La concezione soggettiva della probabilità di Bruno de Finetti (1906-1985)

(*Francesco Bertolino*)

Dipartimento di Matematica di Cagliari, 11 e 18 ottobre 2019

- *La probabilità non esiste,* (BdF, 1974)
- *La probabilità è uno stato della mente, non è uno stato di natura,* (Leonard J. Savage, 1959)
- La probabilità come *degree of belief,*
- *Quot homines, tot sententiae* (Publio Terenzio Afro)
- *Su ciò su cui non si può teorizzare si deve narrare* (Umberto Eco, 1984)
- *Lotta contro le* adhoccaggini

INTERESSI DI BRUNO DE FINETTI

- Probabilità e statistica inferente ;
- Teoria delle decisioni ;
- Scienze attuariali ;
- Economia, ricerca operativa, programmazione, ...;
- Automazione, organizzazione aziendale;
- Didattica della matematica e divulgazione scientifica ;
  - $e^{i\pi} = -1$;
- Direzione della *Mathesis*, AMASES, *etc.*

Un empirista direbbe che sono oggettivi i *fatti*, che hanno un valore oggettivo quelle proposizioni che sono vere o false a seconda che un evento ben determinato si verifichi o non si verifichi, quelle proposizioni la cui verità o falsità si riduce a una pura e semplice constatazione che ci è imposta. (BdF)

- Indirizzo matematico $\mapsto$ Costuttivismo/intuizionismo;
- Preferenze in filosofia $\mapsto$ D. Hume;
- Gusti letterari $\mapsto$ Luigi Pirandello;
- Motto $\mapsto$ (*Uno, nessuno, centomila*);
- In politica $\mapsto$ (Adesione al *club* di Roma e ai radicali).

Probabilità come "Logica dell'incerto"

Ainsi, dans un foule de circostances, le physicien se trouve dans la même position que le joueur qui suppute ses chances. Tout le fois qu'il raisonne par induction, il faut plus ou moins consciemment usage du calcul des probabilités. (J. H. Poincaré)

Ragionamento per induzione

Se per "ragionamento" intendiamo qualcosa di fondato sulla logica (sulla logica del certo, sulla logica ordinaria) è chiaro che il "ragionamento induttivo" non è un "ragionamento". [...] Nell'ambito di quale "logica" potrà allora ammettersi che il "ragionamento induttivo" sia un "ragionamento"? Dal punto di vista qui seguito la risposta è facile: lo è nell'ambito della logica probabilistica, cioè della teoria della probabilità (soggettiva), che è per noi l'unica forma di logica oltre a quella del certo. (BdF)

La probabilità nasce unicamente dalla (nostra) incertezza

On peut parier, au jeux de pile et face, alors que la pièce est déjà lancée, et que par conséquent son mouvement est determiné. On peut parier même une fois que la piece est tombé, sous la seule condition de ne pas voir su quelle face elle repose. La probabilité ne résulte pas de ce que tel événement est indeterminé (au sens plus ou moins philosophique du mot) mais bien de ce que nous sommes dans *l'incapacité de preévoir quelle éventualité se produira, ou, ce qui revient ou même, de savoir quelle éventualité s'est produite*. (Émile Borel)

- Per BdF tutti gli eventi incerti sono probabilizzabili

Ergo Sono inconcepibili opinioni del tipo

Quelle est la probabilité pour qu'il pleuve demain? Elle n'existe pas. Non pas parce quell'elle varie d'un jour à l'autre avec l'ètat du ciel e la direction des ventes; mais parce que dans aucune circostance ella n'a de valeur objective, la même pour tous ceux qui l'évaluent sans se tromper.
Il pleuvra o il ne pleuvra pas, l'un des deux événenements est certain, dès a présent, et l'autre impossible. Les forces physiques dont dépend la pluie sont aussi bien déterminèes, soummises à des lois aussi précises que celles qui dirigent les planètes. (Joseph L. F. Bertrand)

Eventi con una probabilità sufficiente bassa non accadono mai. (Èmile Borel)

(Detta anche *legge unica del caso*, o anche *legge di Cournot*, o anche *legge di Borel*.)

La concezione soggettivista della probabilità poggia

- Sulla definizione soggettiva di probabilità [equità / coerenza] ;
- Sul concetto di indipendenza e indipendenza condizionata ;
- Sulla scambiabilità $\longrightarrow$ *th* di rappresentazione .

La statistica inferente soggettivista si riduce all'impiego

- Dei modelli predittivi ;
- Del *th* di Bayes .

INTERESSI ULTERIORI

- *Medie associative*, *th* di Nagumo-Kolmogorov-de Finetti;
- *Funzioni caratteristiche*, $\infty-$divisibilità, *storia della probabilità*;
- *Problemi fondazionali*
  $\Rightarrow$ la $\sigma-$addittività è necessaria? (ma non è sufficiente l'addittività semplice?)
  $\Rightarrow$ le misure di Radom-Nykodim e di Lebesgue sono indispensabili?
  $\Rightarrow$ ma non è sufficiente l'integrale di Stieltjes-Riemann?
  $\Rightarrow$ la *f.r.* può assumere solo una delle due forme $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ oppure $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$? non ci sono altre possibilità ?
  $\Rightarrow$ gli eventi sono sempre assimilabili agli insiemi ? l'evento: "domani il treno farà ritardo", a quale $\sigma-$algebra può appartenere ?
- *etc.*

Definizione razionale o **classica**
La probabilità dell'evento E è il rapporto tra il numero $n(E)$ dei casi favorevoli al verificarsi di E ed n_T, numero totale dei casi, purché tutti *ugualmente probabili*.

$$p(E) \stackrel{def}{=} \frac{n(E)}{n_T} \,. \triangleleft$$

Definizione asintotica o **frequentista**
Data una sequenza indefinita di prove tutte condotte nelle stesse condizioni, si definisce probabilità dell'evento E, il limite della proporzione empirica di successo $f_N(E)$ al divergere del numero N delle prove

$$p(E) \stackrel{def}{=} \lim_{N\to\infty} f_N(E) \,. \triangleleft$$

Le definizioni R e F possiedono lo statuto di definizione? Definizioni o pseudo definizioni ?

- *Def razionale* $\longmapsto$ tautologia
- $\longmapsto$ portata limitata
- *Def frequentista* $\longmapsto$ ∞ prove (indip. e controllate)
- $\longmapsto$ limite di che?
- $\longmapsto$ portata limitata (eventi singoli?)
- $\longmapsto$ confusione (prob/ frequenza)
- $\longmapsto$ (*th* Bernoulli $\equiv$ definizione f. ?)

Come non condividere la repulsa di certi matematici per il calcolo delle probabilità ?

ASSIOMATIZZAZIONE (Andrej N. Kolmogorov, 1933)

(i) gli eventi $A, B, C, \ldots$, sottoinsiemi di Ω, costituiscono una classe additiva $\mathcal{A}$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) \geq 0$;

(iii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(iv) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, t.c. $A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;

(v) se $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ è una successione decrescente di eventi di $\mathcal{A}$, t.c. $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, $\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

- $\Rightarrow$ definizione $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

N.B. L'assiomatizzazione di K. **non** fornisce alcuna definizione di probabilità

Definizione soggettiva

La probabilità di un evento E è la quota $p(E)$ che un individuo reputa di dover pagare ad un banco per ricevere "1" ovvero "0" verificandosi o non verificandosi E. Le valutazioni di probabilità degli eventi devono rispondere ai principî di equità e coerenza.$\triangleleft$

• *Equità* ?   possibilità di scambio banco/giocatore in ogni momento del gioco e sempre alle stesse condizioni ;
• *Coerenza* ?   non potrà mai avvenire che vi sia una combinazione di puntate che produca un guadagno (od una perdita) sempre certa ;

Dalla coerenza discendono i "capisaldi" del *CdP*,

- gli assiomi centrali (*ii*), (*iii*), (*iv*) del sistema di K. ;
- la definizione di probabilità condizionata ;
- il teorema delle *probabilità totali* ;
- il teorema delle *pobabilità composte*.

Teorema. $0 \le p \le 1$

- S entità del premio, $S > 0$, se accade E;
- $p \cdot S$ puntata (prezzo *equo*) relativa ad E,

$$\begin{cases} \mathcal{G}(E) &= S - p \cdot S = (1-p)S & \text{se si verifica} \quad \text{E,} \\ \mathcal{G}(\bar{E}) &= -p \cdot S & \text{se non si verifica} \quad \text{E.} \end{cases}$$

- condizione **N**

$$\text{Se} \quad \begin{cases} p < 0 & \text{allora} \quad \mathcal{G}(E) > 0\,, \quad \mathcal{G}(\bar{E}) > 0, \\ p > 1 & \qquad\qquad \mathcal{G}(E) < 0\,, \quad \mathcal{G}(\bar{E}) < 0. \end{cases}$$

- condizione **S**

$$\mathcal{G}(E) \cdot \mathcal{G}(\bar{E}) = -p(1-p)S^2 < 0 \quad \textit{sse} \quad 0 \le p \le 1$$

- Allo stesso modo si dimostra che

Teorema. $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Teorema. $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\bar{E}) = 1$

Teorema. se $A \cap B = \emptyset$ allora $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Cor. se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sono *m.d.* allora

$$\mathbb{P}\big(\cup_{j=1}^{k} A_j\big) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(A_j\big)$$

Teorema. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)$

Cor. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(C \mid A, B)$

Esempio di non coerenza $\longmapsto \mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0.45$ oppure $\mathbb{P}(E) = 0.55$, $\mathbb{P}(\bar{E}) = 0.6$;

I TEOREMI DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ DISCENDONO DALLA DEFINIZIONE SOGGETTIVA

[mettiamoci] nelle condizioni di un individuo che debba tenere un banco di scommesse su dati eventi, accettando alle stesse condizioni qualunque scommessa nell'uno o nell'altro senso. Vedremo che egli è costretto allora a rispettare certe restrizioni, che sono i teoremi del calcolo delle probabilità. Altrimenti egli pecca di *coerenza* e perde *sicuramente*, purche l'avversario sappia sfruttare il suo errore. (BdF) $\square$

Tutte le probabilità sono condizionate. (BdB) $\square$

INDIPENDENZA / INDIPENDENZA CONDIZIONATA

- Condizioni formali

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \qquad [\text{In}]$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(A \mid B, C) = \mathbb{P}(A \mid C) \qquad [\text{InC}]$$

$$[\text{In}] \;\Rightarrow\; [\text{InC}]$$

• L'indipendenza stocastica è soggettiva per i .... soggettivisti

Data una sequenza prove ripetute di uno stesso fenomeno

-

$$\text{Le prove sono} \begin{cases} \text{indipendenti} & (\textit{per i frequentisti}) \\ \text{dipendenti} & (\textit{per i soggettivisti}) \end{cases}$$

Attenzione!

- Se gli eventi di una certa successione sono indipendenti allora io, dalla successione, non apprendo nulla;
- Io posso apprendere dal passato solo se le prove ripetute sono dipendenti; solo se il passato mi informa sul futuro; solo se vi è un legame fra passato, presente, futuro.

Esempio 1

In una nota città in cui vivono gli anziani a e b , gli inverni sono, nel 25(%), nel 50(%) nel 25(%) dei casi, o freddi (H_1), o nella norma (H_2), o tiepidi (H_3).
Sia A [B] l'evento "a [b] *muore nel corso del prossimo inverno*".
Siano $\mathbb{P}(A|H_j)$ e $\mathbb{P}(B|H_j)$, con $j = 1, 2, 3$, le probabilità di morte subordinate alle ipotesi (H_1, H_2, H_3).
Supposta l'indipendenza condizionata di A e B, cioè

$$\mathbb{P}(A \cap B|H_j) \;=\; \mathbb{P}(A|H_j) \cdot \mathbb{P}(B|H_j) \;,\; \forall j$$

dire se A e B sono indipendenti, cioè se $\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

H_j	$\mathbb{P}(H_j)$	$\mathbb{P}(A\|H_j)$	$\mathbb{P}(B\|H_j)$	$\mathbb{P}(A \cap B\|H_j)$
H_1	0.25	0.30	0.20	.0600
H_2	0.50	0.12	0.10	.0120
H_3	0.25	0.05	0.03	.0015

Tavola **2.2** - *Probabilità condizionate.*

[SEGUITO]

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}\big(A|H_j\big) = 0.1475\,, \\
\mathbb{P}(B) &= \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}\big(G|H_j\big) = 0.1075\,,
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0.1475 \times 0.1075 = 0.0159\,,
$$

$$
\mathbb{P}(A \cap B) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}\big(A \cap B|H_j\big) = 0.0214
$$

- *Ergo* : l'indipendenza subordinata non implica l'indipendenza.

Esempio 2 Data una famiglia con almeno due figli e gli eventi

$$\begin{aligned} M_j &= \text{"}\textit{il j-mo figlio è M}\text{"} , \\ F_j &= \text{"}\textit{il j-mo figlio è F}\text{"} , \\ D &= \text{"}\textit{i primi due figli sono di differente sesso}\text{"} , \end{aligned}$$

Sapendo che $\mathbb{P}(M_j) = p_M$ e $\mathbb{P}(F_j) = p_F = 1 - p_M$, $\forall j$ dire se gli eventi (M_1, D) sono indip./ corr +/ corr -/, nell'ipotesi che il sesso del secondo figlio non dipende dal sesso del primo.

Si ha $\mathbb{P}(M_1 \cap D) = \mathbb{P}(M_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(F_2) = p_M(1 - p_M)$.
Poiché $D = \big(M_1 \cap F_2\big) \cup \big(F_1 \cap M_2\big)$ segue che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}\big(M_1 \cap F_2\big) + \mathbb{P}\big(F_1 \cap M_2\big) \\ &= \mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1) \cdot \mathbb{P}(M_2) \\ &= p_M \cdot (1 - p_M) + (1 - p_M) \cdot p_M \\ &= 2 \cdot p_M(1 - p_M) . \end{aligned}$$

[SEGUITO]

dunque : $\mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(D) = 2p_M^2(1 - p_M)$.

Gli eventi (M_1, D) sono indipendenti **sse**

$$\mathbb{P}(M_1 \cap D) = \mathbb{P}(M_1) \cdot \mathbb{P}(D)\,,$$

$$p_M(1 - p_M) = 2p_M^2(1 - p_M)\,.$$

Ergo, se il soggetto fissa

$$\begin{cases} p_M = p_F = \frac{1}{2} & \longmapsto (M_1, D) \text{ sono} \quad \text{indipendenti} \\ p_M = 0.511 \ (\text{ISTAT}) & \longmapsto \qquad\qquad\qquad \text{corr neg} \end{cases}$$

EVENTI INDIPENDENTI/FISICAMENTE SEPARATI

- L'indipendenza non è un fatto fisico bensí soggettivo;

- Casi di eventi F. S. $\longrightarrow$ eventi indipendenti ;
  Esempio: prove processo bernoulliano
- Casi di eventi F. S. $\longrightarrow$ eventi dipendenti ;
  Esempio: prove processo scambiabile

- Casi di eventi non F. S. $\longrightarrow$ che sono indipendenti ;
  Tornare all'**Esempio 2**

- È falso dire : poiché gli eventi F. S. sono perció stesso indipendenti.

STRUTTURE DI DIPENDENZA

bernoullianità, markovianità, periodicità, stazionarietà, scambiabilità, ...

- ESEMPI Dati gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, si ha

bernoullianità, se
$\mathbb{P}(E_1, E_2, \ldots, E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdots \mathbb{P}(E_n)$

markovianità, se
$\mathbb{P}(E_0, E_1, \ldots, E_n) = \mathbb{P}(E_0) \cdot \mathbb{P}(E_1|E_0) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdots \mathbb{P}(E_n|E_{n-1})$

scambiabilità, se
$\mathbb{P}(E_1, E_2, \ldots, E_n) = \mathbb{P}(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n})$, $\forall$ permutazione degli indici

- [visto da Tizio]

bernoullianità,

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1 \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, \theta) \;=\; \mathbb{P}(X_n = x_n \mid \theta)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n \mid \theta) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i \mid \theta)$$

Gli eventi $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ sono ▶ *iid*

- [visto da Caio]

scambiabilità,

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1 \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) \;= \\ = \; \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_{n-1}} = x_{i_{n-1}})$$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \;= \\ = \; \mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1}, X_{i_2} = x_{i_{n2}}, \ldots, X_{i_n} = x_{i_n})$$

Gli eventi $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ sono ▶ *id*

Processo bernoulliano di alternativa dicotomico, $(0-1)$

$X_i \in \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(X_i = x_i \mid \theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \quad$ con $\theta \in [0,1]$.

Ergo, date le osservazioni $\quad (X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$, posto $\quad s = \sum_{i=1}^n x_i, \quad$ si ha

$$\mathbb{P}\big(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n \mid \theta\big) \; = \; = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i|\theta) \; = \; \theta^s(1-\theta)^{n-s}$$

Sia $\big(X_n\big)_{n\geq 1} = X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione indefinita e scambiabile di n.a. $(0-1)$; sia $\big(P_n\big)_{n\geq 1}$, con $P_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, la corrispondente successione delle proporzioni di successo. Allora

- Vale il *teorema di rappresentazione*

Teorema (*B. de Finetti*, 1937)
(i) la legge della $n-$pla $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ è, $\forall n$, rappresentabile nella forma

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \; = \; \int_0^1 \theta^s (1-\theta)^{n-s} \cdot \mathrm{d}H(\theta) \;, \tag{1}$$

(ii) la funzione peso $H(\cdot)$ è la *f.r.* limite

$$H(\theta) \; = \; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(P_n < \theta\big) \, . \; \triangleleft \tag{2}$$

Il teorema di rappresentazione afferma che
(1) tutti e soli i processi di alternativa scambiabili ed illimitati sono misture di processi bernoulliani dicotomici;
(2) assegnati il processo bernoulliano $\big(X_n\big)_{n\geq 1}$ e la funzione peso $H(\theta)$, la legge del processo scambiabile è determinato; *viceversa*, nota che sia la legge del processo scambiabile, si può sempre risalire al peso $H(\theta)$.

Nel 1920 apparve sulla rivista *Biometrika*, no.13, pp. 1-16, l'articolo
The fundamental problem in practical statistics
in cui Karl Pearson, poneva la cruciale domanda

"Un evento si è verificato p *volte su* $n = p + q$ *prove e non abbiamo alcuna conoscenza a priori della frequenza dell'evento della popolazione totale e delle sue manifestazioni. Qual'è la probabilità che esso si verifichi* r *volte su* $m = r + s$ *prove ulteriori?"*

- La domanda, per come è formulata, non ha né può avere risposta. Nulla si dice infatti su come si sono svolte le $n = p + q$ prove, né come si intende far proseguire l'esperimento. Né, soprattutto, su quale sia il legame che collega (o che fa dipendere) le osservazioni future alle passate.
- L'unica risposta può provenire dai modelli predittivi.

$$\mathbb{P}(Y = y, \theta \mid dati) = g_1(\theta \mid dati) \cdot \mathbb{P}(Y = y \mid dati, \theta)$$

$$\mathbb{P}(Y = y, \theta \mid dati) = g_1(\theta \mid dati) \cdot \mathbb{P}(Y = y \mid \theta) \quad \longleftarrow \textbf{scamb.}$$

Legge predittiva di $Y = y$ (futura osservazione) subord/ *dati*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = y \mid dati) &= \int_\Theta \mathbb{P}(Y = y, \theta \mid dati)\, d\theta \\ &= \int_\Theta \mathbb{P}(Y = y \mid \theta) \cdot g_1(\theta \mid dati)\, d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_1(\theta \mid dati) &= \frac{g_0(\theta) \cdot \mathbb{P}(dati \mid \theta)}{\displaystyle\int_\Theta g_0(\theta) \cdot \mathbb{P}(dati \mid \theta)\, \mathrm{d}\theta}, \\ &= \frac{g_0(\theta) \cdot \displaystyle\prod_i \mathbb{P}(X_i = x_i \mid \theta)}{\displaystyle\int_\Theta g_0(\theta) \cdot \prod_i \mathbb{P}(X_i = x_i \mid \theta)\, \mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

Donde, sostituendo e marginalizzando

$$\mathbb{P}(Y = y \mid dati) = \frac{\displaystyle\int_\Theta g_0(\theta) \cdot \mathbb{P}(Y = y \mid \theta) \cdot \prod_i \mathbb{P}(X_i = x_i \mid \theta) \, \mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_\Theta g_0(\theta) \cdot \prod_i \mathbb{P}(X_i = x_i \mid \theta) \, \mathrm{d}\theta}$$

- Lo schema della scambiabilità va considerata *OQC* l'ordine delle prove è *irrilevante* ai fini previsivi ;
- La scambiabilità è uno schema teorico del soggetto; non è una proprietà intrinseca delle prove;
- ELICITAZIONE (ed uso) della legge *a priori* $g_0(\theta)$;
- Si può evitare di elicitare $g_0(\theta)$? $\longleftarrow$ **NO**

È oggettiva la scelta

- del modello ?

- del livello di significatività α 0.05, 0.01, 0.001 ?
- della statistica *test* ?

- dell'ipotesi da testare $H_0 : \theta = \theta_0$?

Considerazioni di L. J. Savage

Quanto al caso di esperimenti, ed anche di esperimenti statistici, si deve pur sempre decidere, in modo piú o meno soggettivo, fra altre cose anzitutto se valga la pena di farle. (L.J.S.) $\square$

.... L'esempio consiste nel presentare tre esperimenti isomorfici. ma che concernono tre diversi campi.

I) Una signora (famosa per la statistica come la "signora di Fisher") afferma di riuscire a distinguere dal sapore se è stato versato il latte nel the nel latte. Si fanno 10 esperimenti con 10 coppie di tazze, e la signora riesce in ciascuno degli esperimenti.

II) Un esperto tedesco di musica del XVIII secolo afferma di riuscire a distinguere se una pagina di musica è di Haydn o di Mozart. Si fanno 10 esperimenti e tutti dànno ragione all'esperto.

III) Incontriamo in viaggio un ubriaco che si dice capace di indovinare tutto, e per esempio di dire se, mettendo una moneta contro il braccio, questa è testa o croce. Avendo tempo da perdere accettiamo di fare l'esperimento, e questo, ripetuto 10 volte, riesce tutte le 10 volte in favore dell'affermazione dell'ubriaco.

Tutti e tre gli esperimenti consistono nell'indovinare 10 volte su 10 coppie di risultati, ed hanno pertanto lo stesso livello di significatività, per il loro risultato oggettivo, nel senso che in tutti si ha la stessa probabilità che la coincidenza si verifichi qualora la si attribuisca "al caso" (come se si fosse scelto in ogni colpo giocando a testa e croce).

Però i 10 risultati, identici nei tre casi, non mi parlano sempre collo stesso linguaggio. E ciò non è paradossale, perché nei tre casi entrano diverse informazioni. (L.J.S.) □