isole Kneiphof e Lomse del fiume Pregel. I collegamenti sono garantiti da sette ponti:



Dalle bettole di Königsberg al DNA

Nel **1736** nelle bettole di Königsberg gira un problema: è possibile percorrere tutti i ponti una sola volta e tornare al punto di partenza?

Nessuno ci riesce; ma è chiaro che questo non basta per asserire che sia impossibile. Il sindaco della vicina Danzica, Carl Leonhard Gottlieb Ehler, ha un'idea: chiedere lumi al grande matematico Leonhard Euler (1707-1783)!

L'impegnatissimo genio gli risponde, sulle prime, in modo altezzoso, aderendo a un atteggiamento che oggi, purtroppo, è molto diffuso; sostanzialmente: *questa non è matematica.*

Dalle bettole di Königsberg al DNA

Perciò vede, nobile Signore, come questo tipo di soluzione abbia poco a che fare con la matematica, in quanto dipende dalla sola ragione e non da qualche principio matematico. Perciò non so perché questioni che hanno così poca relazione con la matematica debbano essere risolte più rapidamente da matematici [...]

Vides ergo Vir amplissime solutio
hanc ita esse comparatam ut vix
ad mathematicam pertinere videatur. ne
ego reprehendo cur ea potius a
"Mathematicis" sit, et cetera quam
a quovis alio homine, scia enim ra-
tione nititur ista solutio nec uti
mathesi propriis principis ad eam
inveniendam opus sit. Ne tunc igitur
quomodo sit ut per se etiam
ad mathesin minime pertinet, citius
a mathematicis tractetur quam ab aliis.
Sedum interim huic quaestioni respondeo
Vir amplissime in Geometria situs, de qua
autem nova disciplina faceret me
ignorare cuiusmodi problemata ad
eam referenda velint Leibnizius et
Wolffius? Deo iurur te si me ido-
neum iudicas in hac nova disciplina
quicquam praestandi ut mihi aliquot
definita problemata et spectantia
proponere velis, quo distinctius
perspicere queam quid praecipere de-
sideretur.

Dalle bettole di Königsberg al DNA

49
 Tenis uadam meditationes sequi communicare, quas ut
 bene esse accipias tuumq; de ics iudicium describas etiam atq;
 etiam. 1026. Quastio mihi aliquando proponebatur circa insulam
 in urbe Regiomonti sitam fluvio pectem pontibus trajecto cum
 hem, quarebatur, num quod per sequentes portes non continuo
 curtu ferri, ambulare possit, simulq; per huncq; nimeni
 redire, hac lege curiam in huncq; potest. ¹⁰²⁶ Hae quastio
 esse redigere tamen mihi non uidebatur, et adeo maxime
 contemplari, etiam quod si eam soluerem, neq; uoluntaria neq;
 uigilia essent uoluntaria. ¹⁰²⁶ Amborem in mentem mihi venit, nam
 ea forte ad geometriam situm suam ¹⁰²⁶ hincq; uoluntaria
 ostenderet. Cum igitur haec de re diu meditatus, facilius adoptus
 sum regulam fermissima demonstratione munitam, qua in huc
 primis quastionibus statim discernere licet, utrum huius
 modi cubus per quatuor et quomodoocumq; hinc uoluntaria in huncq;
 un uoluntaria. Situs pontium
 Regiomontianorum in se habet
 uti in figura sensu, in huncq;
 in qua sita sita sita sita sita
 C. D. continentur portes
 fluvii a sita sita
 disceptas designant. C. D. soluentium
 nunc quastionem hanc per omnes huncq;
 huncq; portes, per unumquemq; semel non plus ambulari potest,
 an non, ante omnia est uoluntaria, ut sita sita sita sita sita
 ut in hoc exemplo huncq; A huncq; huncq; huncq; huncq; huncq;
 notari. Unde uoluntaria est quod portes in unamquamq; regionem
 conueniant, seu potius utrum uoluntaria est ducentium sit
 per ut uoluntaria. Sic in nostro exemplo ad A quinq; portes, ad uoluntaria
 huncq; huncq; huncq; huncq; huncq; huncq; huncq; huncq; huncq;
 pontium ad linguas ducentium est omnia, quod ad quastionem

Poi però (non per nulla è un genio) Eulero si ricrede e pubblica un articolo proprio su questo problema.

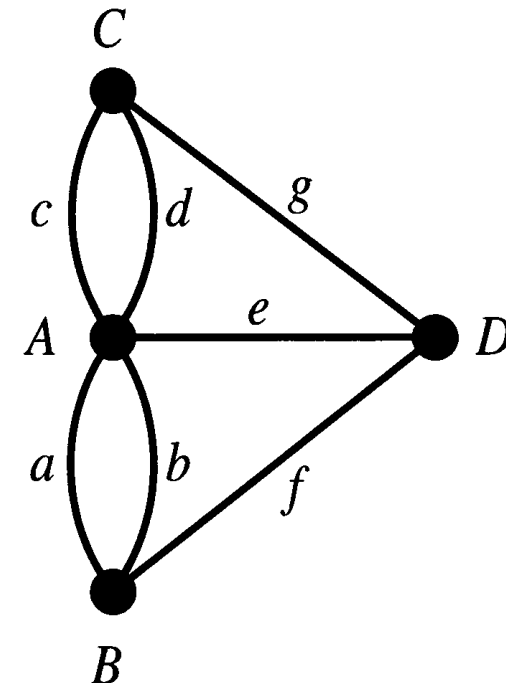
Eulero riconosce che nel problema le distanze sono inessenziali. Esso rientra, cioè, in quella che Leibniz chiama *geometria della posizione*: oggi la chiamiamo *topologia*.

Dalle bettole di Königsberg al DNA

In termini moderni, il problema si formalizza in un *grafo*, cioè una struttura in cui *spigoli* incidono su paia di *vertici*.

Questo è il grafo che rappresenta la situazione delle rive ed isole (vertici) e dei ponti (spigoli) di Königsberg :

Usualmente un grafo si rappresenta graficamente con i vertici segnati come punti e gli spigoli come curve che uniscono i vertici su cui incidono.



Dalle bettole di Königsberg al DNA

Un *percorso* in un grafo è una successione finita vertice-spigolo-vertice -...-spigolo-vertice in cui ogni spigolo è preceduto e seguito dai due vertici su cui incide.

Un *tour di Eulero* è (se esiste) un percorso che inizia e finisce nello stesso vertice e che comprende ogni spigolo una volta sola.

Teorema – In un grafo G esiste un tour di Eulero se e solo se su ogni vertice incide un numero pari di spigoli.

Un tale grafo si dice *euleriano*.

Dalle bettole di Königsberg al DNA

Variante - Il *problema cinese del postino*

Minimizzare il percorso di un postino che deve percorrere tutte le strade del quartiere dove opera.

Se il grafo delle strade è euleriano, ogni tour di Eulero è una soluzione ottima.

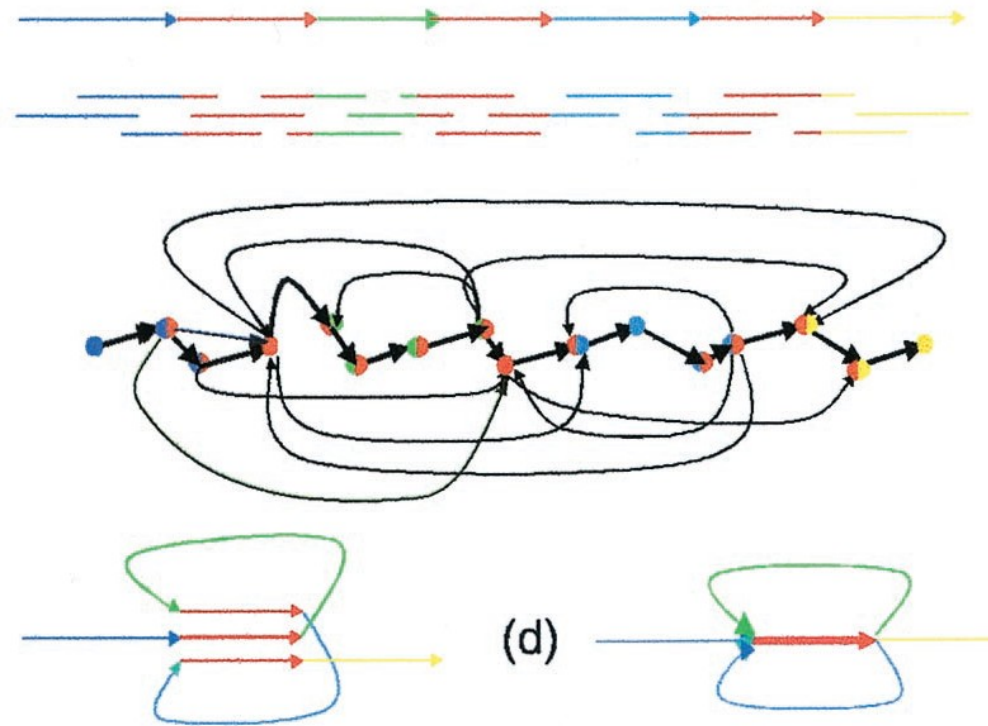
C'è un procedimento standard per risolvere il problema:
l'algoritmo di Fleury.

Fleury, M., *Deux problèmes de Géométrie de situation*, Journal de mathématiques élémentaires, 2nd ser., **2** (1883): 257–261.

Dalle bettole di Königsberg al DNA

La ricostruzione del DNA a partire da suoi frammenti è un difficile problema affrontato con diverse tecniche.

Una di esse, Sequencing By Hybridization (SBH), utilizza nel **2001** la ricerca di tour di Eulero in un grafo associato all'insieme dei frammenti (grafo di de Bruijn)!



Pevzner, P. A., Tang, H., & Waterman, M. S. *An Eulerian path approach to DNA fragment assembly*. Proceedings of the national academy of sciences, 98(17) (2001), 9748-9753.

Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- **Teoria dei grafi**
 - Dalle bettole di Königsberg al DNA
 - **Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione**
 - Da tre vicini ostili alla microelettronica
 - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
 - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
 - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione

Al poliedrico genio della meccanica (e non solo) Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) viene proposto nel **1856** di inventare un gioco da tavolo.

Hamilton accetta e ne viene fuori un gioco che ha un certo successo commerciale.

Essenzialmente si tratta di trovare un percorso chiuso lungo gli spigoli di un dodecaedro che tocchi ogni vertice una sola volta.



Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione

Da allora si chiama *ciclo hamiltoniano* in un grafo un percorso chiuso (se esiste), che passi per ogni vertice una volta sola.

Nonostante la somiglianza col problema di Eulero, a tutt'oggi non esiste una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano in un dato grafo!

Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione

Variante - Il *problema del commesso viaggiatore*

Minimizzare il percorso di un commesso viaggiatore che debba visitare tutte le città della sua zona.

Questo problema è paradigmatico come problema di ottimizzazione; insieme al problema della ricerca di un ciclo hamiltoniano, è stato uno dei primi ad essere stato riconosciuto, nel **1972**, come NP-completo!

Richard M. Karp. *Reducibility Among Combinatorial Problems*. In R. E. Miller; J. W. Thatcher (eds.). *Complexity of Computer Computations*. New York: Plenum. (1972) pp. 85–103.

Papadimitriou, Christos H., *The Euclidean traveling salesman problem is NP-complete*, *Theoretical Computer Science*, **4** (3) (1977): 237–244