Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- Teoria dei grafi
    - Dalle bettole di Königsberg al DNA
    - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
    - Da tre vicini ostili alla microelettronica
    - Da una curiosità di studenti alla robotica
- **Probabilità**
    - **Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google**
- Geometria dello spazio
    - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- Conclusioni

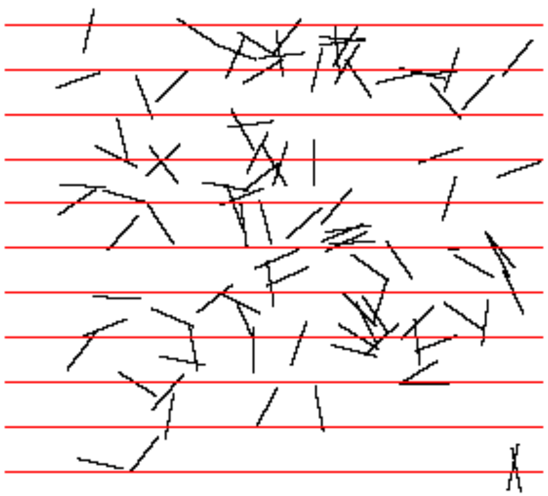
Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google

La divisione della posta in caso d'interruzione di un gioco d'azzardo aveva già interessato Cardano, Pacioli, Tartaglia.

Nel **1654** Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1607-1665) mettono a punto il primo vero studio sulla probabilità discreta.

Dal gioco d’azzardo alla Meccanica quantistica a Google

Il primo vero trattato di probabilità come branca della matematica è dovuto nel **1713** a Jakob Bernoulli (1655-1705).



Intanto la probabilità si è affrancata dall'ambito discreto. Compare il concetto di *densità di probabilità*.

(Problema dell'ago di Buffon, **1777**)

Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google

Con la meccanica quantistica la fisica perde il suo fondamento deterministico. Erwin Schrödinger (1887-1961) pubblica nel **1926** la sua famosa equazione, dove la funzione incognita ψ è una funzione complessa di *ampiezza di probabilità* che permette interferenze e il cui modulo costituisce una densità di probabilità.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \frac{-\hbar}{2m}\nabla^2\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

Schrödinger, Erwin, *Quantisierung als Eigenwertproblem*. Annalen der Physik. 384 (4) (1926): 273–376

Dal gioco d’azzardo alla Meccanica quantistica a Google

Ma anche nell'ambito discreto si verificano progressi, per esempio nel **1906** con le *catene di Markov* (Andrey A. Markov, 1856-1922), sequenze di transizioni fra gli stati di un sistema.

Le applicazioni sono innumerevoli: dalla fisica alla chimica all'intelligenza artificiale.

Марков А. А., Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. — Известия физико-математического общества при Казанском университете. — 2-я серия. — Том 15. (1906) — С. 135—156.

Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google

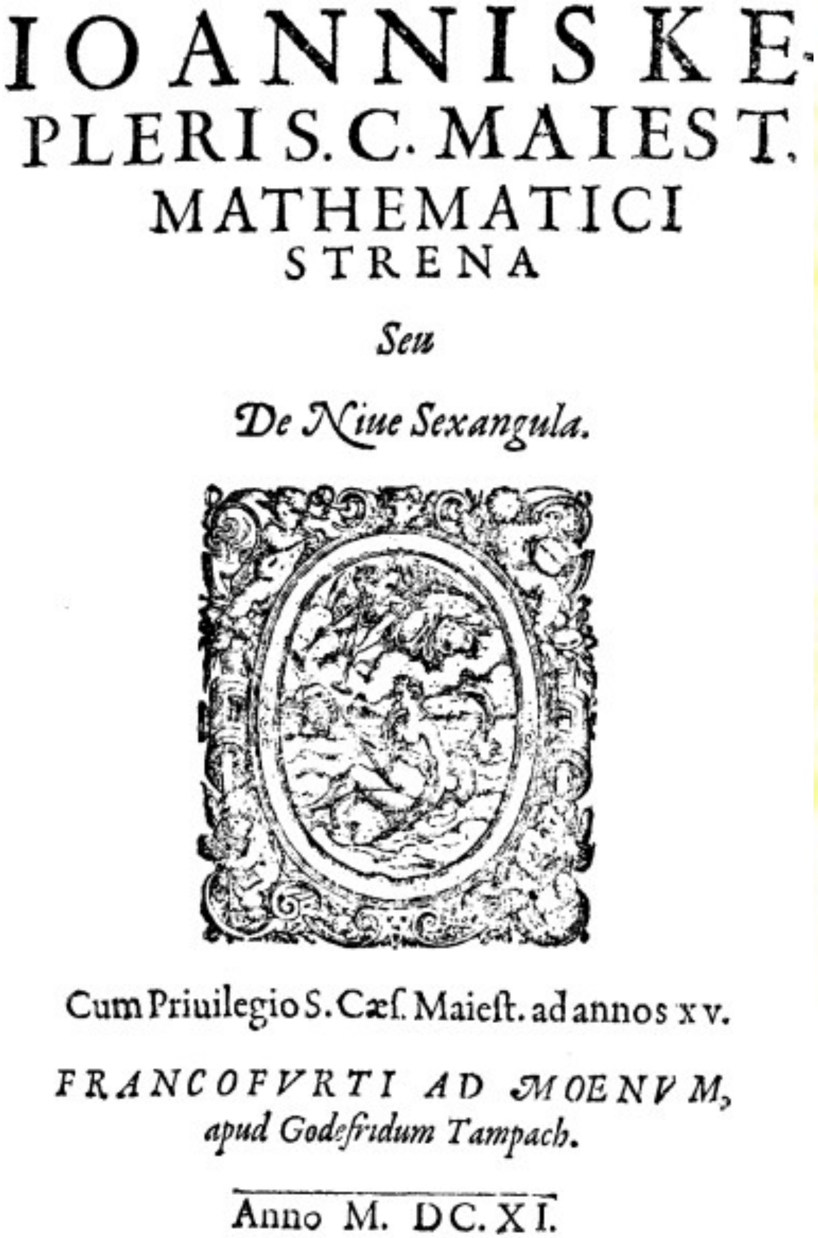
Un'applicazione delle catene di Markov, insieme a un teorema di teoria dei grafi, arricchisce due giovani di genio: Larry Page (1973-) e Sergey Brin (1973-).

Infatti il *Google Rank* (**1996**), mediante il quale Google ordina le pagine pertinenti alla query, indica la probabilità di arrivare in una pagina attraverso un "cammino casuale" saltando da link in link.

Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- Teoria dei grafi
  - Dalle bettole di Königsberg al DNA
  - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
  - Da tre vicini ostili alla microelettronica
  - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
  - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- **Geometria dello spazio**
  - **Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore**
- Conclusioni

Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore


IOANNIS KE-
PLERI S.C. MAIEST.
MATHEMATICI
STRENA

Seu

De Niue Sexangula.

Cum Priuilegio S. Cæſ. Maieſt. ad annos XV.

FRANCOFVRTI AD MOENVM,
apud Godefridum Tampach.

Anno M. DC. XI.

Non sappiamo perché Johannes Kepler (1571-1630) chiami il suo benefattore , il consigliere della corte imperiale Johann Matthäus Wacker von Wackenfels, un "amante del Nulla".

Keplero gioca su questa accezione nella lunga dedica iniziale di un'operetta: De Nive Sexangula.

Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore

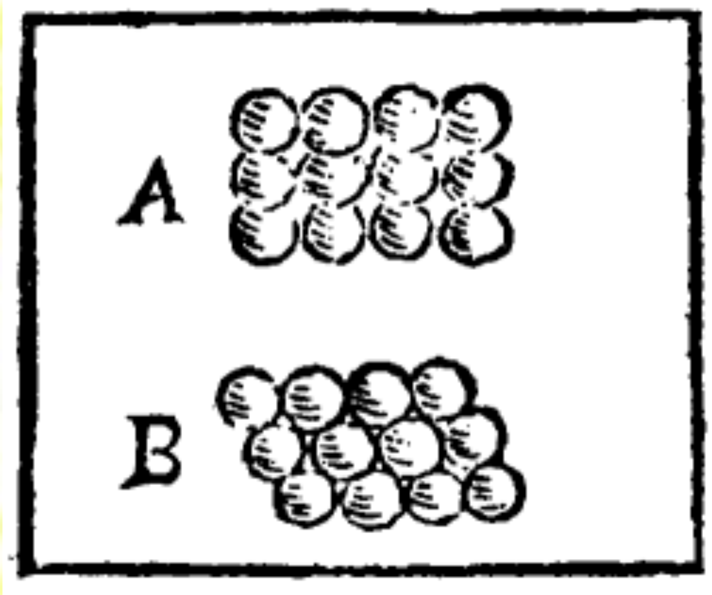
Quale dono, per il capodanno del **1611**, può essere gradito a un amante del Nulla? Sulla manica di Keplero si posa un fiocco di neve: ecco il giusto tema!
Keplero si lancia in una serie di ipotesi che giustifichino la forma esagonale dei fiocchi.

Talia dum meditans anxie, pontem transeo, confusus super incivilitate mea, qui coram te sine strena comparuissem; nisi quod eadem perpetuo chorda oberrans identidem Nihil affero, nec invenirem, quidnam esset Nihilo proximum, quod ingenii pateretur acumen; commodum accidit, ut vaporibus vi frigoris in nivem coeuntibus, flocculi sparsim in vestem meam deciderent, omnes sexanguli, villosis radiis. Eia mehercule rem quavis gutta minorem, figuratam tamen, eia strenam exoptatissimam Nihil amanti, et dignam quam det mathematicus, Nihil habens, Nihil accipiens, quia et de caelo descendit et stellarum gerit similitudinem.

Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore

Una di queste proposte si basa sulla disposizione regolare di oggetti nel piano e nello spazio.

Nessun problema per la disposizione esagonale di cerchi nel piano.



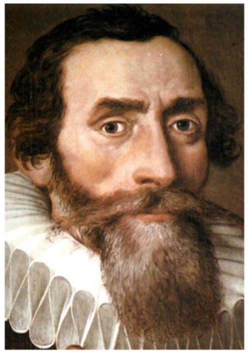
Nello spazio Keplero riconosce due disposizioni regolari di palle, di cui una, la B, in cui ogni palla ne tocca altre dodici, è secondo lui, **la più densa possibile**.

Coaptatio fiet arctissima, ut nullo praeterea ordine plures globuli in idem vas compingi queant.

Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore

Keplero non dimostra questa sua asserzione. La **congettura di Keplero** diventa una sfida per i matematici successivi: la densità dell'impaccamento B, che vale $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0{,}74$ è effettivamente la più alta possibile?

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) dimostra nel **1831** che questa è effettivamente la massima densità di un impaccamento di sfere regolare. La definitiva dimostrazione della congettura per impaccamenti anche irregolari arriva solo nel **2014** ad opera di Thomas C. Hales (1958-).



Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore

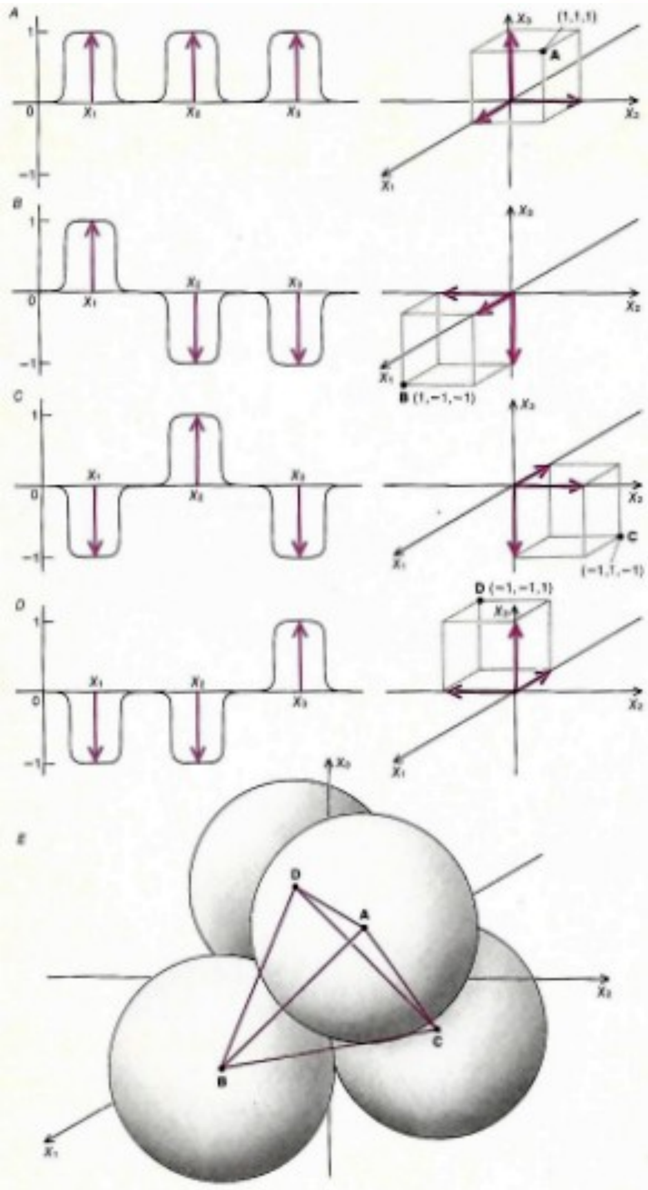
Nel frattempo la fantasia dei matematici si sbizzarrisce: si studiano impaccamenti in spazi iperbolici, in spazi di dimensione qualsiasi, si studiano problemi correlati.

Nel **1958** Carl A. Rogers presenta (in modo non costruttivo) un estremo superiore per la densità di un impaccamento di sfere in uno spazio euclideo n-dimensionale. Per n=3 vale circa 0,76.

Vengono ideati e studiati molti tipi di impaccamenti nelle dimensioni >3. Di particolare interesse è il *reticolo di Leech* (John Leech, 1926-1992), ideato nel **1967**.

Rogers, C. A. *The packing of equal spheres*. Proceedings of the London Mathematical Society, *3*(4) (1958)., 609-620.

Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore

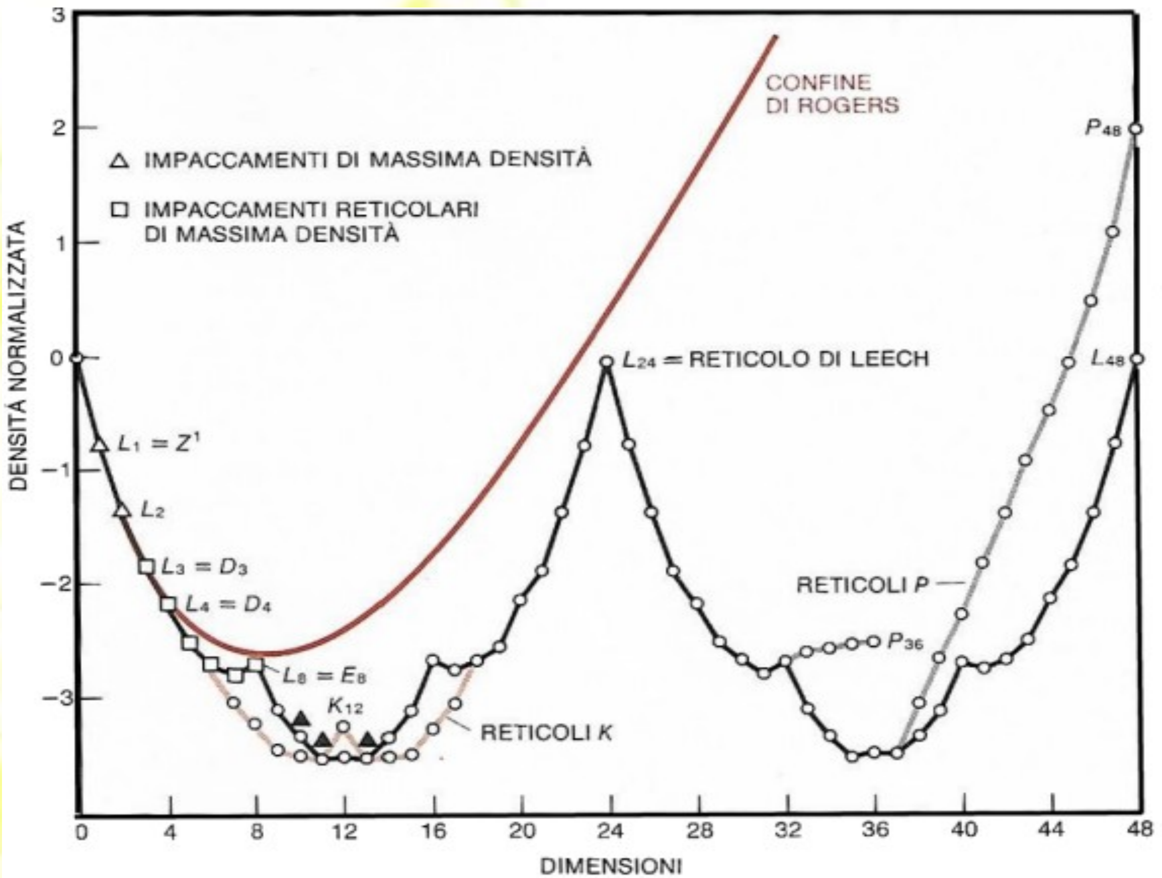


Nel frattempo gli informatici studiano i *codici a correzione di errore*. Organizzano la ridondanza nella trasmissione di simboli piazzandoli ben distanziati in uno spazio di dimensione alta.

Se un simbolo viene corrotto nella trasmissione, si trova fuori dall'insieme dei simboli "consentiti". Viene allora proiettato sul simbolo consentito più vicino, al centro di una (iper)sfera in cui cade.

Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore

Quale dimensione è allora più conveniente per ospitare un codice a correzione di errore? Quella in cui le (iper)sfere risultano più densamente impaccabili!



Si scopre nel **2004** che il reticolo di Leech in dimensione 24 è il più conveniente.

Henry Cohn e Abhinav Kumar, *The densest lattice in twenty-four dimensions*, in Electronic Research Announcements of the AMS, vol. 10 (2004), pp. 58–67

Matematica fra gioco e lavoro

- Gioco o lavoro?
- Teoria dei grafi
  - Dalle bettole di Königsberg al DNA
  - Da un gioco da tavolo all'ottimizzazione
  - Da tre vicini ostili alla microelettronica
  - Da una curiosità di studenti alla robotica
- Probabilità
  - Dal gioco d'azzardo alla Meccanica quantistica a Google
- Geometria dello spazio
  - Da un fiocco di neve ai codici a correzione di errore
- **Conclusioni**

Conclusioni

- È vero: ai matematici piace giocare. Anche quando i problemi nascono da esigenze pratiche, per molti matematici si tratta di una sofisticata enigmistica, a cui si possono appassionare in modo ossessivo.
- È vero: spesso giocano con generalizzazioni che vanno molto al di là del problema iniziale.
- È però anche vero che perfino da problemi ludici possono nascere teorie con conseguenze e applicazioni formidabili.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE !

massimo.ferri@unibo.it