

Giorgio Querzoli

# Dispense di Meccanica dei fluidi nell'Ambiente



e-mail: [giorgio.querzoli@unica.it](mailto:giorgio.querzoli@unica.it)

Dipartimento di Ingegneria Civile Ambientale e Architettura  
Università degli Studi di Cagliari

“... Infine c'è un problema fisico comune a molti campi, molto antico e non ancora risolto. Non è il problema di trovare nuove particelle fondamentali, ma qualcosa di lasciato in sospeso molto tempo fa, più di cento anni. Nessuno è mai riuscito ad analizzarlo matematicamente in modo soddisfacente, nonostante la sua importanza nelle scienze affini alla fisica: è l'analisi dei flussi vorticosi o flussi turbolenti. Osservando l'evoluzione di una stella si arriva un punto in cui si capisce che sta per iniziare la convezione, e poi non si riesce a prevedere più niente. Qualche milione di anni più tardi la stella esplode, ma non si riesce a darne una ragione. Non riusciamo ad analizzare i fenomeni meteorologici. Non conosciamo i meccanismi dei moti che avvengono all'interno della Terra. La forma più semplice del problema è: si prende un tubo lungo e si pompa dentro di esso ad alta velocità. Ci chiediamo: per spingere una data quantità d'acqua lungo il tubo quanta pressione ci vuole? È impossibile stabilirlo a partire dai principi elementari e dalle proprietà dell'acqua. Se l'acqua scorre lentamente oppure se si usa un liquido viscoso come il miele, allora si riesce a fare benino, lo troverete su qualsiasi libro di testo. Quello che proprio non si riesce a fare è analizzare l'acqua vera, quella bagnata, che scorre in un tubo. Ecco il problema centrale che un giorno o l'altro dovremo riuscire a risolvere. ...”

Richard P. Feynman (Nobel per la fisica nel 1965)

da: *Sei pezzi facili*, Ed. Adelphi, 2000

# SOMMARIO

<b>SOMMARIO</b> .....	<b>3</b>
<b>INTRODUZIONE:</b> .....	<b>6</b>
<b>1. RICHIAMI DI ANALISI TENSORIALE</b> .....	<b>7</b>
1.1. INTRODUZIONE .....	7
1.2. OPERAZIONI TRA TENSORI.....	7
1.2.1. <i>Somma</i> .....	7
1.2.2. <i>Moltiplicazione per uno scalare</i> .....	8
1.2.3. <i>Prodotto</i> .....	8
1.2.4. <i>Prodotto scalare</i> .....	8
1.3. OPERATORE DI KRONECKER .....	8
1.4. SISTEMI DI RIFERIMENTO ORTONORMALI .....	9
1.5. CAMBIAMENTO DI SISTEMA DI RIFERIMENTO .....	9
1.6. PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DI UN TENSORE .....	11
1.7. PRODOTTO VETTORIALE.....	11
1.8. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI.....	11
1.9. CAMPI TENSORIALI.....	12
1.10. TEOREMI DI GREEN E STOKES.....	13
<b>2. CINEMATICA DEI FLUIDI</b> .....	<b>15</b>
2.1. CINEMATICA LOCALE E TENSORE GRADIENTE DI VELOCITÀ .....	15
2.1.1. <i>Velocità di rotazione rigida</i> .....	16
2.1.2. <i>Velocità di deformazione</i> .....	17
2.2. DESCRIZIONE LAGRANGIANA ED EULERIANA DI UN CAMPO .....	20
2.2.1. <i>Descrizione euleriana</i> .....	21
2.2.2. <i>Descrizione Lagrangiana</i> .....	21
2.3. CLASSIFICAZIONE DEI MOTI .....	22
<b>3. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI</b> .....	<b>23</b>
3.1. I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI .....	23
3.2. TEOREMA DI REYNOLDS .....	24
3.3. CONSERVAZIONE DELLA MASSA .....	26
3.3.1. <i>Forma globale</i> .....	26
3.3.2. <i>Forma locale</i> .....	27
3.3.3. <i>Ipotesi di Boussinesq ed equazione di continuità per fluidi debolmente comprimibili</i> .....	27
3.4. BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO .....	28
3.4.1. <i>Forma globale</i> .....	28
3.4.2. <i>Verso la forma locale</i> .....	29
3.5. TEOREMA DI CAUCHY E TENSORE DELLE TENSIONI.....	29
3.6. EQUAZIONE DI CAUCHY .....	31
3.7. BILANCIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO .....	32
3.8. EQUAZIONI COSTITUTIVE .....	32
3.8.1. <i>Equazione di stato</i> .....	33
3.8.2. <i>Equazione costitutiva</i> .....	34
3.9. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES SOTTO L'IPOTESI DI BOUSSINESQ .....	35
3.9.1. <i>Equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale</i> .....	38
<b>4. STABILITÀ DEI FLUSSI AMBIENTALI</b> .....	<b>41</b>
4.1. STABILITÀ STATICA .....	41
4.2. INSTABILITÀ DI KELVIN – HELMHOLTZ.....	43
<b>5. TURBOLENZA</b> .....	<b>48</b>
5.1. DEFINIZIONE .....	48
5.2. DESCRIZIONE STATISTICA DELLA TURBOLENZA .....	51
5.2.1. <i>Media di insieme e media temporale</i> .....	51
5.2.2. <i>Densità di probabilità</i> .....	52
5.2.3. <i>Momenti di ordine superiore</i> .....	52

5.2.4. Correlazioni .....	54
5.2.5. Spettri di potenza.....	55
5.3. LE SCALE DELLA TURBOLENZA .....	56
5.3.1. Scale integrali .....	56
5.3.2. Scala di Taylor .....	56
5.4. EQUAZIONI PER LE QUANTITÀ MEDIE .....	57
5.4.1. Decomposizione di Reynolds.....	57
5.4.2. Equazione di bilancio della massa.....	58
5.4.3. Equazione di Reynolds .....	58
5.4.4. Tensore degli sforzi di Reynolds .....	59
5.5. EQUAZIONI DI CHIUSURA .....	60
5.6. EQUAZIONI GLOBALI PER I FLUSSI TURBOLENTI .....	61
5.6.1. Conservazione della massa .....	61
5.6.2. Bilancio della quantità di moto.....	62
<b>6. IL BILANCIO DI ENERGIA CINETICA .....</b>	<b>64</b>
6.1. ENERGIA CINETICA DEL MOTO MEDIO .....	64
6.1.1. Bilancio su un volume di controllo ed interpretazione fisica.....	65
6.1.2. Equazione di bilancio dell'energia cinetica del moto medio in forma locale .....	66
6.2. ENERGIA CINETICA TURBOLENTE.....	67
6.3. STABILITÀ DINAMICA.....	72
6.3.1. Numero di Richardson del flusso .....	72
6.3.2. Analisi di stabilità dinamica .....	72
<b>7. STRATO LIMITE NEUTRO.....</b>	<b>74</b>
7.1. TRANSIZIONE DELLO STRATO LIMITE .....	74
7.2. STRUTTURA DELLO STRATO LIMITE TURBOLENTO.....	75
7.2.1. Sottostrato laminare.....	76
7.2.2. Sottostrato di equilibrio .....	76
7.2.3. Sottostrato esterno .....	78
7.3. STRATO LIMITE TURBOLENTO SU SUPERFICI SCABRE.....	78
<b>8. DIFFUSIONE E DISPERSIONE DI TRACCIANTI PASSIVI .....</b>	<b>79</b>
8.1. EQUAZIONI DELLA DIFFUSIONE E TRASPORTO .....	79
8.1.1. Principio di conservazione della massa di tracciante.....	79
8.1.2. Legge di Fick.....	80
8.1.3. Relazione tra moto molecolare Browniano e legge di Fick .....	81
8.1.4. Equazione globale della diffusione e trasporto.....	82
8.1.5. Equazione della diffusione e trasporto in forma locale .....	83
8.1.6. Equazione della diffusione e trasporto in forma adimensionale.....	84
8.1.7. Diffusione semplice .....	85
8.2. EQUAZIONI DELLE DISPERSIONE TURBOLENTE.....	86
8.2. Equazioni della dispersione in forma globale.....	86
8.2.1. Equazione della dispersione turbolenta in forma locale.....	87
8.3. EQUAZIONI DI CHIUSURA DELLA TURBOLENZA .....	88
8.4. DESCRIZIONE LAGRANGIANA DELLA TURBOLENZA.....	90
8.4.1. Relazione tra probabilità e concentrazione .....	90
8.4.2. Teoria della dispersione di Taylor .....	90
<b>9. STRATO LIMITE ATMOSFERICO.....</b>	<b>95</b>
9.1. TEMPERATURA POTENZIALE E POTENZIALE VIRTUALE.....	95
9.1.1. Stabilità statica nello strato limite atmosferico.....	96
9.1.2. Definizione di temperatura potenziale e stabilità statica.....	97
9.1.3. Relazione tra temperatura assoluta e temperatura potenziale e gradiente di temperatura adiabatico .....	99
9.2. EVOLUZIONE GIORNALIERA DELLO STRATO LIMITE ATMOSFERICO .....	100
9.2.1. Strato Limite Convettivo.....	101
9.2.2. Strato Stabile Notturmo.....	102
9.2.3. Strato Limite Residuo .....	102
9.2.4. Strato di Inversione .....	103
9.2.5. Strato limite neutro .....	103
9.3. REGIME DI BREZZA.....	103
9.4. ISOLA DI CALORE URBANA .....	104
9.5. IL CICLO ANNUALE DI STRATIFICAZIONE DEI LAGHI .....	105

<b>10. DISPERSIONE NELLE CORRENTI .....</b>	<b>107</b>
10.1. ANALOGIA DI REYNOLDS .....	107
10.1.1. <i>Sforzo tangenziale nello strato limite</i> .....	108
10.1.2. <i>Il coefficiente di dispersione turbolenta verticale</i> .....	109
10.2. EQUAZIONE DELLA DISPERSIONE PER LE CORRENTI .....	110
10.3. COEFFICIENTE DI DISPERSIONE LONGITUDINALE .....	112
<i>Formulazione adimensionale</i> .....	113
<i>Dispersione longitudinale negli alvei naturali</i> .....	114
<b>11. SCARICHI A MARE .....</b>	<b>116</b>
11.1. LE FASI DELLA DILUIZIONE .....	116
11.2. CLASSIFICAZIONE DEGLI SCARICHI A MARE .....	117
11.3. GETTO SEMPLICE .....	118
11.4. PENNACCHIO.....	122
11.5. GETTO DOTATO DI GALLEGGIAMENTO .....	124
11.6. CRITERI PROGETTUALI DI MASSIMA .....	125
11.6.1. <i>Effluenti leggeri</i> .....	125
11.6.2. <i>Effluenti pesanti</i> .....	126

## **INTRODUZIONE:**

Tra le matrici ambientali, quelle fluide ricoprono una particolare rilevanza poiché la maggior parte delle attività antropiche si svolge al loro interno o in stretto contatto con esse. Le nostre attività hanno spesso come effetto di rilasciare inquinanti o perturbare la natura chimico-fisica delle matrici fluide ambientali sia fluide, come laghi, fiumi o il mare, sia gassose come l'atmosfera, il fluido ambientale all'interno del quale passiamo la nostra vita. È quindi molto importante valutare la natura e gli impatti di queste perturbazioni, e in queste pagine si daranno le basi per comprendere i fondamenti di meccanica dei fluidi alla base di questi processi, come la dispersione, il mescolamento e il trasporto degli inquinanti, mentre sono lasciati ad altri contesti tutti gli altri aspetti, in primis quelli che riguardano i processi chimici.

Analizzando il problema della meccanica dei fluidi nell'ambiente a scala planetaria, è immediato comprendere come l'energia che genera ogni fenomeno provenga dal sole attraverso l'irraggiamento. Questa energia si trasforma in variazioni di temperatura e altre trasformazioni che a loro volta modificano la densità del fluido. Se consideriamo il mare, ad esempio, l'irraggiamento solare aumenta la temperatura e promuove l'evaporazione con la conseguente variazione di concentrazione salina, determinando, in entrambi i casi, **variazioni di densità**. Queste variazioni in generale sono molto piccole rispetto alla densità del fluido, eppure sono il principale motore della dinamica che osserviamo nei fluidi ambientali, dalla scala planetaria a quella locale. E sarà proprio la **scala locale**, che più interessa l'ingegneria ambientale, poiché è quella alla quale si manifestano i principali impatti delle attività antropiche, a essere l'oggetto di questa trattazione. A questa scala sarà possibile **trascurare gli effetti della forza di Coriolis** dovuta alla rotazione terrestre, che invece domina i fenomeni a scala planetaria. Oltre alla dinamica del fluido stesso, saranno considerati anche il trasporto e il mescolamento di specie chimiche, siano esse inquinanti (in assenza di reazioni chimiche) o i sali disciolti nel mare, oppure siano proprietà fisiche, come la temperatura.

Nella meccanica dei fluidi, tutta la trattazione è svolta utilizzando l'ipotesi di **mezzo continuo**: si considera cioè il fluido come una distribuzione continua di materia nello spazio, dimenticando che in realtà esso è costituito da atomi e molecole in agitazione termica all'interno di uno spazio in gran parte vuoto. In questo approccio, grandezze come la temperatura, la concentrazione di una specie chimica o la salinità del mare, analogamente alla densità, hanno in comune il fatto di essere considerate come proprietà aggiuntive del fluido descritte da funzioni scalari del tempo e dello spazio. Per questo motivo, sono definite tipicamente con il termine comune di **scalari passivi**, ed hanno una trattazione matematica, per molti aspetti, comune.

La dinamica di uno scalare passivo, si pensi ad esempio alla concentrazione di una specie chimica, è guidata principalmente da due fenomeni: la diffusione molecolare, che agisce anche in un fluido in quiete, determinando un flusso dello scalare dalle zone a concentrazione più alta a quelle dove è più bassa, e la dispersione turbolenta, la quale invece è collegata al moto del fluido ed è presente solo nel caso in cui il flusso sia turbolento. Per quanto entrambi siano fondamentali, l'esperienza ci dimostra che la dispersione turbolenta agisce molto più rapidamente della diffusione molecolare e gioca perciò, quando presente, un ruolo dominante. Pensiamo ad esempio allo zucchero depositato sul fondo di una tazzina di caffè: lasciando il fluido in quiete, la concentrazione di zucchero diventerà circa uniforme all'interno di tutta la tazzina solo dopo molte ore, mentre se usiamo un cucchiaino per mescolare il caffè diventerà uniformemente dolce nel giro di pochi secondi. La dispersione gioca quindi un ruolo fondamentale nella dinamica degli scalari passivi, ed essendo causata dalla turbolenza, per studiarla è necessario conoscere approfonditamente le sue caratteristiche all'interno del flusso in esame.

Inizieremo quindi ricavando le equazioni della meccanica dei fluidi in presenza di piccole differenze di densità, saranno poi indagati i meccanismi che determinano la presenza di turbolenza o meno in un flusso, per poi ricavare le equazioni che regolano la dinamica degli scalari passivi attraverso il trasporto e la dispersione.

# 1. RICHIAMI DI ANALISI TENSORIALE

## 1.1. Introduzione

I fenomeni fisici sono rappresentabili in uno spazio vettoriale tridimensionale nel quale si suppone valida la geometria euclidea. Le quantità fisiche che caratterizzano i fenomeni sono dunque funzione delle coordinate di un generico punto  $(x_1, x_2, x_3)$  e del tempo,  $t$ .

In questo spazio le grandezze fisiche sono rappresentate attraverso entità matematiche diverse a seconda delle proprietà geometriche attraverso le quali sono definite:

- gli **scalari** sono definiti attraverso *un numero reale* associato ad un punto dello spazio<sup>1</sup>;
- i **vettori** sono definiti attraverso *un numero reale* associato ad un punto dello spazio e ad *una direzione orientata*<sup>2</sup>, e si rappresentano in un sistema di riferimento attraverso 3 numeri reali (le componenti del vettore) organizzati in una matrice  $3 \times 1$ ;

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};$$

- i **tensori** sono definiti attraverso *un numero reale* associato ad un punto dello spazio e a *2 direzioni orientate*<sup>3</sup>, e sono definiti per mezzo di 9 numeri reali (le componenti del tensore), organizzati in una matrice  $3 \times 3$ :

$$\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

In modo più generale si può dire che la descrizione dei fenomeni è effettuata attraverso tensori di differente ordine,  $d$ , che, nello spazio a tre dimensioni, sono definiti mediante  $3^d$  numeri reali (le componenti). Pertanto uno scalare può essere considerato un tensore di ordine zero; un vettore, un tensore di ordine 1, mentre i tensori di ordine 2 sono spesso chiamati semplicemente tensori.

Per poter utilizzare queste entità è necessario definire le operazioni che possono essere effettuate e le leggi secondo le quali si trasformano le loro componenti in seguito ad un cambiamento di sistema di riferimento.

## 1.2. Operazioni tra tensori

Richiamiamo brevemente le principali operazioni che possono essere effettuate con i tensori, che ricalcano quelle dell'algebra matriciale dato che essi sono descritti per mezzo delle loro componenti organizzate sempre in una matrice  $3 \times 3$  di numeri reali.

### 1.2.1. Somma

La somma può essere effettuata solo tra tensori dello stesso ordine e fornisce ancora un tensore dello stesso ordine degli addendi che ha per componenti la somma delle componenti omologhe degli addendi:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow c_i = a_i + b_i \quad (\text{vettori})$$

oppure

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{tensori})$$

<sup>1</sup> Esempi di quantità fisiche descritte da un campo scalare sono la temperatura o la pressione.

<sup>2</sup> Esempi di quantità fisiche rappresentate da un campo vettoriale sono la forza, la velocità o l'accelerazione.

<sup>3</sup> Come vedremo più avanti, sono descritti da un campo tensoriale gli sforzi interni ad un fluido

### 1.2.2. Moltiplicazione per uno scalare

Moltiplicare un tensore per uno scalare corrisponde a moltiplicare ciascuna componente del tensore per lo scalare:

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b} \Rightarrow c_i = \lambda b_i \quad (\text{vettori})$$

oppure

$$\underline{\underline{c}} = \lambda \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = \lambda b_{ij} \quad (\text{tensori})$$

### 1.2.3. Prodotto

Il prodotto tra tensori si effettua con il consueto prodotto righe per colonne tra le matrici delle componenti. Se indichiamo con A, B e C, rispettivamente, le matrici delle componenti del tensore  $\underline{\underline{a}}$ ,  $\underline{\underline{b}}$  e  $\underline{\underline{c}}$ , si ha:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \Rightarrow C = A B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1,3} a_{ik} b_{kj}$$

o, seguendo la notazione di Einstein:

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

secondo la quale si sottintende la sommatoria sugli indici ripetuti allo stesso membro di un'equazione, se tale indice non compare anche nel membro a sinistra dell'equazione<sup>4</sup>.

Secondo le stesse regole si moltiplica un vettore per un tensore:

$$\mathbf{c} = \underline{\underline{a}} \mathbf{b} \Rightarrow c_i = \sum_{j=1,3} a_{ij} b_j = a_{ij} b_j.$$

### 1.2.4. Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due tensori è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow c = \sum_{j=1,3} a_j b_j = a_j b_j \quad (\text{vettori})$$

## 1.3. Operatore di Kronecker

Il delta di Kronecker,  $\delta_{ij}$ , che si può riconoscere essere un tensore del secondo ordine, è definito in modo che, in qualsiasi sistema di riferimento, risulti:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j;$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j.$$

La matrice delle sue componenti non è altro che la matrice identità:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se si moltiplica  $\delta_{ij}$  per un tensore caratterizzato dall'aver uno dei pedici coincidente con uno dei pedici del delta di Kronecker, si produce una variazione del pedice del tensore stesso:

<sup>4</sup> usando la notazione di Einstein, il prodotto righe per colonne tra matrici si ottiene ripetendo gli indici interni contigui, sui quali sono sottintese le somme, mentre il primo e l'ultimo indice sono relativi, rispettivamente all'indice di riga e di colonna. Per esempio:  $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \underline{\underline{c}}$  diventa:  $d_{ij} = a_{im} b_{mn} c_{nj}$  con le somme sottintese sugli indici m ed n.

$$a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$$

Infatti, poiché l'indice  $i$  è ripetuto, sono sottintese le somme, quindi sviluppando:

$$a_{ik} \delta_{kj} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1} \cdot \delta_{1j} + a_{i2} \cdot \delta_{2j} + a_{i3} \cdot \delta_{3j}.$$

Dei tre termini  $\delta_{ij}$  sappiamo già che solo uno è diverso da zero: quello nel quale i due indici dell'operatore di Kroenecker sono uguali, cioè quello in cui  $k = j$ . Quindi nella sommatoria precedente rimane solo il termine  $a_{ij} \cdot \delta_{ij} = a_{ij} \cdot 1$ .

## 1.4. Sistemi di riferimento ortonormali

In uno spazio tridimensionale tutti i vettori possono essere espressi come combinazione lineare di una terna di vettori, linearmente indipendenti tra loro, che costituiscono una base. Quindi, se  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  e  $\mathbf{c}_3$  sono tali che il determinante:

$$\det(C_1 C_2 C_3) \neq 0$$

(avendo indicato con  $C_i$  la matrice colonna delle coordinate del vettore  $\mathbf{c}_i$ ), allora, ogni vettore,  $\mathbf{v}$  può essere espresso come:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{c}_i$$

ed i coefficienti  $v_i$  costituiscono le *componenti* del vettore  $\mathbf{v}$  nel sistema di riferimento  $\{\mathbf{c}_i\}$ .

Se i vettori della base sono ortogonali tra loro:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j &= 0 \text{ per } i \neq j \\ \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j &\neq 0 \text{ per } i = j \end{aligned}$$

il sistema si dice ortogonale. Se inoltre i vettori della base hanno modulo unitario (sono quindi dei *versori*):

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij}$$

allora la base viene detta *ortonormale*, ed il sistema di riferimento è chiamato *cartesiano*. Nei capitoli successivi, tranne diversa indicazione, utilizzeremo sistemi di riferimento cartesiani.

## 1.5. Cambiamento di sistema di riferimento

Consideriamo due sistemi di riferimento  $\{\mathbf{c}_i\}$  e  $\{\mathbf{d}_i\}$  e cerchiamo la trasformazione che lega le componenti di un generico vettore,  $\mathbf{v}$ , nella base di partenza  $\{\mathbf{c}_i\}$  a quelle nella nuova base  $\{\mathbf{d}_i\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{c}_i \\ \mathbf{v} &= v'_i \mathbf{d}_i. \end{aligned}$$

avendo indicato con l'apice le componenti del vettore nel sistema di riferimento  $\{\mathbf{d}_i\}$ . Per ricavare le componenti di  $\mathbf{v}$  nel sistema di riferimento  $\{\mathbf{d}_i\}$ , a partire dalle sue componenti in  $\{\mathbf{c}_i\}$  dobbiamo conoscere la trasformazione  $T$  tale che:

$$v'_i = T_{ij} v_j \quad (1)$$

ovvero:

$$v_i = R_{ij} v'_j$$

avendo indicato con  $R$  la trasformazione inversa di  $T$ :  $R = T^{-1}$ .

Per individuare la forma che assume  $T$  è sufficiente applicare la trasformazione ad un vettore della base  $\mathbf{c}_i$ . Innanzitutto notiamo che le componenti di  $\mathbf{c}_i$  nel sistema di riferimento di cui fa parte sono tutte nulle, tranne la  $i$ -esima che è unitaria. Quindi, se indichiamo con  $c_{ij}$  la  $j$ -esima componente dell' $i$ -esimo vettore della base, avremo che  $c_{ij} = \delta_{ij}$ . Se, usando la  $I$ , trasformiamo le componenti dell' $i$ -esimo vettore di base, otteniamo:

$$c'_{ij} = T_{jk} \delta_{ik} = T_{ji}.$$

Quindi la matrice  $T$  ha per colonne le componenti dei vettori  $\mathbf{c}_i$  rispetto alla base  $\{\mathbf{d}_i\}$ . Con un ragionamento analogo è possibile concludere che la matrice di trasformazione inversa,  $R$ , ha come colonne le componenti dei vettori,  $\mathbf{d}_i$ , del nuovo sistema di riferimento, espresse rispetto al vecchio sistema di riferimento  $\{\mathbf{c}_i\}$ .

Se ci limitiamo a cambiamenti tra sistemi di riferimento ortonormali, è possibile dimostrare che le matrici di trasformazione devono essere *ortogonali*:

$$\underline{T}^t = T^{-1}$$

cioè la matrice trasposta deve coincidere con la matrice della trasformazione inversa. Inoltre il determinante,  $\det(T)$ , deve essere unitario con il segno positivo per trasformazioni che passano da sistemi di riferimento destrorsi a sistemi di riferimento destrorsi, e da sistemi di riferimento sinistrorsi a sistemi di riferimento sinistrorsi, mentre il segno negativo è proprio delle trasformazioni che passano da sistemi destrorsi a sinistrorsi e viceversa.

Per determinare come si trasformano le componenti di un tensore è sufficiente imporre che i suoi effetti sull'applicazione ad un vettore non dipendano dal sistema di riferimento. Supponiamo ad esempio che un tensore  $\underline{a}$  trasformi un vettore  $\mathbf{b}$  in un vettore  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = \underline{a} \mathbf{b}$$

Se indichiamo con lettere maiuscole le matrici delle componenti nel sistema di riferimento  $\{\mathbf{c}_i\}$ , e con un apice quelle nel sistema  $\{\mathbf{d}_i\}$ , l'equazione precedente diventa:

$$V = A B$$

nel sistema di riferimento  $\{\mathbf{c}_i\}$ , e

$$V' = A' B'$$

nel sistema di riferimento  $\{\mathbf{d}_i\}$ . Sostituendo l'equazione (9) nella (13):

$$R V' = A R B'$$

e moltiplicando a sinistra per  $R^{-1}$  si ottiene:

$$(R^{-1} R) V' = V' = (R^{-1} A R) B',$$

poiché  $R R^{-1} = \mathbb{I}$ . Confrontando, infine, la (15) con la (14) è facile verificare che il termine tra parentesi rappresenta proprio l'espressione cercata delle componenti di  $\underline{a}$ :

$$A' = R^{-1} A R.$$

Se la trasformazione è ortogonale, si ha  $R^{-1} = R^t$  e la relazione precedente diventa, scritta per componenti:

$$a'_{ij} = R^{-1}_{ik} a_{km} R_{mj} = R_{ki} a_{km} R_{mj}.$$

## 1.6. Proprietà di simmetria di un tensore

Ogni tensore può essere decomposto in tensori che godono di particolari proprietà di simmetria. Come vedremo nel seguito, alle proprietà di simmetria dei tensori corrispondono proprietà delle grandezze fisiche che essi rappresentano.

Innanzitutto consideriamo la decomposizione di un tensore nella sua **parte simmetrica** ed **antisimmetrica**. Se  $\underline{a}$  è un generico tensore di componenti  $a_{ij}$ , possiamo sempre scrivere:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji})$$

nella quale:

$$\frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) = \text{sym}(\underline{a})_{ij} \text{ è la parte simmetrica di } \underline{a}; \text{sym}(\underline{a})_{ij} = \text{sym}(\underline{a})_{ji}, \text{ mentre}$$

$$\frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji}) = \text{skew}(\underline{a})_{ij} \text{ è la parte antisimmetrica: } \text{skew}(\underline{a})_{ij} = -\text{skew}(\underline{a})_{ji}.$$

Analogamente è possibile scomporre un tensore in una **parte sferica** ed una **deviatoria**:

$$a_{ij} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{a}) \delta_{ij} + (a_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{a}) \delta_{ij})$$

avendo indicato con  $\text{tr}(\underline{a}) = a_{jj}$  (somme per  $j=1,2,3$  sottintese) la **traccia** di  $\underline{a}$ . Il primo termine a secondo membro indica la *parte sferica* di  $\underline{a}$ , ed ha la proprietà che le sue componenti non variano al variare del sistema di riferimento, mentre il secondo termine, racchiuso tra parentesi, rappresenta la sua *parte deviatoria*.

## 1.7. Prodotto vettoriale

Sulla base delle precedenti definizioni è possibile introdurre il *prodotto vettoriale*:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

il quale si può calcolare attraverso la relazione formale:

$$\mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}$$

Bisogna però osservare che il risultato di un prodotto vettoriale non è un vettore ma uno *pseudo-vettore* in quanto non è invariante per tutti i cambiamenti di sistema di riferimento. In particolare, il prodotto vettoriale cambia verso passando da un sistema di riferimento destrorso ad uno sinistrorso e viceversa.

## 1.8. Autovalori ed autovettori

Dato un tensore del secondo ordine  $\underline{a}$ , si vuole trovare il vettore  $\mathbf{b}$  per cui risulti:

$$\underline{a} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}$$

$\mathbf{b}$  è detto *autovettore*,  $\lambda$  è detto *autovalore*. La relazione precedente può anche essere scritta per componenti:

$$a_{ij} b_j = \lambda b_i; \quad \underline{a} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}$$

Per determinare le componenti di  $\mathbf{b}$ , si deve risolvere il sistema lineare omogeneo  $(\underline{a} - \lambda \mathbb{I}) \mathbf{b} = 0$ :

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = 0 \\ a_{21}b_1 + (a_{22} - \lambda)b_2 + a_{23}b_3 = 0 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + (a_{33} - \lambda)b_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha una soluzione non banale se il determinante ad esso associato è uguale a zero:

$$\det(\underline{a} - \lambda \underline{I}) = 0$$

I valori di  $\lambda$  per cui è verificata la precedente relazione, si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

essendo:

$$I_1 = \text{tr}(\underline{a}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii}$$

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \det(\underline{a})$$

$I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  sono quantità scalari che non cambiano al variare del sistema di riferimento: gli *invarianti del tensore*. Gli autovalori  $\lambda$  che si ottengono dalla soluzione dell'equazione caratteristica, possono essere, in generale, numeri reali o complessi; nel caso di tensori simmetrici si può dimostrare che:

- gli autovalori sono reali;
- gli autovettori sono fra di loro ortogonali; poiché gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, essi definiscono un sistema di riferimento cartesiano detto *sistema di riferimento principale* per quel tensore;
- nel sistema di riferimento principale, le uniche componenti differenti da zero del tensore  $\underline{a}$ , sono quelle della diagonale principale e coincidono con gli autovalori:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

## 1.9. Campi tensoriali

Si parlerà di campo tensoriale se in ogni punto di un dominio  $D$  è definito il tensore; quando cioè sono assegnate tutte le componenti del tensore in funzione della posizione  $\mathbf{x} \in D$ .

Si definisce l'operatore vettoriale differenziale  $\nabla$  (leggi: *nabla*):

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}$$

$\nabla$  può operare:

- su un campo scalare  $\varphi$ , ottenendo il vettore gradiente:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} \end{pmatrix}$$

avendo utilizzato la notazione compatta per le derivate parziali, secondo la quale:

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = a_{,i}$$

su un vettore  $\mathbf{a}$  mediante prodotto scalare, ottenendo uno scalare che è la *divergenza* di  $\mathbf{a}$ :

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}) = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_j} = a_{j,j}$$

se un campo vettoriale ha divergenza nulla, è detto *solenoidale*;

- su un vettore  $\mathbf{a}$  mediante prodotto vettore, ottenendo il vettore *rotore* di  $\mathbf{a}$ :

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}) = \nabla \times \mathbf{a}$$

se un campo vettoriale ha rotore nullo, è detto *irrotazionale*;

- su un vettore  $\mathbf{a}$  ottenendo un tensore del secondo ordine la cui generica componente è definita da:

$$(\nabla \mathbf{a})_{ij} = \partial a_j / \partial x_i = a_{j,i}$$

Il gradiente di una funzione potenziale è diretto lungo la normale, identificata dal versore  $\mathbf{n}$ , delle superfici equipotenziali; infatti, indicato con  $\mathbf{s}$  il versore che identifica una generica direzione, la componente di  $\mathbf{a} = \nabla \varphi$  lungo  $\mathbf{s}$  è data da:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = a_i \frac{dx_i}{ds} = a_i \cos \alpha_{is} = a_i s_i$$

se  $\mathbf{s}$  è contenuta nel piano tangente, risulta:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = 0$$

quindi il vettore  $\mathbf{a}$  è diretto secondo la normale  $\mathbf{n}$ .

Si dimostra che un campo potenziale è irrotazionale e, viceversa, che un campo irrotazionale è potenziale.

Per un campo irrotazionale e solenoidale il *laplaciano*, del potenziale:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$$

è uguale a zero.

## 1.10. Teoremi di Green e Stokes

Se  $F$  è una funzione definita in tutti i punti di un dominio limitato  $V$  racchiuso dalla superficie chiusa  $S$ , risulta (*teorema di Green*):

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x_i} dV = \iint_S F n_i dS$$

essendo, così come nel seguito,  $\mathbf{n}$  la normale alla superficie esterna al volume.

Se sono definite in tutto il dominio le componenti di un vettore  $\mathbf{a}$ , applicando il teorema di Green per le tre componenti di  $\mathbf{a}$  si ottiene il *teorema della divergenza*:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \iiint_V \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dV = \iint_S a_j n_j dS = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS$$

l'integrale di superficie è il flusso di  $\mathbf{a}$  attraverso la superficie  $S$ . Usando la notazione compatta per le derivate il teorema della divergenza si scrive:

$$\iiint_V a_{j,j} dV = \iint_S a_j n_j dS \quad (2)$$

Infine, assegnata una linea chiusa  $L$ , con versore tangente  $\mathbf{s}$ , in un campo  $D$  in tutti i punti del quale risulti definito il vettore  $\mathbf{a}$  ed una superficie aperta  $S$  in  $D$  avente come contorno  $L$ , risulta (*teorema di Stokes*):

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} \, dl = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3)$$

la quale stabilisce che: la circolazione di  $\mathbf{a}$  (il primo membro dell'equazione) è uguale al flusso del rotore di  $\mathbf{a}$  attraverso una qualsiasi superficie  $S$  delimitata da  $L$ .

## 2. CINEMATICA DEI FLUIDI

### 2.1. Cinematica locale e tensore gradiente di velocità

La descrizione del comportamento cinematico di un fluido, e quindi di un mezzo continuo, richiede di essere in grado di descrivere il moto in un intorno infinitesimo di un punto qualsiasi del dominio che stiamo studiando. Consideriamo perciò un generico punto,  $O$ , ed un volumetto infinitesimo intorno ad esso, tale che la velocità al suo interno possa essere approssimata con uno sviluppo di Taylor al prim'ordine nell'intorno di  $O$ . Seguendo la consuetudine chiameremo tale volumetto *particella fluida*<sup>5</sup>. Scegliamo quindi una terna di assi di riferimento che, ad un certo istante, ha origine in  $O$  e osserviamo il moto del fluido per un intervallo di tempo  $\Delta t$ .

L'elementino di materia fluida (altrimenti detto *punto materiale*) inizialmente situato in  $O$ , durante l'intervallo di tempo  $\Delta t$ , si sposta fino al punto  $O'$  con velocità  $(\mathbf{u})_O$ :

$$OO' = \mathbf{u}(O) \Delta t$$

Contemporaneamente, un generico punto  $P$  appartenente alla particella fluida, individuato dalla sua posizione  $\mathbf{x}$  nell'intorno di  $O$ , si sposta in  $P'$  con velocità  $\mathbf{u}$  (Figura 1):

$$PP' = \mathbf{u}(P) \Delta t$$

La velocità  $\mathbf{u}(P)$ , generalmente diversa da  $\mathbf{u}(O)$ , si ottiene come sviluppo in serie nell'intorno dell'origine:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(O) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right)_O x_j + \dots$$

o, per componenti:

$$u_i = u_i(O) + (u_{i,j})_O x_j + \dots$$

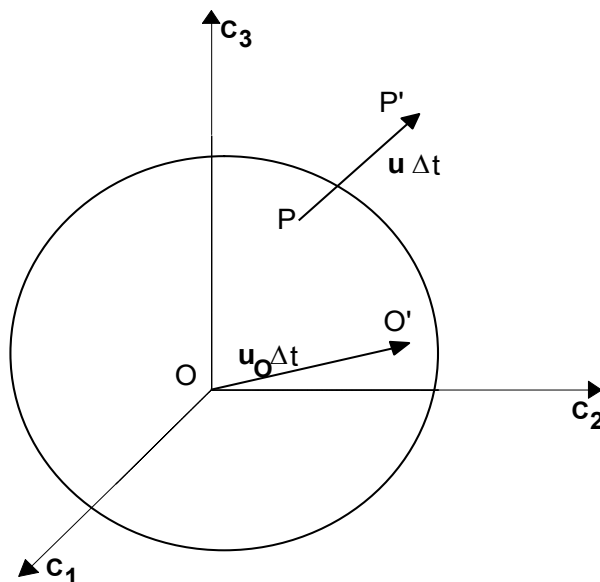


FIGURA 1

Lo spostamento di un generico punto di una particella fluida è dunque descritto dal tensore gradiente di velocità valutato nel punto  $O$  (sarà in seguito omissa il pedice  $O$ ):

<sup>5</sup> senza nessun riferimento alle particelle elementari che costituiscono la materia

$$\nabla \mathbf{u}^t = \begin{pmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \partial u_1 / \partial x_2 & \partial u_1 / \partial x_3 \\ \partial u_2 / \partial x_1 & \partial u_2 / \partial x_2 & \partial u_2 / \partial x_3 \\ \partial u_3 / \partial x_1 & \partial u_3 / \partial x_2 & \partial u_3 / \partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{pmatrix} = \underline{r} + \underline{e} \quad (4)$$

Il tensore gradiente di velocità può essere decomposto nella somma di due tensori, uno antisimmetrico  $\underline{r} = \text{skew}(\nabla \mathbf{u}^t)$  ed uno simmetrico  $\underline{e} = \text{sym}(\nabla \mathbf{u}^t)$ :

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Quindi la velocità del generico punto nell'intorno di O, di coordinate  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , è data da:

$$\mathbf{u}_i = u_i(O) + u_{i,j} x_j = u_i(O) + r_{ij} x_j + e_{ij} x_j \quad (5)$$

Vedremo in seguito che la parte antisimmetrica  $\underline{r}$  rappresenta la *velocità di rotazione rigida*, mentre la parte simmetrica  $\underline{e}$  rappresenta la *velocità di deformazione*. Il moto può essere considerato, pertanto, come la somma di:

- una traslazione con la velocità del baricentro della particella, O;
- una rotazione rigida descritta dal tensore  $\underline{r}$ ;
- una velocità di deformazione descritta dal tensore  $\underline{e}$ .

Sul primo addendo non ci sono ulteriori commenti da fare, mentre il significato del secondo e del terzo saranno discussi nel seguito.

### 2.1.1. Velocità di rotazione rigida

Per prima cosa dimostriamo che il tensore  $\underline{r}$  rappresenta una rotazione rigida. Si consideri una particella fluida che ruoti di rotazione rigida con velocità angolare  $\Omega$  attorno ad un asse.

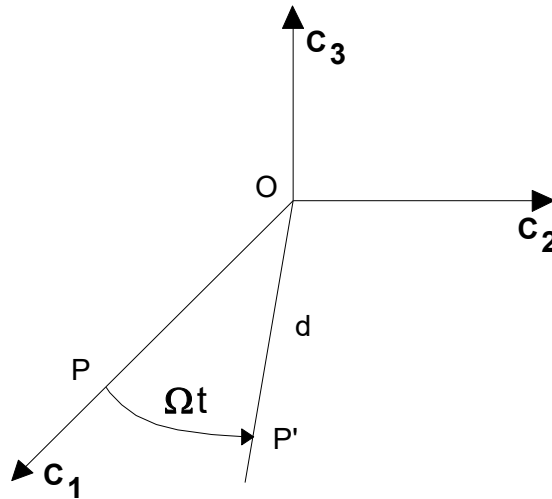


FIGURA 2

Senza perdere di generalità, si può scegliere un sistema di riferimento cartesiano il cui asse 3 coincida con l'asse di rotazione (Figura 2). Indicata con  $d$  la distanza dall'asse di rotazione di un generico punto  $P$  inizialmente posto sull'asse  $c_1$ , le relazioni che descrivono il suo moto, sono:

$$x_1 = d \cos \Omega t; \quad x_2 = d \sin \Omega t; \quad x_3 = d \cos \Omega t;$$

Derivando le equazioni precedenti rispetto al tempo si ottengono le tre componenti della velocità del punto:

$$u_1 = -\Omega d \sin \Omega t = -\Omega x_2; \quad u_2 = \Omega d \cos \Omega t = \Omega x_1; \quad u_3 = 0;$$

Calcoliamo per questo campo di moto il gradiente di velocità trasposto per mezzo delle equazioni (4);,  $\underline{r}$ , risulta avere una particola:

$$(\nabla \mathbf{u})^T = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il tensore è antisimmetrico e risulta avere una particolare forma (due soli elementi opposti tra loro diversi da zero) detta forma normale di Jordan. È quindi stabilito che **un tensore antisimmetrico nella forma di Jordan rappresenta una rotazione rigida**. D'altra parte, secondo il *teorema spettrale per matrici antisimmetriche*, **ogni matrice reale antisimmetrica 3x3 può essere portata nella forma di Jordan**, attraverso un cambiamento di riferimento ortonormale, in una opportuna base cartesiana.

Di conseguenza, **ogni gradiente di velocità trasposto antisimmetrico, potendo essere portato, attraverso un opportuno cambiamento di riferimento, nella forma normale di Jordan, rappresenta una rotazione rigida**.

Le proprietà di rotazione locale di un fluido sono descritte spesso attraverso la **vorticità** del campo, che è data da:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} \equiv \det \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

Essa è in stretta relazione con il tensore  $\underline{r}$ , infatti, confrontando le definizioni si ricava che:

$$\underline{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nell'esempio fatto in precedenza, di rotazione rigida intorno all'asse  $\mathbf{c}_3$ , solo la componente  $\omega_3$  sarebbe diversa da zero, e pari a:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ -\Omega x_2 & \Omega x_1 & 0 \end{pmatrix} = 2\Omega \mathbf{c}_3$$

Perciò il modulo della vorticità è pari al doppio della velocità angolare della particella fluida.

### 2.1.2. Velocità di deformazione

Supponiamo ora, di scegliere un sistema di riferimento che *trasli* con O, e *ruoti* alla stessa velocità del fluido. La velocità del punto O,  $\mathbf{u}(O) = \mathbf{0}$ , e il tensore velocità di rotazione risultano nulli,  $\underline{r} = \underline{0}$ . Il moto è allora descritto dal solo tensore simmetrico,  $\nabla \mathbf{u}^t = \underline{e}$ , e la velocità di un generico punto di coordinate  $\{x_1, x_2, x_3\}$  si scrive attraverso la (5):

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 \\ u_2 &= e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 \\ u_3 &= e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 \end{aligned}$$

il moto risulta inoltre irrotazionale.

Scegliamo ora due punti, un punto P  $\equiv \{x_1, 0, 0\}$  sull'asse  $\mathbf{c}_1$  e un punto Q  $\equiv \{0, x_2, 0\}$  sull'asse  $\mathbf{c}_2$  e studiamo come si modificano in un intervallo di tempo  $\Delta t$  infinitesimo i due segmenti materiali OP e OQ. Con riferimento alla Figura 3, risulta che la velocità di un punto P, di coordinate  $(x_1, 0, 0)$ , che si trova all'istante iniziale sull'asse  $\mathbf{c}_1$  è data da:

$$\begin{aligned} u_1(P) &= e_{11} x_1 + e_{12} 0 + e_{13} 0; \\ u_2(P) &= e_{21} x_1 + e_{22} 0 + e_{23} 0; \\ u_3(P) &= e_{31} x_1 + e_{32} 0 + e_{33} 0; \end{aligned} \tag{6}$$

analogamente per il punto Q di coordinate  $(0, x_2, 0)$  che si trova sull'asse  $\mathbf{e}_2$  la velocità risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(Q) &= e_{11} \mathbf{0} + e_{12} x_2 + e_{13} \mathbf{0}; \\ \mathbf{u}_2(Q) &= e_{21} \mathbf{0} + e_{22} x_2 + e_{23} \mathbf{0}; \\ \mathbf{u}_3(Q) &= e_{31} \mathbf{0} + e_{32} x_2 + e_{33} \mathbf{0}; \end{aligned} \quad (7)$$

Valutiamo per prima cosa la variazione di lunghezza dei segmenti OP e OQ nell'intervallo di tempo considerato. Il segmento OP, diventerà il segmento OP' e la sua lunghezza sarà:

$$OP' = \frac{x'_1}{\cos(\Delta\alpha_P)} \cong \frac{x'_1}{1} = x_1 + (\Delta x_1)_P$$

Dobbiamo infatti considerare che, in quanto in un intervallo di tempo infinitesimo, l'angolo di rotazione del segmento materiale OP,  $\Delta\alpha_P$ , è molto piccolo e quindi  $\cos(\Delta\alpha_P) = 1$ .  $(\Delta x_1)_P$  rappresenta quindi la variazione di lunghezza del segmento OP nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Analogo ragionamento sarà possibile formulare per calcolare la lunghezza del segmento OQ':

$$OQ' = \frac{x'_2}{\cos(\Delta\alpha_Q)} \cong \frac{x'_2}{1} = x_2 + (\Delta x_2)_Q$$

Dalla quale si evince che  $(\Delta x_2)_Q$  rappresenta quindi la variazione di lunghezza del segmento OP nello stesso intervallo di tempo. D'altra parte, gli spostamenti che avvengono in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , saranno pari alla velocità del punto considerato per il tempo trascorso:

$$\begin{aligned} (\Delta x_1)_P &= u_1(P) \Delta t = e_{11} x_1 \Delta t; \\ (\Delta x_2)_Q &= u_2(Q) \Delta t = e_{22} x_2 \Delta t; \end{aligned}$$

ricavando dalla precedente i termini della diagonale principale:

$$e_{11} = \frac{1}{x_1} \frac{(\Delta x_1)_P}{\Delta t} \cong \frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt}; \quad e_{22} = \frac{1}{x_2} \frac{(\Delta x_2)_Q}{\Delta t} \cong \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

essi risultano essere, rispettivamente, le velocità di allungamento relativo lungo gli assi coordinati dei segmenti OP e OQ.

Calcoliamo ora di quanto varia l'angolo,  $\alpha$ , compreso tra i due segmenti. Inizialmente esso sarà retto:  $\alpha = \pi/2$ ; dopo un tempo  $\Delta t$ , i due segmenti OP' e OQ' formeranno tra loro un angolo  $\alpha' = \pi/2 + \Delta\alpha_Q - \Delta\alpha_P$ . Le due rotazioni dei segmenti si possono calcolare come:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_P &= \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{(\Delta x_2)_P}{x'_1} \right) \cong \frac{(\Delta x_2)_P}{x'_1} \\ \Delta\alpha_Q &= \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-(\Delta x_1)_Q}{x'_2} \right) \cong -\frac{(\Delta x_1)_Q}{x'_2} \end{aligned}$$

avendo confuso l'angolo infinitesimo con la tangente. Consideriamo ora i rapporti all'ultimo membro delle due equazioni ottenute. I numeratori sono:

$$\begin{aligned} (\Delta x_2)_P &= u_2(P) \Delta t = e_{21} x_1 \Delta t; \\ (\Delta x_1)_Q &= u_1(Q) \Delta t = e_{12} x_2 \Delta t; \end{aligned}$$

avendo usato la (6) e la (7) per esprimere le velocità dei punti materiali. Nel denominatore, invece, è possibile trascurare la variazione di lunghezza avvenuta durante l'intervallo di tempo  $\Delta t$ :  $x_1 \approx x'_1$ . Sulla base di queste considerazioni otteniamo:

$$\Delta\alpha_P = \frac{(\Delta x_2)_P}{x'_1} = \frac{e_{21} x_1 \Delta t}{x_1} = e_{21} \Delta t$$

$$\Delta\alpha_Q = -\frac{(\Delta x_1)_Q}{x'_2} = \frac{e_{12}x_2\Delta t}{x_2} = -e_{12}\Delta t$$

La velocità di variazione dell'angolo tra i due segmenti è dunque:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{(\alpha' - \alpha)}{\Delta t} = -\Delta\alpha_P + \Delta\alpha_Q = -(e_{21} + e_{12}) = -2e_{12}$$

poiché  $e_{12} = e_{21}$  per la simmetria di  $\underline{e}$ . Più in generale si può concludere che le componenti del tensore  $e_{ij}$ , con  $i \neq j$ , rappresentano  $\frac{1}{2}$  della velocità di variazione dell'angolo, inizialmente retto, formato dai punti che si trovano lungo gli assi  $c_i$  e  $c_j$ .

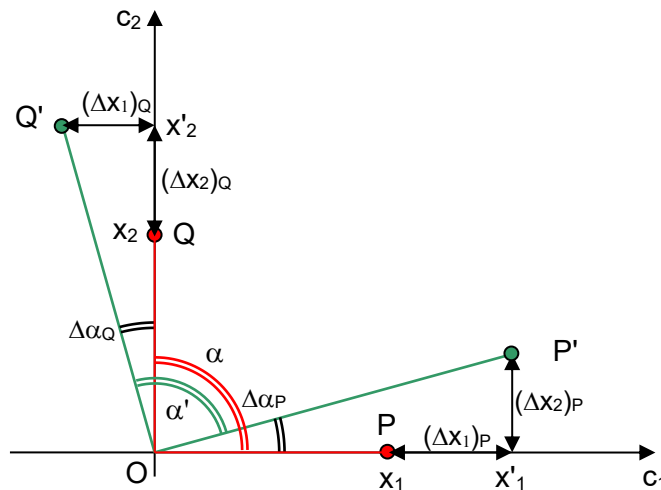


FIGURA 3

Infine, studiamo le variazioni di volume di una particella fluida. Per farlo consideriamo 3 punti sugli assi coordinati:  $P \equiv \{x_1, 0, 0\}$  sull'asse  $c_1$ ,  $Q \equiv \{0, x_2, 0\}$  sull'asse  $c_2$ , ed  $R \equiv \{0, 0, x_3\}$  sull'asse  $c_3$ . A partire da questi punti costruiamo una particella di forma parallelepipedica con i lati paralleli agli assi della terna principale, e di volume  $V = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$  (Figura 4).

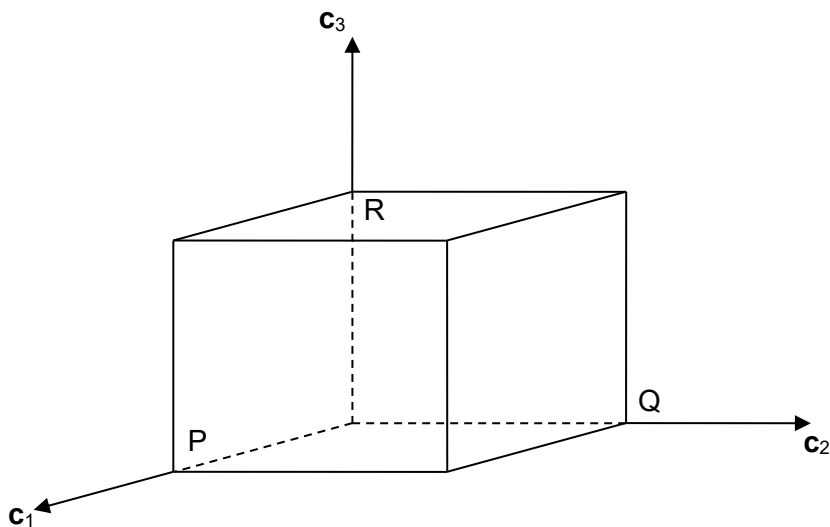


FIGURA 4

Dopo la deformazione, avvenuta nel tempo  $\Delta t$ , con ragionamenti del tutto simili a quelli condotti precedentemente si conclude che il volume diventa:

$$V' = x'_1 x'_2 x'_3$$

le coordinate che compaiono a secondo membro, tenendo conto delle (6), (7) e delle analoghe per il punto R si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + (\Delta x_1)_P = x_1 + u_1(P) \Delta t = x_1 + e_{11} x_1 \Delta t; \\ x'_2 &= x_2 + (\Delta x_2)_Q = x_2 + u_2(Q) \Delta t = x_2 + e_{22} x_2 \Delta t; \\ x'_3 &= x_3 + (\Delta x_3)_R = x_3 + u_3(R) \Delta t = x_3 + e_{33} x_3 \Delta t; \end{aligned}$$

il volume, dopo la variazione, diventa quindi:

$$\begin{aligned} V' &= (x_1 + e_{11} x_1 \Delta t) (x_2 + e_{22} x_2 \Delta t) (x_3 + e_{33} x_3 \Delta t) = \\ &= x_1 x_2 x_3 (1 + e_{11} \Delta t) (1 + e_{22} \Delta t) (1 + e_{33} \Delta t) = \\ &= V + V(e_{11} + e_{22} + e_{33})\Delta t + o(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Notando che la somma dei termini all'interno della parentesi all'ultimo membro rappresenta la traccia di  $\underline{e}$ , e riorganizzando, si ottiene:

$$\frac{1}{V} \frac{(V' - V)}{\Delta t} = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} \cong \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{tr}(\underline{e})$$

La traccia del tensore gradiente della velocità trasposto ha quindi il significato di *velocità di variazione volumetrica relativa del fluido*, ed è invariante per cambiamento di sistema di riferimento, pertanto il suo significato rimane valido in qualsiasi sistema di riferimento. Va notato che la traccia di  $\underline{e}$  coincide con la divergenza del campo di velocità ed è anche pari alla traccia del gradiente di velocità trasposto:

$$\text{tr}(\underline{e}) = e_{jj} = u_{j,j} = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}^t) = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (8)$$

Nel caso di fluidi omogenei incomprimibili, per i quali ogni porzione di fluido mantiene costante il suo volume, la velocità di variazione è nulla, per cui deve essere nulla anche la divergenza, come sarà in seguito dimostrato anche per mezzo dell'equazione di conservazione della massa. Poiché la divergenza di  $\mathbf{u}$ , oltre ad essere la traccia del gradiente di velocità è anche la traccia del tensore velocità di deformazione, il risultato testé ottenuto consente una ulteriore scomposizione del tensore gradiente di velocità trasposto. Possiamo scomporre, infatti,  $\underline{e}$  in parte sferica e parte deviatoria<sup>6</sup>:

$$\nabla \mathbf{u}^t = \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{e}) \mathbb{I}}_{\text{Velocità di deformazione volumetrica relativa}} + \underbrace{\left( \underline{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{e}) \mathbb{I} \right)}_{\text{velocità di deformazione a volume costante}} + \underbrace{\underline{\underline{r}}}_{\text{velocità di rotazione rigida}} \quad (9)$$

ottenendo così la descrizione locale del moto come somma di tre termini: il primo rappresenta la **velocità di variazione volumetrica relativa**; il secondo, che per definizione ha traccia nulla, descrive una **velocità di deformazione a volume costante**; mentre il terzo, al solito, rappresenta la **velocità di rotazione rigida**.

## 2.2. Descrizione lagrangiana ed euleriana di un campo

Nella meccanica dei fluidi i fenomeni fisici sono descritti attraverso campi scalari o vettoriali che rappresentano le grandezze fisiche che caratterizzano il fenomeno. Se per esempio si intende studiare il moto convettivo di un fluido, le grandezze che lo descriveranno saranno un campo scalare, la temperatura, ed uno vettoriale, la velocità. La descrizione di questi campi può avvenire in due modi fondamentali:

<sup>6</sup> Ogni tensore  $\underline{A}$  può essere scomposto come:  $\underline{A} = 1/3 \text{tr}(\underline{A}) \mathbb{I} + [\underline{A} - 1/3 \text{tr}(\underline{A}) \mathbb{I}]$ . Il primo termine rappresenta la parte sferica ed il secondo la parte deviatoria.

- *lagrangiano* o materiale, secondo il quale si descrive la variazione temporale delle grandezze seguendo il moto di ciascuna particella materiale;
- *euleriano* o locale, secondo il quale, fissata una posizione, si descrive ciò che accade in quel punto al passare del tempo.

### 2.2.1. Descrizione euleriana

Nella descrizione euleriana, fissata una posizione  $\mathbf{x}$ , si osserva ciò che accade al passare del tempo, ad una grandezza  $A$  che caratterizza il comportamento del fluido. Una descrizione di questo tipo la otteniamo posizionando una sonda in grado di misurare la grandezza fisica di interesse (velocità, pressione, ecc...) in un punto fisso nel tempo. Le variabili indipendenti sono dunque la posizione  $\mathbf{x}$  ed il tempo:

$$A = A(\mathbf{x}, t).$$

La sua evoluzione temporale è descritta per mezzo della cosiddetta *derivata euleriana*, che si ottiene derivando rispetto al tempo il campo della grandezza  $A$ , mantenendo fissa la posizione dello spazio:

$$\left( \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}=\text{cost.}} = A_{,t}$$

### 2.2.2. Descrizione Lagrangiana

Nella descrizione lagrangiana, si segue l'evoluzione nel tempo delle grandezze seguendo una particolare particella materiale. Per poter effettuare questo tipo di descrizione è necessario innanzitutto identificare univocamente ogni particella fluida. La scelta che viene convenzionalmente fatta è quella di identificare le particelle per mezzo della posizione,  $\mathbf{x}_0$  che esse assumono in un istante di riferimento,  $t_0$ , spesso scelto coincidente con l'istante iniziale.

Una volta identificata, la particella è seguita nel tempo lungo la sua traiettoria la cui equazione è:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t).$$

$\mathbf{X}$  indica la posizione al tempo  $t$  della particella fluida che, all'istante iniziale, si trovava nella posizione  $\mathbf{x}_0$ . Nota la traiettoria sono individuate le altre grandezze relative alla particolare particella: temperatura, pressione, ecc.. Per una generica grandezza  $A$  avremo:

$$a(\mathbf{x}_0, t) = A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t).$$

Avendo indicato con la minuscola il campo lagrangiano, ovvero funzione della particella  $\mathbf{x}_0$  e del tempo,  $t$ . Le variabili indipendenti, in questa descrizione del moto, sono le tre coordinate iniziali  $x_{0,i}$  ed il tempo,  $t$ .

La *derivata lagrangiana* (altrimenti detta materiale o sostanziale) di una assegnata grandezza,  $A$ , è definita dalla derivata parziale rispetto al tempo, avendo tenuta fissa la particella fluida cui si fa riferimento, quindi con  $\mathbf{x}_0$  fissato:

$$\frac{Da(\mathbf{x}_0, t)}{Dt} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0=\text{cost.}}$$

tenuto conto che  $a(\mathbf{x}_0, t) = A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t)$ , la derivata lagrangiana può essere scritta in funzione di derivate euleriane:

$$\frac{Da}{Dt} = \left( \frac{\partial A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0=\text{cost.}} = \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\text{cost.}} + \frac{\partial A}{\partial x_j} \Big|_{t=\text{cost.}} \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0=\text{cost.}} = A_{,t} + A_{,j} u_j = A_{,t} + \nabla A \cdot \mathbf{u} \quad (10)$$

avendo osservato che la derivata della posizione di una particella fluida rispetto al tempo corrisponde alla velocità del fluido:

$$u_j = \left. \frac{\partial x_j}{\partial t} \right|_{x_0 = \text{cost.}}$$

Vista l'importanza che riveste nella nostra trattazione, scriviamo esplicitamente la derivata lagrangiana della velocità, ovvero **l'accelerazione del fluido**:

$$a_i(\mathbf{x}_0, t) = \frac{Du_i}{Dt} = \left( \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{x_0 = \text{cost}}$$

Utilizzando le relazioni precedenti con  $A = u_i$ , si ottiene l'accelerazione:

$$a_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = u_{i,t} + u_{i,j} u_j$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u}$$

### 2.3. Classificazione dei moti

A seconda del parametro considerato i moti di un fluido possono essere classificati in vario modo; alcune possibili classificazioni sono:

- *Tridimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da tutte le variabili indipendenti spaziali.
- *Bidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da due variabili indipendenti spaziali; se tali variabili sono due coordinate cartesiane si parla di moto piano; se tali variabili sono  $\vartheta$  ed  $r$  in coordinate cilindriche si parla di moto assialsimmetrico.
- *Unidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da una sola variabile spaziale indipendente; è questo il caso del moto in una tubazione.
- *Permanenti o stazionari*: se le grandezze che caratterizzano il moto non dipendono dal tempo; in tal caso, in una descrizione euleriana, sono nulle le derivate spaziali rispetto al tempo.

Sono definiti inoltre i seguenti luoghi geometrici:

- *Traiettoria di una particella*: il luogo dei punti occupati in tempi successivi dalla stessa particella fluida;
- *Linea di corrente (o linea di flusso)*: è una linea che ha per tangente il vettore velocità in ogni punto;
- *Linea di fumo*: è il luogo dei punti occupati, ad un dato istante, dalle particelle che sono passate per uno stesso punto.

Nel caso di moto permanente questi tre luoghi geometrici coincidono.

### 3. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

#### 3.1. I principi della meccanica dei fluidi

La meccanica dei fluidi è basata su due classi di ipotesi fondamentali dalle quali si parte per ottenere un sistema di equazioni differenziali chiuso, ovvero nel quale vi siano tante equazioni quante incognite: *i*) i *principi di bilancio*, che caratterizzano la dinamica dei fluidi come di tutti gli altri mezzi continui; *ii*) le *equazioni costitutive e di stato*, che stabiliscono delle relazioni tra stato tensionale e deformazioni (o meglio, velocità di deformazione) per ciascun diverso tipo di mezzo continuo e, nel nostro caso dei fluidi.

I principi sui quali si basa la dinamica dei fluidi sono:

1. **Principio di conservazione della massa: La massa di una qualsiasi porzione di fluido è costante.** Sia  $V_m$  un volume costituito sempre dalla stessa porzione di materia<sup>7</sup>, che d'ora in poi sarà chiamato *volume materiale*, la sua massa è data da:

$$m = \int_{V_m(t)} \rho dV$$

nella quale  $\rho$  indica la densità, ovvero la massa per unità di volume. Notando che il volume materiale dipende dal tempo perché segue la porzione di materia fluida nel suo moto, il principio può essere espresso come:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0$$

2. **Principio di bilancio della quantità di moto (Eulero, 1752): La variazione della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido è pari alla risultante delle forze esterne che agiscono sulla porzione di fluido stessa;** considerando un volumetto infinitesimo  $dV$ , la sua massa è  $dm = \rho dV$ , perciò la sua quantità di moto è  $d\mathbf{q} = \mathbf{u} dm = \rho \mathbf{u} dV$ . Se consideriamo una porzione di fluido che occupa un volume materiale,  $V_m(t)$ , la sua quantità di moto,  $\mathbf{q}$ , è:

$$\mathbf{q} = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV$$

e, indicando con  $\mathbf{R}$  la risultante delle forze esterne che agiscono su  $V_m$ , il principio può essere espresso come:

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{R}$$

3. **Principio di bilancio del momento della quantità di moto (Eulero, 1775): La variazione del momento della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido è pari al momento risultante delle forze esterne che agiscono sulla porzione di fluido stessa.** Il momento della quantità di moto di un volume materiale,  $V_m$ , calcolato rispetto all'origine degli assi, è definito da:

$$\mathbf{k} = \int_{V_m(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV$$

e, indicando con  $\mathbf{k}_e$  il momento risultante delle forze esterne che agiscono su  $V_m$  possiamo esprimere il principio come:

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{k}_e \quad (11)$$

<sup>7</sup> Un volume materiale contiene sempre la stessa porzione di fluido, dobbiamo quindi intendere che  $V_m$  coincide con la regione di spazio occupata *sempre dalle stesse molecole* di fluido (non solo lo stesso numero!). Se il fluido si muove, il volume materiale cambia conseguentemente nel tempo.

I principi così enunciati non valgono solo per i fluidi ma per tutti i mezzi continui, dai soli elastici ai gas perfetti. Le derivate temporali che compaiono nelle equazioni sono *derivate lagrangiane* perché considerano la variazioni nel tempo calcolate seguendo sempre sulla stessa materia, ovvero seguendo il fluido nel suo moto.

Il principio di conservazione della massa, affermando che la stessa porzione di fluido ha sempre la stessa massa, stabilisce che essa è una proprietà intrinseca della materia intesa come mezzo continuo. Il secondo principio, quello di bilancio della quantità di moto, stabilisce invece, come vedremo più avanti, a quali accelerazioni è soggetto un fluido sul quale agisce un determinato sistema di forze, e stabilisce inoltre che questa relazione si esplica attraverso una quantità fisica, la massa per unità di volume, ovvero la densità; quindi esso può essere considerato il principio che definisce la massa per i mezzi continui. Il principio di bilancio del momento della quantità di moto, infine, permette di stabilire alcune importanti caratteristiche di simmetria dello stato tensionale di un fluido.

### 3.2. Teorema di Reynolds

Quella data di anzi costituisce una formulazione lagrangiana dei principi; infatti, le equazioni sopra scritte fanno riferimento non a regioni fisse dello spazio ma a porzioni di materia identificate con volumi materiali. Per passare ad una descrizione euleriana abbiamo bisogno di trovare un'espressione euleriana per la derivata lagrangiana di un integrale su di un volume  $V_m(t)$  che dipende dal tempo; questa espressione ci è data dal *teorema del trasporto* o di Reynolds.

Se consideriamo l'integrale di una generica grandezza,  $A$ , in un volume materiale  $V_m(t)$ , racchiuso dalla superficie  $S_m$ , e indichiamo tale integrale con  $F$ :

$$F(t) = \int_{V_m(t)} A(t) dV$$

la sua derivata lagrangiana può essere calcolata applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale alla funzione  $F$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \frac{DF(t)}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t') - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t')} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t}$$

essendo  $t' = t + \Delta t$ . Definendo la variazione di volume nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ :  $\Delta V = V_m(t') - V_m(t)$ , l'integrale su  $V_m(t') = V_m(t) + \Delta V$  può essere scomposto in due: un'integrale su  $V_m(t)$  ed uno esteso a  $\Delta V$ :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t)} A(t') dV + \int_{\Delta V_m} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t} = \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV}_I + \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(t')}{\Delta t} dV}_{II} \end{aligned} \quad (12)$$

Il termine I dell'ultimo membro rappresenta il limite per  $\Delta t$  che tende a zero del rapporto incrementale della grandezza  $A$  rispetto alla variabile  $t$ , eseguita su di un volume fisso,  $V_c \equiv V_m(t)$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV$$

$V_c$  è un volume, detto *di controllo*, non dipende dal tempo e coincide con  $V_m(t)$  solo nell'istante  $t$ . In tutti gli altri istanti di tempo i due volumi sono diversi perché  $V_c$  rimane costante mentre  $V_m$  cambia seguendo il moto del fluido. Il termine II può essere riscritto come un'integrale di superficie tenendo conto della Figura 5.

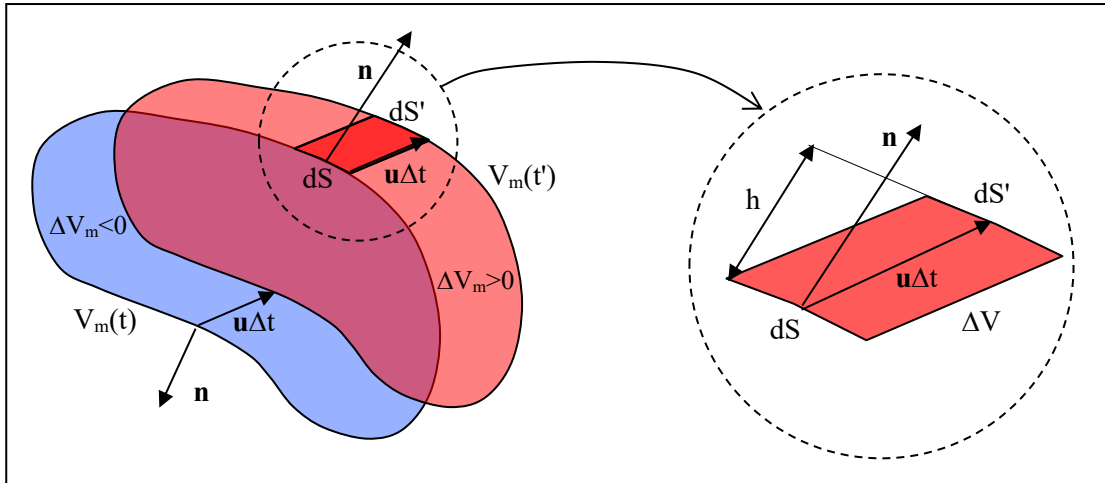


FIGURA 5

Consideriamo il volume materiale,  $V_m(t)$ , al tempo  $t$  (area campita in azzurro nella figura). Dopo l'intervallo di tempo  $\Delta t$  il volume si sarà spostato con il fluido diventando  $V_m(t')$  (rosso chiaro in figura). Per ottenere il volume  $V_m(t')$  dal volume  $V_m(t)$  è necessario aggiungere la zona solo rossa in figura e sottrarre la regione solo azzurra. Mentre la regione nella quale sono sovrapposti i due colori è comune e non va né aggiunta né sottratta. La variazione di volume  $\Delta V$  sarà quindi composta dalla regione solo rossa con segno positivo e da quella solo azzurra con segno negativo.

Sia  $dS$  un elementino della superficie del volume materiale, preso al tempo  $t$ ; dopo l'intervallo di tempo  $\Delta t$ , l'elementino di superficie materiale si sarà spostato con il fluido di  $\mathbf{u}\Delta t$  diventando l'elementino  $dS'$ . In questo spostamento esso avrà spazzato un parallelepipedo infinitesimo, di volume  $dV$ , con base  $dS$  ed altezza  $h = (\mathbf{u}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$  (vedi l'inserito di Figura 5). Perciò il volumetto del parallelepipedo è:

$$dV = dS h = dS (\mathbf{u}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$$

Il parallelepipedo  $dV$  è una porzione infinitesima del volume  $\Delta V$  che, nell'esempio di Figura 5, ha valore positivo poiché, nella parte solo rossa l'angolo tra  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{n}$  è acuto e il loro prodotto scalare risulta positivo. Ripetendo lo stesso ragionamento dove l'angolo tra  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{n}$  è ottuso (parte inferiore della superficie in figura, solo azzurra), il prodotto scalare risulta  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$  e dunque il volumetto ha segno negativo in accordo con il segno che devono avere le due parti del volume  $\Delta V$  secondo quanto osservato in precedenza. Osservando che, quando  $dS$  spazza l'intera superficie materiale,  $S_m(t)$ , il parallelepipedo costruito su di esso spazza l'intero volume  $\Delta V$ , l'integrale  $\Pi$  può essere riscritto come:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(t')}{\Delta t} dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{S_m(t)} \frac{A(t')}{\Delta t} \mathbf{u}\Delta t \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_m(t)} A(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS;$$

supponendo che  $A$  sia una funzione continua:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} A(t') = A(t)$$

Quest'ultima espressione può essere sostituita nella equazione (12), ricordando che il volume materiale al tempo  $t$  coincide con il volume di controllo e che quindi (*solo al tempo t*)  $V_m(t) = V_c$  e  $S_m(t) = S_c$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{S_c} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Il volume  $V_c$  non dipende dal tempo, quindi si può portare la derivata fuori dal segno di integrale, ottenendo la:

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV}_I = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} A dV}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}_{III} \quad (13)$$

che è una **prima formulazione del teorema di Reynolds**. È importante notare che l'espressione  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dS$  rappresenta il volume di fluido che attraversa la superficie  $dS$  nell'unità di tempo. Infatti il fluido che attraversa l'elementino  $dS$  nel tempo  $dt$  ha per base  $dS$  e per altezza  $(\mathbf{u} dt) \cdot \mathbf{n}$  (Figura 6). Moltiplicata per  $A$ , rappresenta quindi il flusso della proprietà fisica  $A$  attraverso  $dS$ .

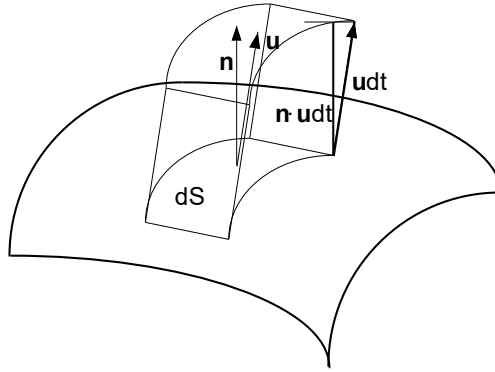


FIGURA 6

Pertanto la formulazione ora esposta del teorema di Reynolds può essere così letta: *la variazione nell'unità di tempo della quantità  $A$ , integrata su di un volume materiale (termine I), è data dalla somma della variazione di  $A$  all'interno del volume di controllo (termine II) e del flusso di  $A$  attraverso la superficie  $S_c$  (termine III).*

Per ottenere la seconda formulazione del teorema applichiamo il teorema di Green all'equazione (13):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \int_{V_c} [A_{,t} + \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{u})] dV = \int_{V_c} [A_{,t} + (\mathbf{A} \mathbf{u}_j)_{,j}] dV = \int_{V_c} \left[ \underbrace{A_{,t} + u_j A_{,j}}_I + \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{u}_{j,j}}_{II} \right] dV$$

I primi due termini, indicati con I, coincidono con la derivata lagrangiana di  $A$  (vedi l'equazione (10)), mentre il termine II corrisponde ad  $A$  moltiplicato per la divergenza di  $\mathbf{u}$ ; perciò otteniamo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} A dV = \int_{V_c} \left( \frac{DA}{Dt} + A \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \quad (14)$$

che costituisce la **seconda formulazione del teorema di Reynolds**. Essa consente di esprimere la derivata temporale di un integrale su di un volume materiale in una espressione nella quale compare un integrale su di un volume di controllo. In ultima analisi quindi ci permette di passare, come la formulazione precedente, da una descrizione lagrangiana ad una euleriana del fenomeno.

### 3.3. Conservazione della massa

#### 3.3.1. Forma globale

Il principio di conservazione della massa stabilisce che la massa,  $m$ , di un volume materiale, contenente quindi sempre le stesse particelle, rimane costante nel tempo:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt}$$

Applicando il teorema di Reynolds nella sua prima formulazione (13),

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV}_{m_{,t}} + \underbrace{\int_{S_c} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\Phi_m} = 0 \quad (15)$$

si ottiene l'equazione di conservazione della massa in forma globale:

$$m_{,t} + \Phi_m = 0, \quad (16)$$

dove  $m_{,t}$  è la *variazione nell'unità di tempo della massa contenuta nel volume di controllo* e con  $\Phi_m$  è stato indicato il *flusso di massa attraverso la superficie del volume di controllo*.

### 3.3.2. Forma locale

Applicando, invece, il teorema di Reynolds nella sua seconda formulazione si ha:

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV = 0.$$

Affinché la relazione precedente sia verificata per qualsiasi  $V$ , e ipotizzando che  $\rho$  e  $\mathbf{u}$  siano funzioni continue, occorre che la funzione integranda sia nulla in tutto il campo; si ottiene quindi l'equazione di conservazione della massa in forma locale, o come viene a volte chiamata, l'**equazione di continuità**:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (17)$$

che può anche essere riscritta:

$$\rho_{,t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Se  $\rho = \text{cost.}$ , cioè se il fluido è incompressibile, il campo risulta essere solenoidale:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; u_{j,j} = 0$$

È utile osservare che per ottenere l'equazione di bilancio della massa nella sua forma locale è stato necessario formulare l'ipotesi che sia la densità che la velocità siano funzioni continue nello spazio. Tale ipotesi non è invece richiesta per ottenere la formulazione globale, che quindi riveste un carattere di maggiore generalità essendo applicabile anche quando all'interno del volume di controllo siano presenti discontinuità. Ciò vale sia nella formulazione della conservazione della massa, che si sta qui trattando, sia nelle formulazioni analoghe per il bilancio della quantità di moto e del momento della quantità di moto che saranno ricavate nel seguito.

### 3.3.3. Ipotesi di Boussinesq ed equazione di continuità per fluidi debolmente comprimibili

I corpi fluidi ambientali sono soggetti a variazioni di densità che svolgono un ruolo fondamentale nei processi in gioco. Come già detto, se analizziamo i corpi fluidi ambientali a scala globale, e facciamo quindi riferimento ad atmosfera ed oceani, l'energia necessaria al loro moto deriva tutta dall'irraggiamento solare, che si traduce in variazioni di temperatura, e quindi di densità, dei fluidi, le quali sono il motore primo di ogni flusso ambientale. Se consideriamo il mare, l'irraggiamento solare si traduce anche in evaporazione, la quale determina differenze di salinità e quindi di densità, le quali ancora una volta generano il moto del fluido.

**Boussinesq** osservò sperimentalmente che, nonostante il ruolo primario che svolgono, **queste differenze di densità sono in realtà molto piccole rispetto alla densità stessa**. Se quindi scomponiamo la densità,  $\rho$ , in una densità di riferimento,  $\rho_0$ , costante, e uno scostamento da questa densità, che indicheremo con  $\tilde{\rho}$  avremo che:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t). \quad (18)$$

Di conseguenza l'**ipotesi di Boussinesq** (1872), o di debole comprimibilità, si traduce nell'assumere:

$$\tilde{\rho} \ll \rho_0,$$

ovvero:

$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \ll 1.$$

Per evidenziare le conseguenze dell'ipotesi di Boussinesq sull'equazione di continuità bisogna:

- i) applicare la decomposizione (18) all'equazione di continuità per fluidi comprimibili (17) e dividerla per  $\rho_0$ :

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho_0}{Dt}}_I + \underbrace{\frac{D\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)}{Dt}}_{II} + \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}}_{III} + \underbrace{\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{u}}_{IV} = 0.$$

Si osserva immediatamente che **il termine I è nullo** poiché  $\rho_0$  è costante.

- ii) applicare l'ipotesi che gli scostamenti sono molto più piccoli della densità stessa ( $\tilde{\rho}/\rho_0 \ll 1$ ) dalla quale si evince che i termini II e IV, nei quali compare il rapporto  $\tilde{\rho}/\rho_0$ , possono essere trascurati rispetto al termine III, nel quale il rapporto di densità, per ipotesi molto piccolo non compare. **L'equazione di continuità sotto l'ipotesi di Boussinesq** si riduce quindi a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (19)$$

del tutto uguale a quella che si ottiene per un fluido incomprimibile, indicando che, nonostante le piccole variazioni di densità, la velocità di variazione volumetrica ( $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ) può essere trascurata.

### 3.4. Bilancio della quantità di moto

#### 3.4.1. Forma globale

Ricordiamo il principio di bilancio della quantità di moto, secondo il quale la variazione della quantità di moto  $\mathbf{q}$  del fluido contenuto in un volume materiale,  $V_m$ , composto sempre dalla stessa materia, è pari alla risultante delle forze esterne  $\mathbf{R}$ :

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{R}$$

Applicando il teorema di Reynolds nella prima formulazione:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} (\rho \mathbf{u}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

o, per componenti:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} (\rho u_i) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho u_i) dV + \int_{S_c} (\rho u_i) u_j n_j dS$$

Scomponiamo ora la risultante delle forze esterne,  $\mathbf{R}$ , in una parte dovuta alle forze proporzionali alla massa ed in una dovuta alle forze applicate alla superficie. Il bilancio della quantità di moto diventa:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho \mathbf{u}) dV}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV}_{\mathbf{G}} + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{t}_n dS}_{\mathbf{\Pi}}$$

nella quale  $\mathbf{f}$  rappresenta le forze per unità di massa e  $\mathbf{t}_n$  le forze per unità di superficie cui è soggetto il fluido. Ponendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{I} \quad \text{Variazione della quantità di moto contenuta nel volume di controllo}$$

$$\int_{S_c} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{M} \quad \text{Flusso di quantità di moto attraverso la superficie } S_c$$

$$\int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV = \mathbf{G} \quad \text{Risultante delle forze di massa agenti su } V_c$$

$$\int_{S_c} \mathbf{t}_n dS = \mathbf{\Pi} \quad \text{Risultante delle forze di superficie agenti su } S_c$$

si ottiene l'equazione della quantità di moto in forma globale:

$$\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi} \quad (20)$$

cioè, la risultante delle forze esterne (di massa e di superficie) applicate ad un volume di controllo uguaglia la somma della variazione nell'unità di tempo della quantità di moto contenuta nel volume di controllo e del flusso di quantità di moto attraverso la superficie che delimita il volume di controllo.

### 3.4.2. Verso la forma locale

Applichiamo il teorema di Reynolds nella sua seconda formulazione ponendo  $A = \rho \mathbf{u}$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_c} \frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + (\rho \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{u}) dV =$$

e sviluppiamo la derivata del prodotto del termine I a secondo membro:

$$= \int_{V_c} \left[ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] = \int_{V_c} \left[ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \underbrace{\mathbf{u} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right)}_{\mathbf{I}} \right] dV = \int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV$$

essendo nullo, per la conservazione della massa (17), il termine I. Utilizzando, inoltre, la stessa decomposizione delle forze esterne in forze di massa e di superficie del paragrafo precedente otteniamo:

$$\underbrace{\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV}_{h^3} = \underbrace{\int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV}_{h^3} + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{t}_n dS}_{h^2} \quad (21)$$

Per poter trasformare quest'equazione in forma differenziale è necessario trasformare l'integrale di superficie a secondo membro in un integrale di volume per poi ripetere il ragionamento già fatto per la conservazione della massa e trovare una relazione per la funzione integranda. Cerchiamo quindi un altro modo di descrivere lo stato di tensione alla superficie del volume di controllo, che ci consenta di applicare il teorema della divergenza all'integrale di superficie.

## 3.5. Teorema di Cauchy e tensore delle tensioni

Si consideri il tetraedro (detto *tetraedro di Cauchy*) limitato dalle superfici di area  $S_i$  che giacciono sui piani coordinati e dalla superficie di area  $S_n$ , che giace sul piano posto a distanza  $h$  dall'origine e di giacitura individuata dalla normale  $\mathbf{n}$  (a sinistra in Figura 7).

Facciamo ora tendere  $h \rightarrow 0$ , in modo che il tetraedro diventi infinitesimo, e valutiamo l'ordine di grandezza dei singoli termini dell'equazione (21): i 2 integrali di volume sono proporzionali al volume  $V$  del tetraedro, e di conseguenza ad  $h^3$ , mentre l'integrale di superficie è proporzionale all'area della superficie del tetraedro e quindi è proporzionale ad  $h^2$ . Al limite per  $h$  che tende a zero i due integrali di volume saranno allora trascurabili rispetto a quello di superficie, e dovrà quindi essere soddisfatta la:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS = 0, \quad (22)$$

la quale, per il tetraedro di Cauchy, afferma che la somma delle forze di superficie agenti su ciascuna faccia deve annullarsi.

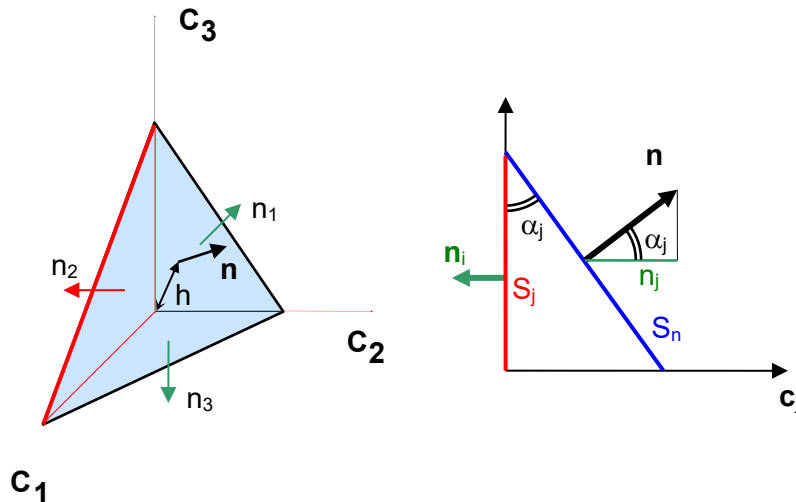


FIGURA 7

Lo sforzo relativo alla generica superficie  $S_j$ , con normale  $\mathbf{c}_j$ , sarà indicato con  $\boldsymbol{\tau}_j$ , e la sua  $i$ -esima componente con  $\tau_{ij}$ ; le componenti di questi tre sforzi possono essere ordinate secondo gli elementi di una matrice nella quale la  $j$ -esima colonna contiene le tre componenti della tensione sul  $j$ -esimo piano coordinato  $\boldsymbol{\tau}_j$ :

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_2 & \boldsymbol{\tau}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad (23)$$

In modo analogo indicheremo con  $\boldsymbol{\tau}_n$  lo sforzo sulla quarta faccia, che ha per normale  $\mathbf{n}$ . Notiamo, che seguendo la definizione appena data, le  $\boldsymbol{\tau}_i$  sono relative alle normali  $\mathbf{c}_i$ , le quali sono *interne* al tetraedro, e rappresentano quindi le forze che il fluido interno al tetraedro esercita sul fluido esterno. Esse sono uguali ed opposte alle sollecitazioni *esterne* che sono definite in relazione alle normali esterne,  $\mathbf{n}_i$  (vedi schema a destra di Figura 7), compaiono nel bilancio della quantità di moto sopra enunciato. Nell'equazione (22) esse compariranno quindi con segno negativo e dovrà essere:

$$\boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_1 S_1 - \boldsymbol{\tau}_2 S_2 - \boldsymbol{\tau}_3 S_3 = \boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_i S_i = 0,$$

dividendo per  $S_n$  ed usando la convenzione di Einstein:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \frac{S_j}{S_n} \boldsymbol{\tau}_j$$

Con riferimento allo schema a destra della Figura 7, si osserva che  $S_j = S_n \cos(\alpha_j)$  e, d'altra parte,  $n_j = |\mathbf{n}| \cos(\alpha_j) = \cos(\alpha_j)$ <sup>8</sup>, dove  $\alpha_j$  è l'angolo formato tra la normale  $\mathbf{n}$  e il versore  $\mathbf{c}_j$ , ed il suo coseno è pari alla  $j$ -esima componente della normale  $\mathbf{n}$ . Quindi:  $S_j / S_n = \cos(\alpha_j) = n_j$  e la tensione sulla superficie  $S_n$  risulta pari a:

$$\boldsymbol{\tau}_n = n_j \boldsymbol{\tau}_j$$

dove si ricorda che sono sottintese le somme sull'indice  $j$ . Utilizzando la matrice precedentemente definita e scrivendo l'equazione per componenti:

$$t_{ni} = \tau_{ij} n_j. \quad (24)$$

La matrice  $\tau_{ij}$  rappresenta le componenti di un tensore, perché moltiplicata secondo le regole matriciali per le componenti di un vettore ( $n_j$ ) fornisce sempre le componenti di un vettore ( $t_{ni}$ ). Indicheremo questo tensore con  $\underline{\underline{\tau}}$ , e lo chiameremo **tensore delle tensioni**. I suoi elementi saranno ordinati come indicato dalla (23). Attraverso di esso possiamo esprimere lo sforzo,  $\mathbf{t}_n$ , relativo ad un elemento di superficie con una generica normale  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{t}_n = \underline{\underline{\tau}} \mathbf{n}.$$

Questa relazione, che stabilisce l'esistenza del tensore delle tensioni, rappresenta il **teorema fondamentale di Cauchy** (1822).

### 3.6. Equazione di Cauchy

Riprendiamo il percorso verso una formulazione locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto, esprimendo gli sforzi attraverso il tensore delle tensioni nella (21):

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}} \mathbf{n} dS$$

così da poter finalmente applicare il teorema della divergenza:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{V_c} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} dV.$$

Questa relazione deve essere valida **per qualsiasi volume di controllo**  $V_c$  e, se ipotizziamo che le **funzioni integrande siano continue**, deve sussistere anche tra le funzioni integrande:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}. \quad (25)$$

La (25), è detta **equazione di Cauchy** e rappresenta la forma locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto. Sviluppando la derivata lagrangiana possiamo riscriverla per componenti:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho u_{i,t} + \rho u_{i,j} u_j &= \rho f_i + \tau_{ij,j} \end{aligned}$$

<sup>8</sup> le componenti nella normale rappresentano infatti i coseni direttori della direzione considerata

### 3.7. Bilancio del momento della quantità di moto

Per ottenere l'equazione di bilancio del momento della quantità di moto si segue la stessa procedura utilizzata per il bilancio della quantità di moto.

Applicando all'equazione di bilancio sul volume materiale (11) la prima formulazione del teorema di Reynolds si ottiene la forma globale:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}}_{\text{Variazione per unità di tempo del momento della QdM}} = - \underbrace{\int_{S_c} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Flusso uscente del momento della QdM}} + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS}_{\text{Momento delle forze di superficie}} + \underbrace{\int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV}_{\text{Momento delle forze di massa}}$$

Per ottenere la forma locale si segue un percorso analogo a quello utilizzato nei due casi precedenti: si applica la seconda formulazione del teorema di Reynolds, si introduce il tensore delle tensioni ed infine si usa il teorema della divergenza, giungendo ad una equazione in cui si hanno solo integrali estesi al volume di controllo. Considerando che se le funzioni integrande sono continue, la relazione ottenuta deve valere anche per le funzioni integrande si ottiene la forma locale, la quale si riduce semplicemente a:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^t}}$$

Questa equazione stabilisce che *per soddisfare localmente il bilancio del momento della quantità di moto è sufficiente che il tensore delle tensioni sia simmetrico*, una volta assicurata questa simmetria, non ci sarà bisogno di fare ulteriori riferimenti ad esso.

### 3.8. Equazioni costitutive

Per chiudere il generale problema della meccanica dei fluidi, oltre alle equazioni di bilancio, che rappresentano i principi fondamentali della meccanica, abbiamo bisogno di equazioni che stabiliscano, per ciascun tipo di fluido, la relazione che c'è tra tensione e deformazione.

In genere una sollecitazione applicata ad un corpo produce una deformazione che può cambiare nel tempo con una certa velocità di deformazione. Sono definiti *solidi* quei mezzi continui nei quali, al limite per  $t \rightarrow \infty$ , ad uno stato tensionale costante corrisponde una deformazione costante, finita. Sono definiti *fluidi* quei mezzi continui nei quali, per  $t \rightarrow \infty$ , uno stato tensionale costante produce una variazione della deformazione nel tempo ovvero una velocità di deformazione costante, finita.

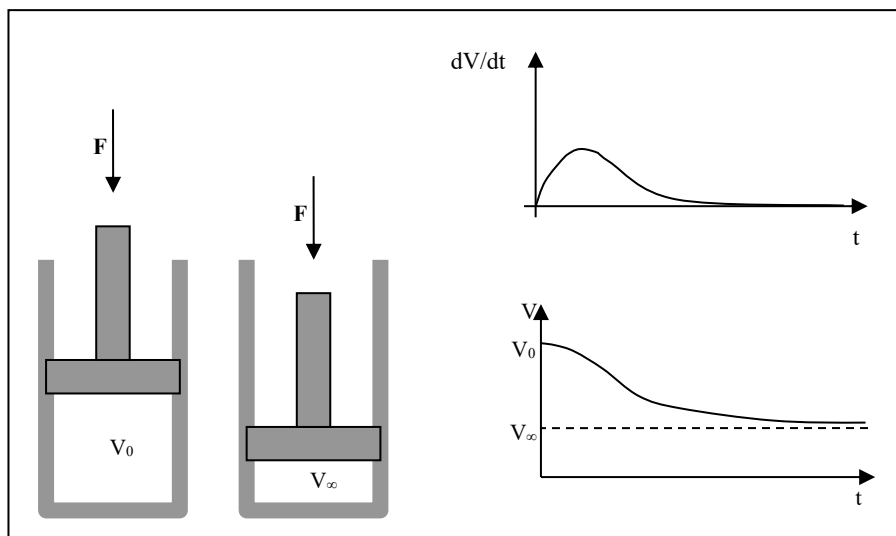


FIGURA 8

I fluidi che interessano le applicazioni più comuni della meccanica dei fluidi (acqua, aria, ecc.) rientrano tutti nella classe dei *fluidi Newtoniani*. Questi sono mezzi continui che hanno due tipi di comportamento diverso: uno per le variazioni di volume e l'altro per le deformazioni a volume costante. Se proviamo infatti ad imporre una variazione di volume ad una porzione di fluido, osserveremo che, per una assegnata sollecitazione si ottiene una variazione di volume costante. Possiamo immaginare, ad esempio, di avere una certa quantità di aria<sup>9</sup> contenuta all'interno di un cilindro (Figura 8), ed applicare una forza costante  $F$  al pistone. Il volume tenderà inizialmente a ridursi, ma per  $t \rightarrow \infty$  rimarrà costante. Avremo quindi un comportamento asintotico nel quale la deformazione tende ad un valore finito, costante, mentre la velocità di deformazione tende a zero. Ripetendo l'esperimento con forze di valore diverso, troveremo, asintoticamente, velocità di deformazione comunque nulle, mentre il valore della deformazione raggiunta (la diminuzione di volume) sarà tanto più grande quanto maggiore è la forza. *Si conclude, per ciò che riguarda le deformazioni volumetriche, che per i fluidi sussiste una relazione tra stato di sollecitazione e deformazione.*

Se invece proviamo a deformare il fluido senza variazioni di volume il comportamento sarà diverso. Immaginiamo di condurre l'esperimento ideale, già descritto nell'introduzione, e rappresentato in Figura 9, nel quale si immagina di avere un fluido, per esempio aria, nello spazio tra due lastre piane infinitamente estese, e di applicare una forza costante alla lastra superiore, che si può muovere liberamente, mentre quella inferiore è fissa. Concentriamo l'attenzione su di un parallelepipedo di fluido inizialmente retto e misuriamo la deformazione angolare,  $\varepsilon$ , e la sua derivata rispetto al tempo. Osserveremo che, per  $t \rightarrow \infty$ , mantenendo costante la forza applicata, l'aria continua a deformarsi indefinitamente ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ), mentre la velocità di deformazione,  $d\varepsilon/dt$  tende ad un valore, finito, costante. Ripetendo l'esperimento con forze di intensità diversa osserveremo che la deformazione tende comunque ad aumentare indefinitamente, mentre la velocità di deformazione assume valori asintotici finiti, tanto più grandi quanto maggiori sono le forze applicate. Si conclude che, per ciò che riguarda le deformazioni a volume costante, per i fluidi, *sussiste una relazione tra sollecitazione e velocità di deformazione*. Avremo quindi due diverse relazioni: la prima per le variazioni volumetriche è detta **equazione di stato**, la seconda per le deformazioni a volume costante è detta **equazione costitutiva**.

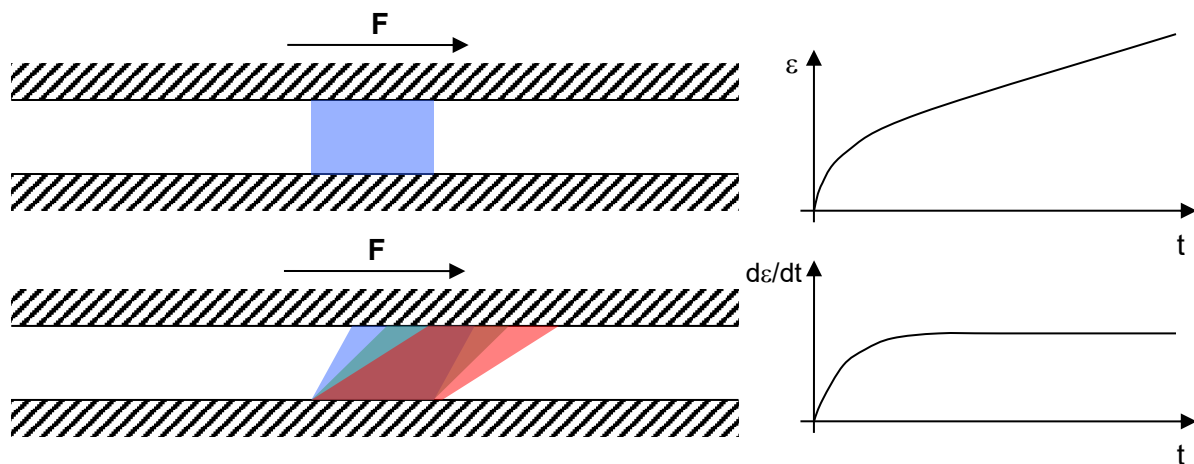


FIGURA 9

### 3.8.1. Equazione di stato

Sappiamo, dalla cinematica locale del moto, che le variazioni volumetriche sono descritte dalla parte sferica del tensore velocità di deformazione. Noi ammetteremo perciò che sussista una relazione, detta *equazione di stato*, tra variazioni di volume e sollecitazione normale. Se definiamo la pressione come l'opposto della parte sferica del tensore delle tensioni<sup>10</sup>:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\tau}) = \frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3}$$

<sup>9</sup> potremmo scegliere anche l'acqua, l'unica differenza sarebbe che variazioni di volume sarebbero molto più piccole

<sup>10</sup> la pressione, come è definita nella termodinamica, rappresenta la forza esercitata dal fluido *interno* al volume di controllo, mentre il tensore  $\underline{\tau}$  rappresenta forze *esterne* al volume di controllo.

l'equazione di stato sarà, in generale, della forma:

$$\rho = \rho(p, \text{variabili termodinamiche})$$

La densità,  $\rho$ , è adatta a misurare le variazioni volumetriche in quanto essa non è altro se non l'inverso del volume specifico del fluido, ovvero il volume occupato dall'unità di massa. Nel caso di fluidi incompressibili questa equazione assume la forma limite:

$$\rho = \text{cost.};$$

la quale stabilisce che non c'è variazione di volume del fluido quale che sia la sollecitazione assegnata. Nel caso di un gas perfetto invece l'equazione di stato è:

$$p = \rho RT$$

dove  $R$  è la costante dei gas perfetti e  $T$  la temperatura assoluta.

Se si considera un fluido comprimibile che rispetti l'ipotesi di Boussinesq, la densità sarà semplicemente funzione della temperatura,  $\rho = \rho(T)$ , o anche della concentrazione di sali disciolti,  $\rho = \rho(c)$ , se stiamo considerando il caso di acqua di mare.

### 3.8.2. Equazione costitutiva

Per ciò che riguarda invece la deformazione a volume costante, i fluidi Newtoniani, che considereremo in questo corso, sono caratterizzati da una relazione *lineare omogenea ed isotropa tra velocità di deformazione a volume costante e sollecitazione*. Per scriverla ricordiamo innanzitutto che la velocità di deformazione a volume costante è data dalla parte deviatoria del tensore velocità di deformazione,  $\text{dev}(\underline{e})$  (vedi equazione (9)):

$$\text{dev}(\underline{e}) = \underline{e} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{e})\underline{\underline{I}}.$$

Si tratta di un tensore simmetrico a traccia nulla. Stabilire una relazione costitutiva isotropa implica che questo tensore debba essere legato alla sollecitazione da una funzione scalare (quindi che si comporta allo stesso modo in tutte le direzioni dello spazio); il fatto poi che la relazione sia lineare ci dice che questo legame deve essere costituito semplicemente da una costante moltiplicativa la quale, per l'ipotesi di fluido omogeneo, deve essere una funzione delle variabili termodinamiche uguale in tutti i punti del campo. Avremo quindi un'equazione costitutiva del tipo:

$$\text{Sollecitazione} = \text{cost} \cdot \left[ \underline{e} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{e})\underline{\underline{I}} \right].$$

È immediato osservare che, essendo il tensore a secondo membro una parte deviatoria, anche a primo membro non potrà che comparire la parte deviatoria del tensore delle tensioni. Se indichiamo con  $2\mu$  la costante moltiplicativa avremo dunque:

$$\underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\tau}})\underline{\underline{I}} = 2\mu \left( \underline{e} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{e})\underline{\underline{I}} \right)$$

ovvero, introducendo la definizione di pressione:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu \left( \underline{e} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{e})\underline{\underline{I}} \right) \quad (26)$$

o, per componenti:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3}(e_{kk}\delta_{ij}) \right) \quad (27)$$

la quale rappresenta l'equazione costitutiva per i fluidi newtoniani (Stokes, 1845).

Consideriamo ora l'importante caso di un fluido incomprimibile, o debolmente comprimibile secondo l'ipotesi di Boussinesq. Osservando che la traccia di  $\underline{\underline{\tau}}$  coincide con la divergenza della velocità (equazione (8)), e che quest'ultima è nulla sotto le ipotesi considerate (equazione (19)), l'ultimo termine a secondo membro della (26) si annulla e l'**equazione costitutiva per un fluido incomprimibile o debolmente comprimibile secondo Boussinesq** si riduce a:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tau}} &= -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{e}} \\ \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\end{aligned}\quad (28)$$

Il coefficiente  $\mu$ , detto *viscosità dinamica* del fluido è, in generale funzione della temperatura. Le sue dimensioni sono:  $[M][L^{-1}][T^{-1}] = [F][L^{-2}][T^{-1}]$ , e per l'acqua vale:

$$\mu(T) = \frac{0.001785}{1 + 0.337 \cdot \theta + 0.000221 \cdot \theta^2} \text{ (N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s)}$$

con la temperatura,  $T$ , espressa in °C. A 20°C si ha:  $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$ . Per l'aria, sempre a 20°C, la viscosità è:  $\mu = 1.808 \cdot 10^{-5} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$ .

### 3.9. Equazioni di Navier-Stokes sotto l'ipotesi di Boussinesq

Le equazioni dei principi della meccanica dei fluidi unite all'equazione di stato e costitutive permettono di ottenere un sistema di equazioni differenziali *non lineari*, che controlla la dinamica dei fluidi.

Nel caso di flussi ambientali, le forze di massa sono quelle dovute al campo gravitazionale. Definiamo quindi un'asse  $z$  verticale diretto verso l'alto, in modo che  $\nabla z$  sia il suo versore. Le forze gravitazionali per unità di massa agenti sul fluido diventano:  $\mathbf{f} = -g\nabla z$ .

Considerando inoltre il caso di fluidi che soddisfano l'ipotesi di Boussinesq, come accade nei flussi ambientali, il sistema di equazioni che regge la dinamica dei fluidi diventa:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{Equazione di continuità (19)} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho g \nabla z + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} & \text{Equazione di Cauchy (25)} \\ \underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{e}} & \text{Equazione costitutiva (28)} \\ \rho = \rho(T, \dots) & \text{Equazione di stato} \end{cases}$$

Avendo introdotto la dipendenza della densità dalla temperatura, salinità, o concentrazione di altre sostanze contenute nel fluido, abbiamo dovuto aggiungere anche la corrispondente equazione di bilancio per ottenere un numero di equazioni pari al numero di incognite.

Per arrivare alla formulazione che ci interessa dobbiamo notare che:

- i.* non abbiamo ancora applicato l'ipotesi di Boussinesq di piccole fluttuazioni di densità,  $\tilde{\rho}/\rho_0 \ll 1$ , all'equazione di Cauchy;
- ii.* la pressione, soprattutto se il fluido è acqua, è soggetta a variazioni dovute alla necessità di compensare il peso del fluido (il gradiente idrostatico), che sono molto più grandi delle variazioni legate alla dinamica, che sono quelle che ci interessano nella trattazione della dinamica dei fluidi (Figura 10).

Per tener conto di questi due aspetti, *i*) applichiamo ora la decomposizione della densità,  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ , già definita in precedenza e *ii*) decomponiamo la pressione in una parte idrostatica,  $p_0$ , dovuta al solo peso del fluido (che quindi non contribuisce a determinarne il moto) ed uno scostamento  $\tilde{p}$ , che rappresenta la parte legata alla dinamica. La componente idrostatica è data da:

$$p_0 = P_0 - \rho_0 g z$$

dove  $P_0$  è la pressione idrostatica alla quota di riferimento  $z = 0$ .

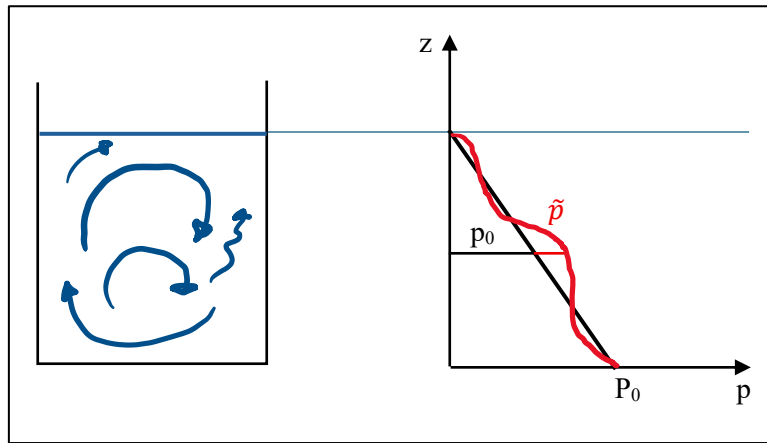


FIGURA 10 UNA VASCA DI ACQUA NEL QUALE IL FLUIDO SI STA MUOVENDO (A DESTRA), E L'ANDAMENTO DI PRESSIONE CORRISPONDENTE (A SINISTRA). LA LINEA NERA RAPPRESENTA L'ANDAMENTO IDROSTATICO, DOVUTO SOLO AL PESO DEL FLUIDO, LA LINEA ROSSA RAPPRESENTA LO SCOSTAMENTO DOVUTO ALLA DINAMICA, CHE È MOLTO PIÙ PICCOLO

Introdotta l'equazione costitutiva in quella di Cauchy, e supponendo la viscosità  $\mu$  costante come ammissibile per variazioni di temperatura non troppo grandi, si ottiene:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho g \nabla z + \nabla \cdot (-p \mathbb{I} + 2\mu \underline{\underline{e}}) \quad (29)$$

Per riscrivere il termine di pressione consideriamone la componente  $i$ -esima:  $(\nabla \cdot (p \mathbb{I}))_i = (p \delta_{ij})_{,j}$ . Considerato che sono sottintese le somme sull'indice  $j=1,3$  può essere sviluppata come:

$$(p \delta_{ij})_{,j} = p_{,1} \delta_{i1} + p_{,2} \delta_{i2} + p_{,3} \delta_{i3}.$$

Dei tre termini solo l' $i$ -esimo è diverso da zero perché il delta di Kronecker è nullo quando  $i \neq j$  e uguale a 1 quando  $i = j$ ; perciò rimane solo il termine con  $i=j$ , ovvero:  $(p \delta_{ij})_{,j} = p_{,i}$ , la quale vettorialmente corrisponde alla  $i$ -esima componente del gradiente della pressione. Riportando il risultato in forma vettoriale abbiamo:

$$\nabla \cdot (p \mathbb{I}) = \nabla p.$$

Sostituiamo quindi nella (29):

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho g \nabla z - \nabla p + 2\mu \nabla \cdot \underline{\underline{e}}$$

e decomponiamo la densità e la pressione:

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho_0 g \nabla z - \tilde{\rho} g \nabla z - \nabla p_0 - \nabla \tilde{p} + 2\mu \nabla \cdot \underline{\underline{e}}$$

il gradiente di  $p_0$  è pari a:  $\nabla p_0 = \nabla P_0 - \rho_0 g \nabla z = -\rho_0 g \nabla z$ , poiché  $P_0$  è costante ed ha gradiente nullo. Sostituendo nella precedente:

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \tilde{\rho} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho_0 g \nabla z - \tilde{\rho} g \nabla z + \rho_0 g \nabla z - \nabla \tilde{p} + 2\mu \nabla \cdot \underline{\underline{e}}$$

nella quale osserviamo che i termini III e IV, che rappresentano il bilancio idrostatico, si elidono, mentre il termine II è trascurabile rispetto al termine I perché entrambi contengono  $D\mathbf{u}/Dt$  ma  $\tilde{\rho} \ll \rho_0$ . Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\tilde{\rho} - \nabla \tilde{p} + 2\mu \nabla \cdot \underline{\underline{e}} \\ \rho_0 \frac{Du_i}{Dt} &= -\tilde{\rho} g z_{,i} - \tilde{p}_{,i} + 2\mu e_{ij,j} \end{aligned}$$

L'ultimo termine può essere riscritto come:

$$2\mu e_{ij,j} = 2\mu \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = \mu u_{i,jj} + \mu \underbrace{(u_{j,i})_{,i}}_{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} = \mu u_{i,jj}$$

nella quale, dopo aver scambiato l'ordine delle derivate nell'ultimo termine, si osserva che vi compare la divergenza della velocità che, secondo l'equazione di continuità (19), ci assicura la divergenza della velocità essere nulla. In generale quindi, nell'equazione di Navier-Stokes sappiamo di poter sempre inserire indifferentemente i termini:

$$\begin{aligned} 2\mu e_{ij,j} &= \mu u_{i,jj} \\ \text{oppure,} & \\ 2\mu \nabla \cdot \underline{\underline{e}} &= \mu \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (30)$$

Dividendo per  $\rho_0$  e definita la *viscosità cinematica*  $\nu = \mu/\rho_0$ , si ricava infine:

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} &= -g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} z_{,i} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{p}_{,i} + \frac{\nu u_{i,jj}}{2\mu e_{ij,j}} \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \nabla z - \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \frac{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}{2\mu \nabla \cdot \underline{\underline{e}}} \end{aligned} \quad (31)$$

le quali rappresentano **le equazioni di Navier-Stokes sotto l'ipotesi di Boussinesq**. È da notare che in atmosfera, poiché la densità dell'aria è molto piccola, per differenze di quota non troppo grandi la componente idrostatica delle pressioni si può ritenere costante, quindi spesso si assume:  $\nabla \tilde{p} \simeq \nabla p$ .

Per interpretare il risultato ottenuto, introduciamo la *gravità ridotta*  $g' = g(\tilde{\rho}/\rho_0)$  l'equazione ottenuta:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad \text{termini inerziali} = \underbrace{-g' \nabla z}_{\text{forze di galleggiamento}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p}}_{\text{forze di pressione}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}_{\text{termini viscosi}}$$

il primo termine rappresenta l'accelerazione del fluido, ovvero la forza di inerzia per unità di massa, il secondo rappresenta la forza peso del fluido depurata del bilancio idrostatico, rimane quindi solo la forza di galleggiamento, ovvero la spinta di Archimede cui è soggetta la particella fluida, che sarà diretta verso il basso se la densità della particella è maggiore delle altre, o diretta verso l'alto se la sua densità è minore. Quindi, in questo contesto, il termine di galleggiamento può descrivere indifferentemente una forza diretta verso l'alto o verso il basso. Accostiamo ora l'equazione appena discussa insieme all'equazione di conservazione della massa alle corrispondenti equazioni di per fluidi incomprimibili:

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \nabla z - \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{Debolmente comprimibile}$$

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{Incomprimibile}$$

Esaminando i due sistemi di equazioni possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- i. Poiché la divergenza della velocità rappresenta la velocità di deformazione volumetrica relativa, il fatto che sia nulla in entrambi i casi, per l'equazione di continuità, indica che le variazioni di volume delle particelle fluide sono trascurabili.
- ii. L'equazione di Navier-Stokes sotto l'ipotesi di Boussinesq vede la presenza delle variazioni di densità,  $\tilde{\rho}$  solo nel termine gravitazionale, e non in quelli inerziali, si può concludere quindi che, secondo

l'ipotesi di Boussinesq **le variazioni di densità**, che sono molto piccole ( $\tilde{\rho}/\rho_0 \ll 1$ ), **hanno influenza nei termini di galleggiamento e non in quelli inerziali**.

- iii. L'equazione, inoltre, ha la stessa identica struttura di quella per fluidi incomprimibili, se si esclude il fatto che sotto l'ipotesi di Boussinesq le forze gravitazionali cui è soggetto il fluido non sono costanti, ma variano da punto a punto, poiché vi compaiono le fluttuazioni di densità,  $\tilde{\rho}$ . Possiamo quindi dare la seguente interpretazione: **il fluido si comporta come se fosse incomprimibile, ma soggetto ad un campo gravitazionale variabile da punto a punto in funzione della temperatura, salinità, o altro**.

### 3.9.1. Equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale

Useremo come caso esemplare il flusso al di sopra di una collina alta  $H$  e larga  $L$ , investita un vento di intensità  $U$  (Figura 11). Supponiamo inoltre che la densità dell'aria abbia un andamento lineare decrescente con gradiente costante pari a  $-\Gamma$ , rappresentato da una legge:

$$\rho(z) = \rho_0 - \Gamma z.$$

Per poter adimensionalizzare le equazioni Navier-Stokes è necessario innanzitutto scegliere tre parametri indipendenti fondamentali. Si deve poi costruire, con questi parametri, una scala per ciascuna grandezza. Nel nostro caso, una buona scelta è quella di considerare come grandezze fondamentali la velocità, la lunghezza, e la densità. Per quello che riguarda i parametri fondamentali dobbiamo considerare che alcune delle grandezze, pur essendo dimensionalmente equivalenti, hanno ordini di grandezza diversi in gioco nel nostro problema. In particolare, la dimensione orizzontale,  $L$ , di una collina è tipicamente molto maggiore della sua altezza  $H$ :

$$L \gg H$$

Poiché è importante che tutte le grandezze adimensionali siano di ordine uno, è opportuno scegliere la scala  $L$  quando adimensionalizziamo variazioni in direzione orizzontale, e la scala  $H$  quando invece stiamo considerando la direzione verticale. Lo stesso ragionamento va fatto per le densità, in quanto, in accordo con l'ipotesi di Boussinesq, le variazioni di densità saranno molto più piccole della densità stessa. Useremo quindi anche in questo caso due scale diverse:

- $\rho_0$  per la densità stessa;
- $\Delta\rho \simeq \Gamma H$  per le variazioni di densità.

Per la velocità sceglieremo invece la velocità  $U$  del vento che investe la collina. Per mezzo di queste tre grandezze possiamo definire una scala dei tempi,  $T = (L/U)$ , una scala delle pressioni,  $P = \rho_0 U^2$ , e con queste adimensionalizzare tutte le grandezze in gioco.

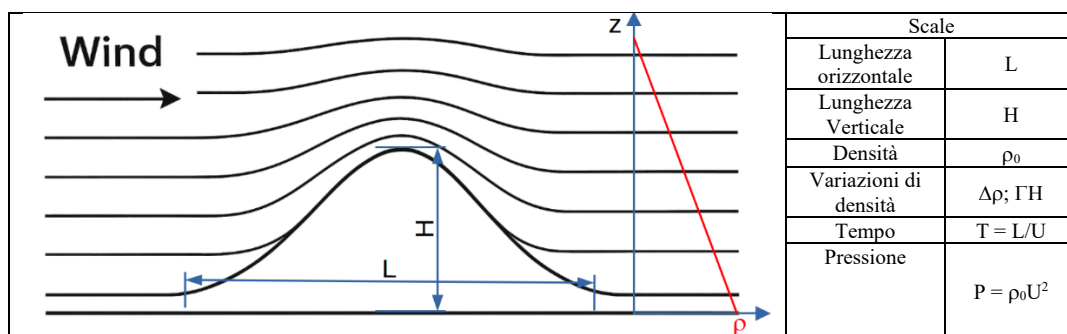


FIGURA 11

In generale una grandezza,  $a$ , può essere adimensionalizzata con la sua scala,  $A$ , attraverso la relazione:  $a^* = a/A$ , nella quale l'asterisco indica la quantità adimensionalizzata. Ricavando  $a = a^* A$ , otteniamo la relazione che può essere sostituita in via diretta nelle equazioni dimensionali per adimensionalizzarle. In particolare useremo le relazioni:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^* \Delta\rho \quad t = t^* T = t^* (L / U) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{D}{Dt^*} \frac{1}{T} = \frac{D}{Dt^*} \frac{U}{L}$$

$$z = z^* H \quad p = p^* \rho_0 U^2 \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{1}{L} \Rightarrow \nabla = \nabla^* \frac{1}{L}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* U$$

Se sviluppiamo la derivata lagrangiana e sostituiamo le precedenti nell'equazione di Navier-Stokes otteniamo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} U \frac{U}{L} + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^* \frac{1}{L} U^2 = -g \frac{\tilde{\rho}^*}{\rho_0} \nabla^* z^* \Delta \rho \frac{1}{L} H - \frac{1}{\rho_0} \nabla^* p^* \frac{1}{L} \rho_0 U^2 + \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \frac{1}{L^2} U$$

e, dividendo entrambi i membri per  $U^2 / L$ , si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^* = - \left[ \frac{g \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)}{U^2} \right] \tilde{\rho}^* \nabla^* z^* - \nabla^* p^* + \left[ \frac{\nu}{UL} \right] \nabla^{*2} \mathbf{u}^*$$

nella quale possono essere riconosciuti due gruppi adimensionali:

- numero di Reynolds:  $R_e = \frac{UL}{\nu}$

- numero di Froude densimetrico  $F_r = \frac{U^2}{\left( \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right) g L} = \sqrt{\frac{U^2}{g' L}}$

che ci permettono di giungere alla forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes sotto l'ipotesi di Boussinesq:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{F_r^2} \nabla z - \nabla p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (32)$$

nella quale, per semplicità, sono stati omissi gli asterischi che indicano le grandezze adimensionali. Questa forma dell'equazione si presta anche alla interpretazione del significato dei gruppi adimensionali sopra identificati. Se supponiamo, infatti, di scegliere le scale delle grandezze in modo tale che tutte le grandezze adimensionali, così come le loro derivate, siano di ordine uno nell'ambito del problema che stiamo considerando, tutti i termini risultano allora di ordine uno tranne i due gruppi adimensionali che possono invece assumere un ordine di grandezza qualunque.

Ne consegue che, valutando l'ordine di grandezza del numero di Reynolds possiamo stimare quanto importanti siano i termini legati alla viscosità rispetto ai termini a primo membro (che sono termini inerziali). Quindi **il numero di Reynolds può essere interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze viscosi**. In particolare se  $R_e \gg 1$  i termini viscosi saranno trascurabili e la viscosità non influenza in modo significativo il fenomeno che si sta studiando; se, al contrario, il numero di Reynolds,  $R_e \approx 1$  oppure minore, nel risolvere il problema, dovremo tenere conto degli effetti della viscosità.

L'ordine di grandezza del numero di Froude densimetrico fornisce invece informazioni sull'importanza delle variazioni di densità, e può essere quindi **interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze di galleggiamento**. Analogamente al caso precedente, se  $F_r \gg 1$  il termine dovuto alle forze di galleggiamento può essere trascurato e le variazioni di densità non influenzano in modo significativo il nostro fenomeno e andranno invece considerate se  $F_r \approx 1$  o di ordine di grandezza inferiore.

In conclusione si può affermare che, se si fa una scelta oculata delle scale di un fenomeno, cosicché tutti i termini adimensionalizzati risultino di ordine uno, la valutazione dei due numeri adimensionali permette di stimare quale sia l'importanza della viscosità e delle forze di galleggiamento e sotto che condizioni queste possano essere eventualmente trascurate nella soluzione del problema che si sta trattando.

Il numero di Froude densimetrico può essere espresso anche in funzione del gradiente di densità  $\alpha$ . Se ipotizziamo che nella zona di interesse possa essere approssimato con un andamento lineare (Taylor al prim'ordine) della densità del tipo:

$$\rho(z) = \rho_0 - \alpha z$$

come quello rappresentato in Figura 11, e scegliamo come scala delle variazioni di densità la sua variazione attraverso l'altezza della collina:  $\Delta\rho = \Gamma H$ , otteniamo:

$$Fr = \sqrt{\frac{U^2}{\frac{g\Gamma H^2}{\rho_0}}} = \frac{U}{NH} \quad (33)$$

avendo introdotto la frequenza di Brunt-Väisälä:

$$N = \sqrt{\frac{g\Gamma}{\rho_0}}$$

Un parametro che svolge un ruolo chiave nella stabilità dei flussi ambientali, come apparirà chiaro nel prossimo capitolo.

## 4. STABILITÀ DEI FLUSSI AMBIENTALI

Le forze di galleggiamento, pur dando luogo a variazioni di volume così piccole da poter essere trascurate nei termini inerziali, giocano un ruolo fondamentale nei flussi ambientali. A volte possono avere un ruolo stabilizzante, in questo caso tendono a inibire il mescolamento e lo sviluppo di turbolenza, contribuendo a mantenere separate masse di fluido con caratteristiche diverse. In altre situazioni hanno un ruolo instabilizzante e contribuiscono a generare turbolenza e il mescolamento delle diverse porzioni di fluido. Poiché al mescolamento è legata la dispersione degli scalari passivi, comprendere i meccanismi di stabilità e instabilità è fondamentale da un punto di vista ambientale.

Incominciamo qui a trattare il caso base in assenza di turbolenza, e poi uno dei meccanismi base di mescolamento tra masse di fluido stratificate stabilmente, per rimandare lo studio della stabilità nei flussi turbolenti ai capitoli successivi.

### 4.1. Stabilità statica

Consideriamo un fluido debolmente comprimibile in quiete. Concentriamoci sull'intorno di un punto e scegliamo un sistema di riferimento con un asse  $z$  diretto verso l'alto con l'origine nel punto considerato. Supponiamo che, nell'intorno del punto considerato, l'andamento della densità sia decrescente con la quota e possa essere approssimato, utilizzando uno sviluppo in serie di Taylor al prim'ordine, per mezzo della legge:

$$\rho(z) = \rho_0 - \Gamma \cdot z$$

con  $\Gamma = -d\rho/dz$ . Ora, immaginiamo di prendere una particella fluida che inizialmente si trova alla quota  $z = 0$  con densità  $\rho(0) = \rho_0$  e spostarla istantaneamente ad una quota maggiore  $z$ . Essendo lo spostamento istantaneo possiamo ipotizzare che la densità della particella rimanga costante e pari a  $\rho_0$ , ma attorno a sé, alla quota  $z$ , essa troverà fluido con densità minore:  $\rho(z) < \rho_0$ ; quindi, la nostra particella sarà più pesante del fluido circostante e tenderà a tornare verso il basso (schema verde in Figura 12). Se invece spostiamo la particella istantaneamente verso il basso questa troverà intorno a sé fluido più pesante e quindi sarà soggetta ad una forza di galleggiamento che tenderà a farla ritornare verso l'alto, cioè verso la posizione iniziale.

In generale, se spostiamo la particella dalla sua quota di equilibrio,  $z = 0$ , ad una generica quota  $z$ , secondo la legge di Archimede, essa sarà soggetta ad una forza di galleggiamento per unità di volume,  $F(z)$ , pari alla differenza tra il peso del liquido spostato (per unità di volume:  $g\rho(z) = g(\rho_0 - \Gamma z)$ ) ed il peso della particella stessa ( $g\rho_0$ ):

$$F(z) = g\rho(z) - g\rho_0 = g(\rho_0 - \Gamma z) - g\rho_0 = -gaz \quad (34)$$

Osserviamo che, in accordo con il ragionamento precedente,  $F(z)$  risulta negativa, cioè diretta verso il basso per  $z > 0$ ; mentre risulta diretta verso l'alto per  $z < 0$ . Siamo, cioè, in una situazione nella quale la particella tende comunque a tornare alla sua posizione di partenza: cioè una *condizione stabile*.

Calcoliamo ora qual è la legge del moto,  $z(t)$ , della particella soggetta alla forza per unità di volume,  $F(z)$ , quando la spostiamo. Per farlo scriviamo il secondo principio della dinamica per unità di volume, ricordando che, nell'ipotesi di Boussinesq, nei termini inerziali la densità può essere considerata pari a  $\rho_0$ :

$$F(z) = \rho_0 a = \rho_0 \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

sostituendo l'espressione di  $F(z)$  (34) e dividendo tutto per  $\rho_0$ , otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{g\Gamma}{\rho_0} z = 0$$

Questa è l'equazione armonica. Per trovarne la soluzione ipotizziamo che sia di tipo sinusoidale, con ampiezza  $A$ , pulsazione  $N$  e fase  $\varphi$ :

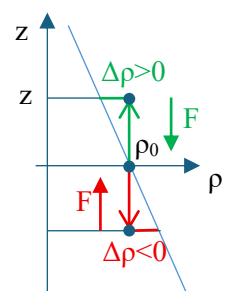


FIGURA 12

$$z(t) = A \sin(Nt + \varphi)$$

e sostituiamo la funzione ipotizzata nell'equazione differenziale per verificare se è in grado di soddisfarla.

Le sue derivate sono:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = NA \cos(Nt + \varphi) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -N^2 A \sin(Nt + \varphi) \end{cases}$$

Sostituendo la funzione e la sua derivata seconda nell'equazione differenziale si ottiene:

$$-N^2 A \sin(Nt + \varphi) + \frac{\Gamma g}{\rho_0} A \sin(Nt + \varphi) = 0$$

Dividendo per  $A \sin(Nt + \varphi)$  si ottiene l'equazione che deve soddisfare  $N$  affinché la funzione sinusoidale ipotizzata possa essere la soluzione dell'equazione differenziale del moto:

$$N = \sqrt{\frac{g\Gamma}{\rho_0}} \quad (35)$$

Il valore della fase e dell'ampiezza dipendono invece dalle condizioni iniziali. Quindi, in un fluido in cui la densità diminuisce con la quota con gradiente verticale  $-\Gamma$ , una particella fluida spostata istantaneamente dalla sua posizione di equilibrio tende a tornare verso la sua posizione originale con un andamento di tipo sinusoidale. Si tratta quindi di una condizione di stabilità. Poiché, nella nostra trattazione, non abbiamo considerato la viscosità, l'equazione che abbiamo ottenuto farebbe prevedere un'oscillazione di pulsazione  $N$  che continua all'infinito. Nella realtà, le oscillazioni saranno smorzate per effetto della viscosità, e la frequenza di oscillazione sarà leggermente inferiore. Il parametro  $N$  non è altro che la frequenza di Brunt-Väisälä introdotta nel paragrafo precedente (33).

Cosa succede se invece la densità cresce con la quota? Nel nostro schema questa situazione corrisponde a porre  $\Gamma < 0$ . In questo caso, la funzione sinusoidale non è più una soluzione dell'equazione perché l'equazione (35) non ha soluzione reale con  $\Gamma$  negativo. Si ipotizza perciò in questo caso che la soluzione sia di tipo esponenziale:

$$z(t) = Ae^{Nt + \varphi},$$

e, di nuovo, si sostituisce la funzione nell'equazione differenziale per verificare se può esserne la soluzione. In questo caso le derivate sono:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = NAe^{Nt + \varphi} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = N^2 Ae^{Nt + \varphi} \end{cases}$$

e, sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$N^2 Ae^{Nt + \varphi} + \frac{\Gamma g}{\rho_0} Ae^{Nt + \varphi} = 0$$

Dividendo per  $Ae^{Nt + \varphi}$  si ottiene la nuova espressione di  $N$ :

$$N = \sqrt{-\frac{\Gamma g}{\rho_0}}$$

che, in questo caso, ammette soluzione reale in quanto  $\Gamma$  è negativo.

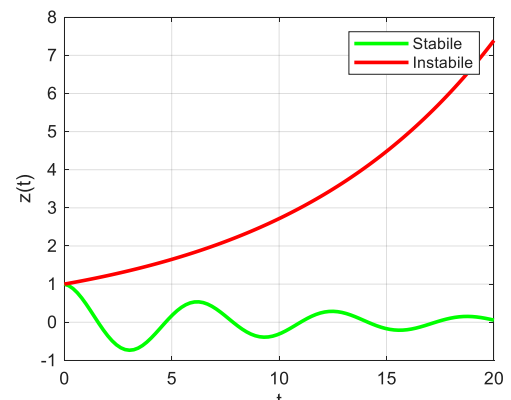


FIGURA 13

In conclusione, *quando la densità è decrescente con la quota ( $\Gamma > 0$ ) si parla di una stratificazione stabile*. Una particella che viene perturbata dal suo equilibrio tende a tornare nella sua posizione iniziale attraverso oscillazioni smorzate (considerando l'effetto della dissipazione viscosa) con pulsazione  $N$ . *Quando invece la densità cresce con la quota, la stratificazione è instabile* e una particella che subisce una perturbazione si allontana esponenzialmente dalla posizione di equilibrio; anche qui con una legge che dipende dallo stesso parametro,  $N$ : la frequenza di Brunt-Väisälä,  $N$  che nel caso stabile rappresenta la pulsazione delle oscillazioni, mentre nel caso instabile rappresenta la velocità con la quale la particella fluida si allontana dalla posizione di equilibrio.



FIGURA 14 – ONDE DI KELVIN-HELMHOLTZ IN ATMOSFERA

È importante notare che, se un fluido si trova ad essere stratificato stabilmente, tenderà a rimanere nella sua condizione, proprio a causa della stabilità stessa. Quindi sarà possibile trovare in natura flussi stratificati stabilmente, e trattarli attraverso l'analisi appena descritta. Al contrario, un fluido che si trovasse per un istante ad essere stratificato in modo instabile, non rimarrebbe nella sua condizione; infatti, alla minima perturbazione (sempre presente nella realtà), ogni sua particella fluida si allontanerebbe esponenzialmente dalla posizione di equilibrio. Il risultato complessivo sarebbe il mescolamento del fluido e, in ultima analisi, la generazione di turbolenza. In questa situazione l'analisi di stabilità statica non è più lo strumento adatto a studiare il fenomeno che invece andrà affrontato attraverso la trattazione dei flussi turbolenti oggetto dei capitoli successivi.

## 4.2. Instabilità di Kelvin – Helmholtz

Anche quando il fluido è stratificato stabilmente in termini di densità, può accadere che prevalgano gli effetti instabilizzanti dovuti ai gradienti di velocità e i diversi strati si mescolino tra loro a patto che vi sia un gradiente di velocità sufficiente. Uno dei meccanismi attraverso i quali questo può avvenire è l'instabilità di Kelvin-Helmholtz, un fenomeno che si verifica quando due strati di fluido scorrono l'uno sull'altro con velocità differenti, creando un'interfaccia che può diventare instabile portando a generazione di onde e turbolenza. Nei flussi ambientali questa situazione si verifica ogni qualvolta due masse di fluido con provenienze diverse (quindi, in generale, con velocità e densità diverse) si incontrano tra loro. Lo strato di fluido più denso si insinua sotto a quello meno denso e, a causa della differenza di densità, i due flussi tendono a rimanere distinti tra loro. Ci si trova dunque con due strati di densità diverse che scorrono l'uno sull'altro creando quella che viene detta, *corrente di densità*, con le forze di galleggiamento che hanno un effetto stabilizzante a causa della stratificazione stabile, mentre il gradiente di velocità tra i due strati ha un effetto instabilizzante.

Un esempio tipico è nell'atmosfera (Figura 14): quando lo strato limite a contatto del suolo è separato dalla sovrastante atmosfera libera da uno strato stabile (lo strato di *inversione termica*) che, fa sì che l'atmosfera libera scorra sopra allo strato limite con velocità superiori. La differenza di velocità favorisce la crescita delle perturbazioni. Queste possono evolvere in onde visibili, talvolta associate a formazioni nuvolose caratteristiche.

Situazioni analoghe si riscontrano negli oceani e nei mari, dove correnti superficiali scorrono sopra masse d'acqua più dense, separate da un termoclino o da un gradiente di salinità.

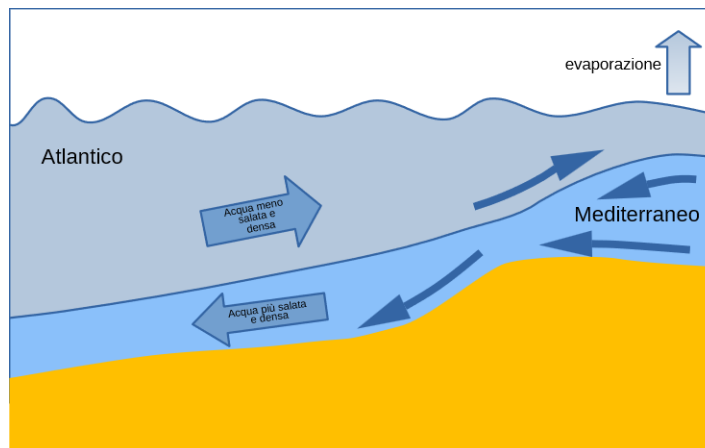


FIGURA 15 – CORRENTE DI DENSITÀ ALLO STRETTO DI GIBILTERRA

Ad esempio la corrente di densità allo stretto di Gibilterra, porta di comunicazione tra l'Oceano Atlantico, e il Mar Mediterraneo che, essendo meno profondo, ha una superficie di evaporazione maggiore in rapporto al suo volume, e risulta pertanto con un tasso di salinità più elevato del primo. Per questo motivo, due masse d'acqua, una in entrata e una in uscita, si sovrappongono (Figura 15): l'acqua atlantica, meno salata e meno densa, entra in superficie verso il Mediterraneo, mentre l'acqua mediterranea, più salata e densa, esce in profondità verso l'Atlantico, creando un flusso costante di ricambio idrico essenziale per l'equilibrio del bacino. Infatti l'intensa evaporazione del Mediterraneo lo rende più denso, spingendo le sue acque ad affondare e a tornare indietro in profondità, richiamando nuove acque atlantiche. In questi casi, l'instabilità generata dal gradiente di velocità può generare onde interne che contribuiscono al mescolamento verticale.

Altri esempi si possono trovare nei laghi stratificati nei quali, soprattutto in estate, lo strato superficiale caldo può muoversi più rapidamente rispetto a quello profondo freddo, creando condizioni favorevoli all'instabilità, oppure negli estuari, dove acqua dolce scorre sopra acqua salata.

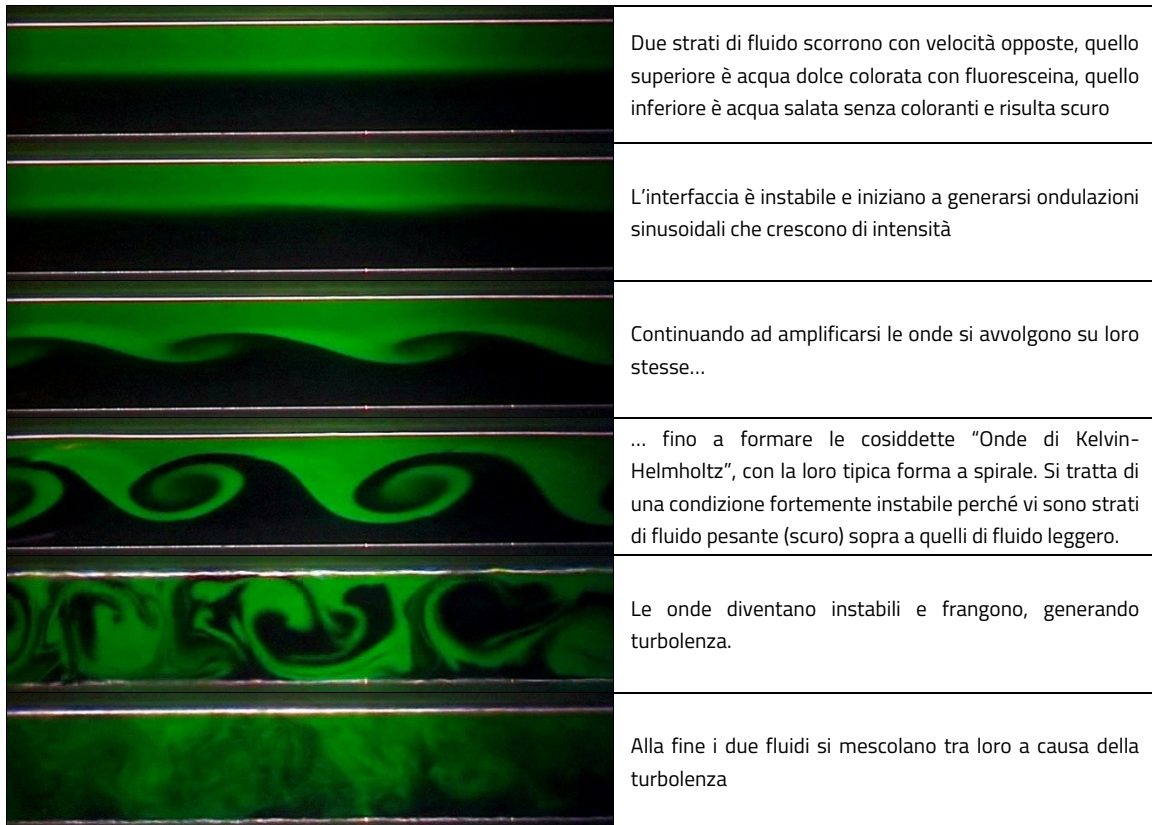


FIGURA 16

In sintesi, l'instabilità di Kelvin-Helmholtz si manifesta ogni volta che esiste un'interfaccia tra due fluidi con densità simili ma velocità differenti, e la viscosità non è sufficiente a smorzare le perturbazioni. Quando l'interfaccia diventa instabile incomincia a formare onde sinusoidali, che si amplificano sempre più diventando instabili e, infine frangendo (Figura 16). Questo fenomeno è cruciale perché rappresenta uno dei principali meccanismi di generazione di turbolenza e di mescolamento negli ambienti naturali.

Studiare l'instabilità di Kelvin-Helmholtz corrisponde ad individuare le condizioni affinché l'effetto instabilizzante del gradiente di velocità prevalga sull'effetto stabilizzante della differenza di densità. Per farlo consideriamo il caso schematico di due strati di fluido alti  $H/2$  ed infinitamente estesi sull'orizzontale. Supponiamo che il primo abbia densità  $\rho_1$  e velocità  $U_1$ , mentre il secondo densità  $\rho_2$  e velocità  $U_2$ . In accordo con le considerazioni precedenti supponiamo  $\rho_1 < \rho_2$ . Scegliamo un sistema di riferimento che trasli con la velocità media dei due strati:  $U_r = (U_1 + U_2)/2$ . In questo sistema di riferimento la velocità dello strato superiore è  $+\Delta U/2$ , e quella dello strato inferiore  $-\Delta U/2$ , avendo definito  $\Delta U = U_1 - U_2$ . Con riferimento alla Figura 17, consideriamo un volume di controllo largo 1, profondo 1 nella direzione ortogonale al disegno, ed alto  $H$ , e confrontiamo le condizioni precedenti con quelle successive al mescolamento completo.

Prima del mescolamento il baricentro del volume,  $G'$  si trova al di sotto della mezzeria del nostro volume perché il fluido inferiore è più pesante di quello superiore; dopo il mescolamento la densità del fluido è uniforme, quindi il baricentro,  $G''$  si troverà esattamente nella mezzeria.

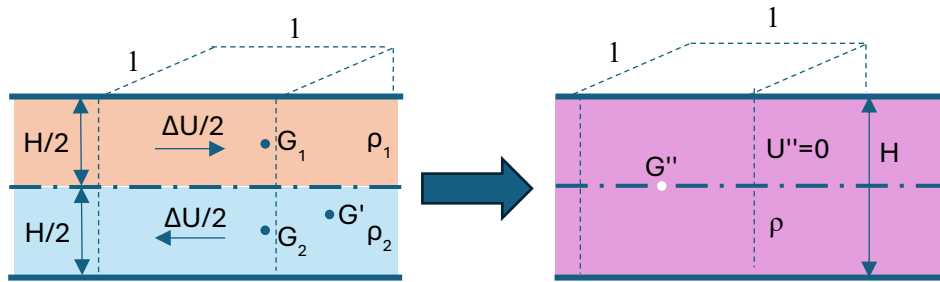


FIGURA 17 – A SINISTRA, PRIMA DEL MESCOLAMENTO; A DESTRA, DOPO IL MESCOLAMENTO

Quando il baricentro del volume di controllo si innalza, l'energia potenziale associata al campo gravitazionale aumenta di una quantità  $\Delta E_p$ , che deve essere fornita affinché il mescolamento possa avvenire. Durante il processo, tuttavia, l'energia cinetica del volume di controllo si riduce di una quantità  $\Delta E_c$ , come si vedrà tra breve. Pertanto, il mescolamento sarà possibile solo quando la riduzione di energia cinetica,  $\Delta E_c$ , è sufficiente a garantire il necessario aumento di energia potenziale,  $\Delta E_p$ , ovvero:

$$\frac{\Delta E_p}{\Delta E_c} \leq 1 \quad (36)$$

La disuguaglianza rende conto del fatto che l'eventuale quota di energia cinetica disponibile in eccesso sarà dissipata sotto forma di calore.

Per prima cosa, calcoliamo l'aumento di energia potenziale  $\Delta E_p$ . Prima del mescolamento, l'energia potenziale del volume di controllo,  $V_c$  è:  $E'_p = mg z'_G$ , dopo il mescolamento:  $E''_p = mg z''_G$ , avendo indicato con  $m$  la massa del volume di controllo, con  $z'_G$  e  $z''_G$  la quota del baricentro prima e dopo il mescolamento, e con  $g$  l'accelerazione di gravità.

L'incremento di energia potenziale sarà quindi:

$$\Delta E_p = mg(z''_G - z'_G) \quad (37)$$

Per calcolare  $m$ , osserviamo che, dopo il mescolamento, la densità è:

$$\rho'' = (\rho_1 + \rho_2)/2,$$

mentre il volume sarà:

$$V_c = H \cdot 1 \cdot 1$$

e la sua massa (costante prima e dopo il mescolamento):

$$m = \rho'' V_c = H (\rho_1 + \rho_2)/2 \quad (38)$$

Considerato che i baricentri dei due strati iniziali si trovano al loro centro:  $z_{G1} = 3/4 H$ , e  $z_{G2} = 1/4 H$ , il baricentro dell'intero volume di controllo prima del mescolamento può essere calcolato come media pesata:

$$z'_G = \frac{\rho_1 z_{G1} + \rho_2 z_{G2}}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\rho_1 \frac{3}{4} H + \rho_2 \frac{1}{4} H}{\rho_1 + \rho_2}$$

Dopo il mescolamento il baricentro sarà invece, semplicemente nella mezzeria dello strato complessivo:  $z''_G = H/2$ . Sostituendo la (38) e le espressioni dei baricentri nell'equazione (37) otteniamo l'espressione dell'incremento di energia potenziale:

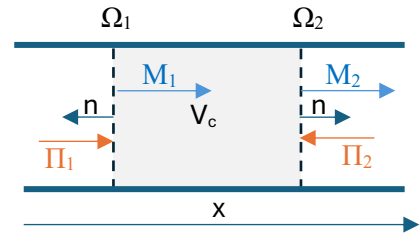
$$\Delta E_p = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} H g \left( \frac{1}{2} H - \frac{\rho_1 \frac{3}{4} H + \rho_2 \frac{1}{4} H}{\rho_1 + \rho_2} \right) = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} H^2 g \frac{(2(\rho_1 + \rho_2) - 3\rho_1 - \rho_2)}{4(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{H^2 g}{8} (\rho_2 - \rho_1)$$

la quale, indicando la differenza di densità con  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ , può essere espressa come:

$$\Delta E_P = \frac{H^2 g}{8} \Delta\rho \quad (39)$$

Per calcolare la variazione di energia cinetica è necessario conoscere la velocità,  $U$ , dopo il mescolamento, che può essere ottenuta attraverso un bilancio della componente orizzontale ( $x$ ) della quantità di moto nel volume di controllo  $V_c$ :

$$I_x + M_x = \Pi_x + G_x \quad (40)$$



Nella quale:

- per l'ipotesi di Boussinesq, secondo la quale le variazioni di densità sono rilevanti solo nei termini gravitazionali: possiamo quindi considerare tutte le densità uguali e pari a  $\rho$ .
- $M_x$  è il flusso di quantità di moto attraverso la superficie del volume di controllo, e in particolare sulle superfici laterali  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , visto che le altre parti della superficie del volume di controllo non sono attraversate dal fluido. Il flusso può quindi essere espresso come  $M_x = M_1 + M_2$ . Con  $M_1 = -\rho Q U_1$  e  $M_2 = +\rho Q U_2$ ; ma per l'omogeneità orizzontale le velocità medie sulle sezioni  $U_1$  e  $U_2$ , sono uguali tra loro, e il segno di  $M_1$  e  $M_2$  è opposto perché il flusso  $M_2$  è positivo in quando uscente, mentre quello  $M_1$  è entrante e quindi negativo. Quindi  $M_1 = -M_2$  e  $M_x = 0$ .
- $\Pi_x$  è la risultante delle forze di superficie in direzione  $x$ , che può essere approssimata come la risultante delle pressioni sulle due superfici  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Per l'omogeneità orizzontale del problema le pressioni sono uguali sulle due superfici e dunque le risultanti delle pressioni esterne sono uguali e opposte, dando anche in questo caso una risultante nulla:  $\Pi_x = 0$ .
- $G_x$  è la componente orizzontale del peso del fluido nel volume di controllo che è, banalmente, nulla.

Risulta quindi dal bilancio della quantità di moto (40) che  $I_x + 0 = 0 + 0$ . Poiché  $I_x$  rappresenta la variazione nel tempo della quantità di moto, ne consegue che la quantità di moto contenuta nel volume di controllo prima e dopo il mescolamento è la stessa.

Ricordando che la quantità di moto è massa  $\times$  velocità, e che il volume occupato dai due strati prima del mescolamento è  $V_1 = V_2 = H/2 \cdot 1 \cdot 1$ , e che si possono trascurare le variazioni di densità, prima del mescolamento abbiamo:

$$Q. d. M.' = m_1 U_1 + m_2 U_2 = \rho_1 V_1 U_1 + \rho_2 V_2 U_2 = \rho_1 \frac{H}{2} U_1 + \rho_2 \frac{H}{2} U_2 \approx \rho (U_1 + U_2) \frac{H}{2}$$

Mentre dopo il mescolamento:

$$Q. d. M.'' = mU = \rho V_c U = \rho H U \approx \rho H U$$

Uguagliando le due otteniamo:

$$\rho (U_1 + U_2) \frac{H}{2} = \rho H U$$

dalla quale ricaviamo la velocità,  $U$ , dopo il mescolamento:

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

Se ricordiamo che nel nostro sistema di riferimento  $U_1 = +\Delta U/2$  e  $U_2 = -\Delta U/2$ , risulta che la velocità media del fluido dopo il mescolamento è  $U = 0$ . Abbiamo ora tutti gli elementi per calcolare la diminuzione di energia cinetica che avviene durante il mescolamento:

$$\Delta E_C = E'_C - E''_C = \frac{1}{2} m_1 U_1^2 + \frac{1}{2} m_2 U_2^2 - \frac{1}{2} m U^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{H}{2} \rho_1 U_1^2 + \frac{H}{2} \rho_2 U_2^2 \right) - 0$$

Ricordando che si possono trascurare le differenze di densità, e le espressioni delle velocità nel sistema di riferimento scelto si ricava infine:

$$\Delta E_C = \rho \frac{H}{4} \left[ \left( +\Delta \frac{U}{2} \right)^2 + \left( -\Delta \frac{U}{2} \right)^2 \right] = \frac{\rho H}{8} \Delta U^2 \quad (41)$$

Sulla scorta delle (39) e (41), la condizione per il mescolamento (36) diventa:

$$\frac{\frac{H^2 g}{8} \Delta \rho}{\frac{\rho H}{8} \Delta U^2} = \frac{g \frac{\Delta \rho}{\rho} H}{\Delta U^2} = \frac{1}{Fr^2} \leq 1$$

Nella quale abbiamo riconosciuto la presenza del numero di Froude densimetrico  $Fr = \frac{U}{\sqrt{g \frac{\Delta \rho}{\rho} H}}$ , confermando la validità dell'analisi dimensionale condotta nel capitolo precedente, che indicava Fr come uno dei due parametri che controlla i flussi con piccole variazioni di densità. In conclusione, possiamo esprimere la condizione di instabilità attraverso il numero di Froude come:

$$Fr \geq 1$$

Si danno quindi tre casi:

- i )  $\Delta E_C < \Delta E_P \rightarrow Fr < 1$  non si rende disponibile abbastanza energia, il mescolamento non avviene;
- ii )  $\Delta E_C = \Delta E_P \rightarrow Fr = 1$  in linea teorica il mescolamento può avvenire, tutta la diminuzione di energia cinetica si trasforma in energia potenziale (caso ideale);
- iii )  $\Delta E_C > \Delta E_P \rightarrow Fr < 1$  l'interfaccia è instabile e il mescolamento avviene, la diminuzione di energia cinetica si trasforma in parte in energia potenziale e in parte va dissipata attraverso la generazione di turbolenza.

## 5. TURBOLENZA

### 5.1. Definizione

La turbolenza svolge un ruolo fondamentale nella dinamica dei flussi ambientali, influenzando processi che spaziano dalla dispersione degli inquinanti in atmosfera al trasporto di sedimenti in fiumi e regioni costiere. A differenza del moto laminare, i flussi turbolenti sono caratterizzati da fluttuazioni caotiche tridimensionali che aumentano il mescolamento e il trasferimento di quantità di moto su diverse scale. Questa complessità intrinseca rende la turbolenza sia una sfida sia un elemento imprescindibile per la comprensione dei fenomeni legati alla fluidodinamica ambientale.

Una delle funzioni principali della turbolenza nei sistemi naturali è la promozione del mescolamento. In atmosfera, i vortici facilitano la dispersione di calore, umidità e specie chimiche, controllando così lo scambio di energia tra la superficie e lo strato limite planetario. Analogamente, nei corpi liquidi, la turbolenza governa la distribuzione di nutrienti e gas disciolti, essenziali per il mantenimento dell'attività biologica. In assenza di turbolenza, tali scambi dipenderebbero esclusivamente dalla diffusione molecolare, un processo enormemente più lento.



Per avere un'idea concreta dell'importanza relativa dei due fenomeni consideriamo di depositare delicatamente sul fondo di una tazzina di caffè un cucchiaino di zucchero. Se lasciamo che sia la diffusione molecolare ad uniformare la concentrazione dello zucchero nella tazzina, l'ordine di grandezza del tempo necessario sarà il tempo scala della diffusione  $T_d = L^2/D$ . Con  $L = 0.05\text{m}$  scala delle lunghezze (dimensione della tazzina), e  $D = 5 \cdot 10^{-10}\text{m}^2/\text{s}$  coefficiente di diffusione del saccarosio in acqua, il tempo necessario risulta  $T_d \approx 58$  giorni!

La generazione di turbolenza nei flussi naturali è spesso legata a gradienti di velocità, effetti di galleggiamento e interazioni con confini complessi. Ad esempio, il vento che soffia su terreni irregolari o sulle onde oceaniche induce gradienti di velocità che si frammentano in strutture turbolente. Nei fiumi, la turbolenza nasce dalla scabrezza del fondo e dagli ostacoli al flusso, creando vortici che favoriscono l'erosione e la deposizione dei sedimenti. Questi meccanismi sono cruciali per l'evoluzione morfodinamica, poiché determinano la variabilità spaziale dei processi erosivi e sedimentari.

Le implicazioni ecologiche della turbolenza sono profonde. Nelle zone costiere, il mescolamento turbolento influenza la dispersione di contaminanti; negli ambienti urbani, la turbolenza nei canyon urbani<sup>11</sup> condiziona la qualità dell'aria, regolando gli scambi tra il livello stradale e gli strati superiori. Inoltre, la turbolenza modula i flussi di calore nello strato limite atmosferico, influenzando il clima locale.

Comprenderne la dinamica è essenziale per prevedere i processi ambientali e progettare strategie efficaci di mitigazione per l'inquinamento, l'adattamento climatico.

Nel terzo capitolo abbiamo ricavato le equazioni che governano tutti i fenomeni della meccanica dei fluidi debolmente comprimibili sotto l'ipotesi di Boussinesq che qui richiamiamo:

$$\begin{cases} u_{j,j} = 0 & \text{equazione di continuità} \\ u_{i,t} + \mathbf{u}_j u_{i,j} = -\frac{1}{F_r^2} z_{,i} - \tilde{p}_{,i} + \frac{1}{R_e} u_{i,jj} & \text{equazione di Navier - Stokes} \\ & \text{equazione per la } \tilde{p} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali *non lineare* a causa della presenza del termine di trasporto della quantità di moto evidenziato in rosso nell'equazione di Navier-Stokes. Questo aspetto è importante perché secondo la teoria del caos, un sistema dinamico<sup>12</sup> retto da equazioni non lineari, può, per alcuni valori dei parametri che lo controllano, diventare *sensibile alle condizioni iniziali*.

<sup>11</sup> Si intende per canyon urbano lo spazio tra due edifici adiacenti separati da una strada.

<sup>12</sup> Un sistema dinamico è un concetto matematico utilizzato per descrivere qualsiasi fenomeno fisico che evolve nel tempo secondo leggi assegnate.

*Si intende per sensibilità alle condizioni iniziali quella caratteristica dei sistemi dinamici per la quale perturbazioni infinitesime delle condizioni iniziali si amplificano esponenzialmente nel tempo, determinando, in un tempo finito, un'evoluzione completamente diversa (ovvero con differenze di ordine di grandezza finito) del fenomeno.*

Nel contesto della meccanica dei fluidi, il manifestarsi di questa caratteristica porta allo sviluppo di un flusso *turbolento*, mentre un flusso che non la manifesta si dice *laminare*. In effetti, la maggior parte dei flussi ambientali sono turbolenti. La differenza tra moti laminari e turbolenti può anche essere interpretata in termini di stabilità (in perfetta analogia a quanto visto nello studio della stabilità statica): un flusso turbolento, sensibile alle condizioni iniziali, è un sistema nel quale le perturbazioni si amplificano esponenzialmente e quindi instabile, mentre in un flusso laminare, che non è sensibile alle condizioni iniziali, le perturbazioni, anche se presenti, si smorzano.

Il regime turbolento nel moto di un fluido è caratterizzato, in relazione al regime laminare, dai seguenti aspetti:

- il movimento del fluido è disorganizzato ed irregolare nel tempo e nello spazio;
- il moto turbolento è un fenomeno *caotico*: la sensibilità alle condizioni iniziali è proprio ciò che caratterizza, in termini matematici, un sistema caotico;
- i fenomeni di dispersione sono molto accentuati;
- gli esperimenti non sono ripetibili: se si ripete uno stesso esperimento più volte con le stesse condizioni iniziali e al contorno il risultato sarà ogni volta diverso;
- il fenomeno è imprevedibile: non è concettualmente possibile prevedere come evolverà il sistema nella singola realizzazione di un esperimento.

La non prevedibilità e la non ripetibilità sono caratteristiche fondamentali di un flusso turbolento. Esse non significano che non esista una relazione di causa ed effetto che regola il verificarsi delle fluttuazioni turbolente, la loro aleatorietà è solo un effetto della sensibilità alle condizioni iniziali.

Analizziamo il problema più in dettaglio: in un sistema sensibile alle condizioni iniziali una perturbazione infinitesima porta a variazioni finite nell'evoluzione del sistema nell'arco di un tempo finito; in un sistema deterministico invece, ovvero non sensibile alle condizioni iniziali, una perturbazione infinitesima porta ad una variazione infinitesima dell'evoluzione in un intervallo di tempo finito.

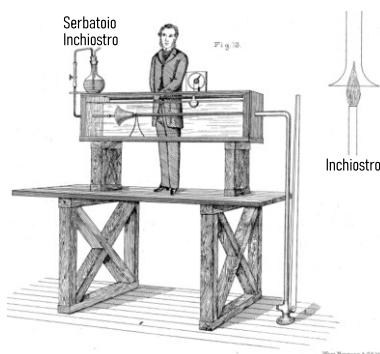
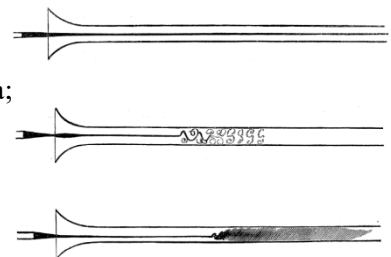


FIGURA 18 – ESPERIMENTO DI REYNOLDS

Per chiarire questo punto consideriamo l'esperimento che condusse Osborne Reynolds nel 1883 e che introdusse sia il concetto di moto turbolento e dimostrò che l'insorgere della turbolenza dipende dal gruppo adimensionale che prende il suo nome<sup>13</sup>. Egli realizzò una serie di esperimenti facendo fluire una portata nota all'interno di un tubo di vetro con un'imboccatura ben raccordata a tromba per garantire l'ingresso di un flusso laminare dal serbatoio di alimentazione (Figura 18). Subito a monte dell'ingresso del tubo Reynolds inserì un ago che rilasciava inchiostro colorato per visualizzare il comportamento del flusso nel suo sviluppo lungo il tubo. Egli notò, che:

- a) per valori bassi del parametro  $Re = U/(v D)$  la linea di inchiostro rilasciata rimaneva compatta e rettilinea;
- b) a valori più alti del parametro la linea di inchiostro, dopo un tratto iniziale, diventava instabile mostrando perturbazioni che si amplificavano sempre più e il moto diventava turbolento;
- c) aumentando ancora il parametro, la turbolenza si manifestava sempre più vicino all'imboccatura e l'inchiostro si mescolava completamente con il fluido senza che si distinguessero più i singoli vortici.



<sup>13</sup> Osborne Reynolds, "An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 174 (1883), pp. 935-982, <http://www.jstor.org/stable/109431>

Egli concluse che il regime turbolento nel tubo si verifica quando il parametro adimensionale  $Re = U/(vD)$  supera un valore critico ben definito ( $Re_c \approx 2000$ ).

Quello che Reynolds ha visto come un cambiamento del regime di moto da laminare a turbolento, in effetti può essere interpretato in termini di sensibilità alle condizioni iniziali e di amplificazione delle perturbazioni. Per comprenderlo, consideriamo due particelle di inchiostro rilasciate dall'ago, inizialmente a distanza,  $d$ , molto piccola (Figura 19). Possiamo interpretare questa distanza come una perturbazione nella posizione iniziale. Seguiamo le particelle lungo il loro moto per un tempo definito. Al termine del periodo di osservazione la distanza sarà diventata  $\lambda d$ . Ora, nel caso laminare (Figura 19, prima riga), le perturbazioni inizialmente infinitesime non si amplificano e rimangono infinitesime, quindi  $\lambda d \sim d$ , ovvero  $\lambda \sim 1$ . Nel caso turbolento invece (Figura 19 seconda riga), la perturbazione sarà amplificata esponenzialmente e le traiettorie saranno completamente diverse, le particelle, dopo lo stesso intervallo di tempo, si troveranno a distanza molto grande e il fattore di amplificazione sarà quindi  $\lambda \gg 1$ . Nel primo caso tutte le particelle di inchiostro, inizialmente vicine, rimangono vicine, e un osservatore vedrà un filo di inchiostro propagarsi compatto e rettilineo; nel secondo caso le particelle seguiranno traiettorie diverse e si allontaneranno tra loro: un osservatore vedrà dunque la linea di inchiostro deformarsi e infine l'inchiostro miscelarsi con l'acqua del tubo.

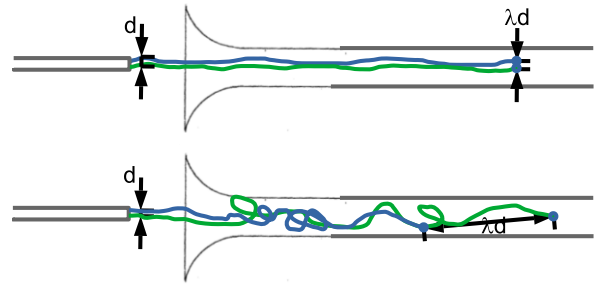


FIGURA 19

*La sensibilità alle condizioni iniziali rende un esperimento irripetibile.* Per chiarire questo concetto, sempre con riferimento alla Figura 19, immaginiamo che l'esperimento consista nel rilasciare una sola particella, e che, nella prima realizzazione, questa segua la traiettoria blu. Se ora ripetiamo l'esperimento, nel mondo reale dobbiamo ammettere che sarà inevitabile un errore nel posizionamento, per esempio  $d$ . Quindi, nella seconda ripetizione la particella seguirà la traiettoria verde. Dopo il periodo di osservazione l'errore sarà diventato  $\lambda d$ .

Nel caso laminare,  $\lambda$  è di ordine 1, quindi l'errore finale è dello stesso ordine di grandezza di quello iniziale. Si può quindi concludere che più si è precisi nella posizione iniziale più si riduce l'errore finale e, al limite, se  $d \rightarrow 0$  anche l'errore finale,  $\lambda d \rightarrow 0$ . Il fenomeno si ripete uguale a sé stesso con tutta la precisione con cui riesco sperimentalmente a riprodurlo. Nel secondo caso però, quello turbolento,  $\lambda \gg 1$ ; quindi, per quanto si riduca l'errore iniziale ad un valore infinitesimo ( $d \rightarrow 0$ ), l'errore nella posizione finale della particella,  $\lambda d$  rimane finito, e dunque non trascurabile: di fatto il risultato dell'esperimento è ogni volta diverso, perciò l'esperimento non è ripetibile.

Lo stesso ragionamento porta all'impossibilità concettuale di prevedere l'evoluzione futura di un fenomeno nella singola realizzazione di un esperimento: anche ove conoscessi la descrizione analitica delle traiettorie delle particelle, nel mondo reale dovrei ammettere di conoscere la posizione iniziale con un errore (anche trascurabile)  $d$ . Nel caso laminare, riesco a prevedere la posizione finale della particella con un errore  $\lambda d$ , ancora trascurabile, essendo  $\lambda \sim 1$ , mentre nel caso di flusso turbolento, con  $\lambda \gg 1$ , l'errore finale  $\lambda d$  non è trascurabile per quanto piccolo sia quello iniziale. *Anche disponendo della soluzione analitica del problema, non riusciamo a prevedere in modo attendibile dove sarà la particella al termine del tempo di osservazione.*

Per individuare quali parametri influenzino il fatto che un flusso sia laminare o turbolento affrontiamo il problema dal punto di vista della stabilità: se il moto è laminare, una perturbazione tende a smorzarsi per effetto della viscosità; quando invece gli effetti di smorzamento della viscosità non sono sufficienti, la perturbazione assorbe energia dal flusso e tende quindi ad essere amplificata, passando da infinitesima a finita in un tempo finito, e il flusso risulta turbolento.

L'analisi dimensionale condotta quando abbiamo ricavato l'equazione di Navier-Stokes adimensionalizzata (32) ci ha permesso di evidenziare il fatto che il parametro che definisce l'ordine di grandezza dei termini viscosi (*stabilizzanti*) rispetto a quelli inerziali (*instabilizzanti*), è il numero di Reynolds:

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

Quindi possiamo dedurre che, per ogni flusso, esisterà un valore critico del numero di Reynolds,  $R_{ec}$ , che separa i due comportamenti: per  $R_e > R_{ec}$  prevale l'effetto instabilizzante dei termini inerziali e il flusso è turbolento; mentre per  $R_e < R_{ec}$  il flusso è laminare. Ad esempio il flusso diventa turbolento:

- in un condotto a sezione circolare quando  $R_e = UD/\nu > 2000$  in accordo all'osservazione di Osborne Reynolds del 1883 (essendo  $U$  la velocità media,  $D$  il diametro del condotto e  $\nu$  la viscosità cinematica);
- nello strato limite di parete, quando  $R_e = \delta_1 U_e/\nu > 600$  (essendo  $U_e$  la velocità al di fuori dello strato limite, e  $\delta_1$  lo spessore di spostamento, una misura dello spessore dello strato limite).

Anche le forze di galleggiamento possono contribuire a generare o smorzare la turbolenza, nel caso stabile possiamo far riferimento alla trattazione della stabilità statica, nel caso instabile è necessario farlo attraverso lo studio del bilancio dell'energia cinetica turbolenta che sarà affrontato nei paragrafi seguenti.

## 5.2. Descrizione statistica della turbolenza

La sensibilità alle condizioni iniziali che caratterizza la turbolenza fa perdere ogni interesse nel cercare di prevedere il comportamento della singola particella fluida o l'evoluzione del campo di moto nella singola realizzazione di un esperimento. *In effetti viene a mancare uno dei fondamenti dell'indagine scientifica: la ripetibilità degli esperimenti.* Anche l'avere a disposizione una soluzione analitica del sistema di equazioni differenziali che regge il fenomeno (Navier-Stokes, continuità, ecc.) non porta a risultati utili a prevedere il fenomeno perché i risultati ottenuti sono rappresentativi solo di *quella* configurazione e di nessun'altra anche se infinitamente vicina ad essa.

Sfortunatamente, nella realizzazione concreta di un esperimento le condizioni iniziali ed al contorno non saranno mai conosciute in modo esatto in modo che sia possibile ottenere la soluzione analitica effettiva, e dunque, ogni volta, l'evoluzione sarà completamente diversa da quella prevista.

Conviene allora considerare il fenomeno come aleatorio e condurre un'analisi statistica. Dovremo allora ripetere lo stesso esperimento per un numero molto elevato (teoricamente infinito) di volte<sup>14</sup> e fare un'analisi statistica dei risultati ottenuti nelle diverse ripetizioni dell'esperimento.

### 5.2.1. Media di insieme e media temporale

Supponiamo di ripetere  $N$  volte un esperimento e misurare una componente della velocità in un dato punto,  $\mathbf{x}$ , e ad un dato tempo  $t$ , misurato a partire dall'inizio della realizzazione considerata. Si ottiene così un insieme di valori  $u^{(k)}(\mathbf{x}, t)$  di una componente della velocità, con  $k = 1, \dots, N$ .

La *media di insieme* di tutti i valori di  $u(\mathbf{x}, t)$  nelle diverse realizzazioni al medesimo istante e nel punto  $\mathbf{x}$  è data da:

$$\bar{u}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(N)}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^{(k)}$$

In un assegnato intervallo temporale,  $T$ , la turbolenza è detta stazionaria se le statistiche di insieme, non dipendono dal tempo; in detto intervallo è possibile definire una *media temporale*:

$$\langle u(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Il processo è detto **ergodico** se la media di insieme e la media temporale coincidono. Per quanto dimostrare in modo rigoroso che un fenomeno sia ergodico è tutt'altro che semplice, l'esperienza permette di affermare che l'ipotesi di ergodicità è sempre soddisfatta nei fenomeni fisici reali quando sono statisticamente stazionari.

Osserviamo infine che l'operatore media statistica è un operatore lineare per cui può essere scambiato nell'ordine di applicazione, con altri operatori lineari, perciò, ad esempio:

<sup>14</sup> ciascuna esperienza che riproduce le stesse condizioni sarà chiamata *realizzazione* dell'esperimento

$$\overline{(u_t)} = (\bar{u})_t ; \overline{(u_i)} = (\bar{u})_i$$

e, come per tutti gli operatori lineari, se  $\lambda$  e  $\mu$  sono due costanti, ed  $u$  e  $v$  due quantità misurate (ad esempio, ma non solo, due componenti della velocità):

$$\overline{\lambda u + \mu v} = \lambda \bar{u} + \mu \bar{v}$$

### 5.2.2. Densità di probabilità

Sempre a partire dall'insieme di dati ottenuto misurando la grandezza  $u$  al tempo  $t$ , nella posizione  $\mathbf{x}$ , in  $N \rightarrow \infty$  realizzazioni di un esperimento, introduciamo innanzitutto la *funzione di ripartizione*:

$$F(u) = \frac{N_u}{N}$$

dove  $N_u$  è il numero di realizzazioni per le quali  $u^{(k)} < u$ ; con  $u^{(k)}$ , al solito, il valore misurato nella  $k$ -esima realizzazione. Data la sua definizione, la funzione di ripartizione è monotona crescente. La funzione *densità di probabilità* è la data dalla derivata rispetto ad  $u$  della funzione di ripartizione:

$$p(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial u}$$

ed è tale che il valore  $p(u)du$  rappresenta la probabilità che la velocità assuma, in una realizzazione, un valore compreso tra  $u$  ed  $u+du$ . Per questo motivo, essa può anche essere espressa come:

$$p(u) = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{N_{u,\Delta u}}{N \Delta u}$$

essendo  $N$  il numero di prove effettuate ed  $N_{u,\Delta u}$  il numero di realizzazioni in cui la velocità assume un valore compreso tra  $u$  e  $u+\Delta u$ .

La media di insieme può essere espressa per il tramite della densità di probabilità come:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u p(u) du$$

### 5.2.3. Momenti di ordine superiore

Le grandezze che caratterizzano il moto turbolento, ed in particolare le velocità, possono essere decomposte in valore medio ( $\bar{u}$ ) e uno scostamento dal valor medio ( $u'$ ), detto *parte fluttuante*, secondo quella che viene chiamata *decomposizione di Reynolds*:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$

Per ciascuna componente,  $u_i$ , può essere valutato il momento centrale del secondo ordine (*scarto quadratico medio*):

$$\sigma_i^2 = \overline{u_i'^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \bar{u}_i)^2$$

avendo indicato con  $\sigma_i$  la *deviazione standard*, ovvero la radice quadrata dello scarto quadratico medio, la quale rappresenta una misura della tipica fluttuazione di velocità attorno al valor medio. Questa quantità può anche essere espressa per mezzo della densità di probabilità come:

$$\sigma_i^2 = \overline{u_i'^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i'^2 p(u_i') du_i' \quad (42)$$

Per ciò che riguarda l'energia cinetica per unità di massa del fluido:

$$E_C = \sum_{i=1}^3 \frac{\overline{u_i'^2}}{2} = E + \varepsilon$$

essa può essere decomposta nella somma dell'energia cinetica del moto medio, E, e di quella del moto turbolento,  $\varepsilon$ . Utilizzando la decomposizione di Reynolds:

$$E_C = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \overline{(u_i + u_i')^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \overline{(u_i^2 + u_i'^2 + 2u_i u_i')}$$

Usando le proprietà di linearità dell'operatore media, è possibile portare fuori la quantità già mediata dalla media ottenendo:

$$E_C = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (\overline{u_i^2} + \overline{u_i'^2} + 2\overline{u_i u_i'})$$

L'ultimo termine è nullo in quanto la media di una parte fluttuante è nulla (46):  $\overline{u_i' u_i'} = 0$ . Inoltre, osservando che la media di una quantità già mediata rimane uguale a sé stessa:  $\overline{\overline{a}} = \overline{a}$  e, nell'equazione precedente risulta quindi:  $\overline{u_i^2} = \overline{u_i'^2}$ , possiamo infine esprimere i due termini rimanenti come l'energia cinetica del moto medio:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{u_i'^2}$$

e la media dell'energia cinetica del moto turbolento o energia cinetica turbolenta:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$$

In conclusione, quindi, avremo:

$$E_C = E + \varepsilon \quad (43)$$

Considerati i momenti del terzo e quarto ordine:

$$\overline{u_i'^3} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \overline{u_i})^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i'^3 p(u_i') du_i'; \quad \overline{u_i'^4} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \overline{u_i})^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i'^4 p(u_i') du_i'$$

è possibile definire i fattori di forma per la distribuzione di probabilità:

– dissimmetria (*skewness*):

$$S_i = \frac{\overline{u_i'^3}}{\sigma_i^3}$$

(nullo nel caso di distribuzione simmetrica);

– appiattimento (*kurtosis*):

$$K_i = \frac{\overline{u_i'^4}}{\sigma_i^4} - 3$$

che dà una misura della presenza di eventi rari ma intensi e si sottrae 3 perché  $K$  sia nulla in caso di distribuzione gaussiana.

#### 5.2.4. Correlazioni

Siano  $u'_i$  e  $u'_j$  le parti fluttuanti delle componenti della velocità in due punti  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  valutate in due istanti  $t_1$  e  $t_2$ ; la *correlazione spazio-temporale* è definita dalla relazione:

$$R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) = \overline{u'_i(\mathbf{x}_1, t_1)u'_j(\mathbf{x}_2, t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_i(\mathbf{x}_1, t_1) u'_j(\mathbf{x}_2, t_2) p(u'_i u'_j) du'_i du'_j$$

essendo  $p(u'_i, u'_j)$  la funzione densità di probabilità congiunta; posto:

$$t_1 = t; t_2 = t + \tau; \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}; \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{r}$$

In forma più sintetica, si indica la correlazione spazio-temporale, della componente  $i$ -esima della velocità nel punto  $\mathbf{x}$  all'istante  $t$ , con la componente  $j$ -esima della velocità nel punto a distanza  $\mathbf{r}$ , e dopo un intervallo di tempo  $\tau$  con:

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) = R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2)$$

$R_{ij}$  risulta un tensore del secondo ordine simmetrico.

In modo analogo, è possibile definire correlazioni spazio-temporali tra due grandezze scalari (ad esempio pressione e temperatura, la correlazione in questo caso è uno scalare) o tra grandezze scalari e velocità (la correlazione risulta un vettore).

Le correlazioni spazio-temporali rappresentano la descrizione statistica delle relazioni che legano i fenomeni che accadono in due diversi punti ed in due diversi istanti. In linea di massima, valori assoluti più alti del coefficiente di correlazione indicano una relazione di causalità più stretta, mentre valori prossimi allo zero indicano fenomeni che non sono legati tra loro. Il valore che assumono le  $R_{ij}$  dipende però, a parità di causalità che lega i fenomeni, dall'intensità delle fluttuazioni che, nel caso delle velocità, corrisponde all'energia cinetica turbolenta. Per superare questo problema si definisce il *coefficiente di correlazione*:

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) = \frac{R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau)}{\sigma_i(\mathbf{x}, t) \cdot \sigma_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau)}$$

il quale, essendo valida la disuguaglianza di Schwartz:

$$\overline{u'_i(\mathbf{x}, t)u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau)} \leq \sqrt{\overline{u_i'^2(\mathbf{x}, t)}} \sqrt{\overline{u_j'^2(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau)}}$$

risulta:

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$

Il coefficiente di correlazione, normalizzato rispetto alle deviazioni standard, non risente quindi di questo effetto. Sono introdotte le seguenti definizioni:

- *correlazioni spaziali*  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, 0)$ , quando le grandezze sono considerate allo stesso istante ( $\tau = 0$ );
- *correlazioni temporali*  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t, \tau)$ , quando le grandezze sono considerate nello stesso punto ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ );

Dalle proprietà delle correlazione si ricavano caratteristiche fondamentali della turbolenza; si ha:

- turbolenza *statisticamente stazionaria* quando la funzione densità di probabilità e quindi anche la correlazione non dipende dal tempo  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau)$ ;
- turbolenza *statisticamente omogenea* quando la funzione densità di probabilità e quindi la correlazione non dipende dal punto  $R_{ij}(\mathbf{r}, t, \tau)$ ;
- turbolenza *isotropa* quando le funzioni di correlazione spaziali non dipendono dalla direzione e quindi solo dal modulo di  $\mathbf{r}$ ,  $R_{ij}(\mathbf{x}, |\mathbf{r}|, t, 0)$ .

Se non si fornisce energia dall'esterno ad un flusso turbolento, questo sarebbe destinato a ridurre la propria energia cinetica a causa della viscosità che la trasforma in calore e quindi il fenomeno non potrebbe ritenersi stazionario. Per introdurre energia nel sistema fluidodinamico è necessario produrre delle disomogeneità spaziali (gradienti di velocità) e quindi il flusso non potrebbe più ritenersi né omogeneo né isotropo. Pur non potendosi realizzare una condizione di turbolenza stazionaria, omogenea ed isotropa, ad essa si fa idealmente riferimento per studiare in forma più semplice i meccanismi, comunque complessi, che caratterizzano l'evoluzione di un flusso turbolento.

A tale tipo di turbolenza si farà in genere riferimento, pertanto, le correlazioni spazio-temporali sono funzioni di  $\tau$  e di  $|\mathbf{r}|$ :  $R_{ij}(\mathbf{r}, \tau)$ . Risulta in queste condizioni che:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = R_{ij}(\mathbf{r}, -\tau);$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = R_{ij}(-\mathbf{r}, \tau).$$

Quando le due grandezze che entrano nella definizione di correlazione coincidono, si parla di *autocorrelazione* (quando si tratta della stessa componente della velocità in forma più sintetica si caratterizzerà la autocorrelazione con un solo pedice:  $R_{ii}=R_i$ ). In base alle relazioni precedenti risulta che le autocorrelazioni sono funzioni simmetriche rispetto all'origine degli assi.

### 5.2.5. Spettri di potenza

La descrizione statistica della turbolenza, oltre che nel dominio del tempo e dello spazio attraverso la funzione di correlazione, può avvenire nel dominio della frequenza e dei numeri d'onda attraverso le densità spettrali di potenza che sono legate alle funzioni di correlazione attraverso il teorema di Wiener-Khintchine. Facendo riferimento alla turbolenza stazionaria ed isotropa sono definite le seguenti funzioni ottenute mediante operazioni di trasformata di Fourier della funzione di correlazione:

- densità spettrale di potenza nel dominio dei numeri d'onda:

$$B_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

- densità spettrale di potenza nel dominio della frequenza:

$$P_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- densità spettrale di potenza nel dominio dei numeri d'onda e delle frequenze:

$$\begin{aligned} E_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ij}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

Le funzioni  $B_{ij}$  e  $P_{ij}$  sono funzioni ibride in quanto conservano il duplice significato di correlazione e di spettro. È possibile passare da una descrizione spettrale ad una tramite correlazione mediante operazioni di antitrasformazione di Fourier.

### 5.3. Le scale della turbolenza

L'autocorrelazione temporale ci dà un'indicazione di quanto ciò che succede in un dato punto ed in un dato istante influenzi ciò che avviene in quel punto dopo un intervallo di tempo  $\tau$ . Questa informazione può anche essere interpretata come una misura della memoria che il fenomeno ad un certo istante ha di quanto è accaduto un intervallo di tempo  $\tau$  prima. L'autocorrelazione temporale dà questa indicazione per ogni diverso intervallo di tempo  $\tau$ , a volte è però più utile avere una indicazione globale che, con un solo numero, dia una misura complessiva dell'ordine di grandezza della memoria che il fenomeno ha di sé stesso; a tal fine si definiscono le cosiddette scale temporali della turbolenza. Naturalmente è possibile ripetere i ragionamenti sopra esposti anche per le correlazioni spaziali e definire delle analoghe scale spaziali.

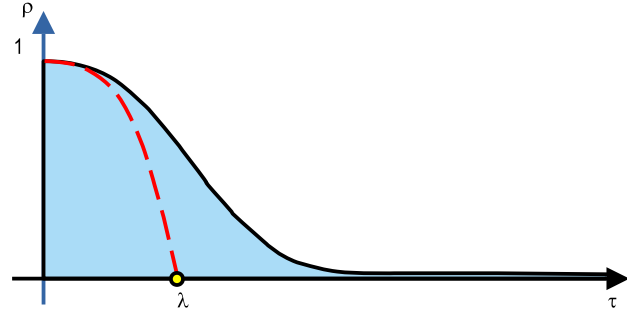


FIGURA 20

#### 5.3.1. Scale integrali

La scala integrale che, come detto in precedenza, può essere sia temporale sia spaziale fornisce una valutazione della memoria che il fenomeno ha di sé stesso tenendo conto di tutte le strutture che costituiscono la turbolenza, sia le più piccole, alle quali corrispondono  $\tau$  piccoli, sia le più grandi, che incidono su intervalli di tempo maggiori. In Figura 20 è riportato un tipico andamento del coefficiente di autocorrelazione temporale per una componente della velocità. In generale partendo dal valore unitario ( $\rho(0) = 1$  per definizione), il coefficiente di autocorrelazione tende gradualmente a zero per  $\tau \rightarrow \infty$  poiché due eventi separati da un tempo molto grande tendono ad essere statisticamente indipendenti tra loro.

L'area compresa tra l'autocorrelazione e l'asse delle ascisse è una misura di quanto a lungo il fenomeno rimane correlato; partendo dalle autocorrelazioni temporali, è dunque definita *scala integrale temporale*:

$$T_i = \int_0^{+\infty} \rho_i(0, \tau) d\tau$$

In modo schematico si potrebbe dire che il fenomeno è correlato con sé stesso per tempi inferiori a  $T_i$ , ed è scorrelato per tempi superiori.

#### 5.3.2. Scala di Taylor

Se si vuole dare una descrizione sintetica del comportamento delle strutture più piccole, ovvero quelle caratterizzate da scale sia spaziali sia temporali piccole, si fa ricorso alla scala di Taylor, ricavata a partire dalla forma della funzione di autocorrelazione nell'origine: si approssima la curva nell'intorno dell'origine con una curva del secondo ordine: una parabola, detta *osculatrice*, che ha in comune con la curva di autocorrelazione il valore della funzione, la derivata prima e la derivata seconda, nell'origine. Quindi la parabola ha in comune, nell'origine, non solo il valore della funzione, ma anche la tangente e la curvatura. La scala di Taylor è il valore di  $\tau$  per il quale questa parabola osculatrice intercetta l'asse delle ascisse.

Per calcolare l'equazione della parabola sviluppiamo le fluttuazioni di velocità in serie di Taylor  $u'_i$ , intorno al tempo  $t$  ( $\tau = 0$ ), e tronchiamo al *secondo ordine*:

$$u'_i(\mathbf{x}, t + \tau) = u'_i(\mathbf{x}, t) + u'_{i,\tau} \tau + u'_{i,\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Poiché derivare rispetto a  $t$  o rispetto a  $\tau$  è equivalente,  $u'_{i,\tau} = u'_{i,t}$  risulta:

$$R_i(0, \tau) = \overline{u'_i(\mathbf{x}, t) u'_i(\mathbf{x}, t + \tau)} = \overline{u'^2_i} + \overline{u'_i u'_{i,t}} \tau + \left( \overline{u'_i u'_{i,tt}} \right) \frac{\tau^2}{2} \dots \quad (44)$$

se supponiamo il fenomeno statisticamente stazionario, tutte le derivate temporali delle quantità medie si

annullano. Quindi, usando la regola di derivazione del quadrato di una funzione otteniamo un'espressione per il termine I della (44):

$$\overline{(u_i'^2)}_{,t} = 2 \overline{(u_i' u_{i,t}')}_{,t} \rightarrow \overline{u_i' u_{i,t}'} = \frac{1}{2} \overline{(u_i'^2)}_{,t} \stackrel{\text{stazionario}}{=} 0$$

che a causa della stazionarietà risulta nullo; analogamente, usando due volte la derivata del prodotto otteniamo una nuova espressione per il termine II della (44):

$$\overline{(u_i')_{,tt}} \stackrel{\text{stazionario}}{=} 0 = 2 \overline{(u_i' u_{i,t}')_{,t}} = 2 \overline{u_i' u_{i,tt}'} + 2 \overline{(u_{i,t}')^2} = 0 \rightarrow \overline{u_i' u_{i,tt}'} = -\overline{(u_{i,t}')^2}$$

Sostituendo le precedenti nella (44) si ottiene:

$$R_i(0, \tau) = \overline{u_i'^2} + 0 - \frac{\tau^2}{2} \overline{(u_{i,t}')^2} + \dots$$

dividendo per la varianza e osservando che lo sviluppo di Taylor è troncato al secondo ordine, si trova l'equazione della *parabola osculatrice* al coefficiente di autocorrelazione,  $\rho_i$ , nell'origine:

$$\rho_i(0, \tau) = 1 - \frac{\tau^2 \overline{(u_{i,t}')^2}}{2 \overline{u_i'^2}}$$

la *scala di Taylor*,  $\lambda_i$  è il valore di  $\tau$  per il quale la parabola si annulla:

$$1 - \frac{\tau \lambda_i^2 \overline{(u_{i,t}')^2}}{2 \overline{u_i'^2}} = 0 \rightarrow \lambda_i = 2 \frac{\overline{u_i'^2}}{\overline{(u_{i,t}')^2}}$$

In generale la scala di Taylor è di un ordine di grandezza inferiore alla scala integrale e spesso viene indicata con il nome di *microscala della turbolenza*.

## 5.4. Equazioni per le quantità medie

È già stato messo in evidenza come non abbia senso fisico cercare di effettuare delle previsioni sull'evoluzione delle quantità istantanee che caratterizzano un flusso turbolento, o quanto accade nella singola realizzazione di un esperimento, a causa della sensibilità alle condizioni iniziali. Ciò nondimeno è possibile scrivere delle equazioni che regolano l'evoluzione delle quantità medie le quali, essendo basate sull'insieme di tutte le possibili condizioni iniziali, non risentono più di tale sensibilità: ciò implica che per le quantità medie è possibile fare delle previsioni significative. Spesso, inoltre, le quantità medie delle grandezze fisiche hanno più interesse ingegneristico che i valori nella singola realizzazione di un esperimento.

Per ottenere queste equazioni consideriamo le equazioni che regolano il moto, applichiamo la media e, dove necessario applichiamo la decomposizione di Reynolds per tutte le grandezze dipendenti.

### 5.4.1. Decomposizione di Reynolds

Prima di procedere allo studio delle singole equazioni, ricordiamo che la decomposizione di Reynolds prevede che una generica grandezza  $A$ , misurata nella singola realizzazione di un esperimento, sia decomposta in una parte media ed uno scostamento rispetto alla media, detto parte fluttuante:

$$A = \bar{A} + A'$$

applicando la media al primo e al secondo membro si ha:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} + \overline{A'} = \overline{\overline{A}} + \overline{A'}$$

Poiché l'operatore di media d'insieme è un operatore lineare, abbiamo potuto distribuirlo sui singoli termini della somma. Se osserviamo che  $\overline{A}$  è uguale in tutte le realizzazioni dell'esperimento, possiamo concludere che applicargli ulteriormente l'operatore di media non ne cambia il valore:  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ . Quindi l'equazione precedente diventa:  $\overline{A} = \overline{A} + \overline{A'}$  dalla quale si ricava banalmente:

$$\overline{A'} = 0 \quad (45)$$

ovvero, *la media di una parte fluttuante è sempre nulla*. Si noti, inoltre, che nei ragionamenti che seguiranno, useremo frequentemente le proprietà della media come operatore lineare, le quali permettono ad esempio di scambiare l'ordine di applicazione con altri operatori lineari. Per esempio, come già detto, avremo:

$$\overline{(A_i)} = (\overline{A})_i$$

Consideriamo inoltre un'espressione del tipo:  $\overline{A' \cdot \overline{B}}$ . Poiché il valore di  $\overline{B}$  è uguale in tutte le realizzazioni dell'esperimento (è già un valor medio), può essere portato fuori dall'operatore di media, ottenendo:  $\overline{A'} \cdot \overline{B}$ . D'altra parte la media di una parte fluttuante è nulla, quindi l'intero prodotto si annulla. Avremo quindi in sintesi che:

$$\overline{A' \cdot \overline{B}} = \overline{A'} \cdot \overline{B} = 0 \quad (46)$$

#### 5.4.2. Equazione di bilancio della massa

Nel caso di fluido incomprimibile l'equazione di bilancio della massa è:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{j,j} = 0 \quad (47)$$

Applicando l'operatore di media ad entrambi i membri dell'equazione e tenendo conto che la divergenza è un operatore lineare e si può scambiare con la media si ottiene:

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} = \overline{0} \rightarrow \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = \overline{u}_{j,j} = 0 \quad (48)$$

che rappresenta l'equazione di continuità per la parte media.

#### 5.4.3. Equazione di Reynolds

Consideriamo ora l'equazione di Navier-Stokes sotto l'ipotesi di Boussinesq (31) e applichiamo l'operatore di media ad entrambi i membri:

$$\overline{u_{i,t} + u_j u_{i,j}} = -\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} g z_{,i} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{\rho}_{,i} + \nu \overline{u_{i,jj}}$$

Ricordando che la media della somma è uguale alla somma delle medie dei vari termini e tenendo conto della linearità dell'operatore di media l'equazione diventa:

$$\overline{u}_{i,t} + \overline{u_j u_{i,j}} = -\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} g z_{,i} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{\rho}_{,i} + \nu \overline{u}_{i,jj} \quad (49)$$

Nella quale osserviamo che tutti i termini, tranne il secondo a primo membro (in rosso), quello non lineare, sono già espressi in termini di quantità medie e quindi non hanno bisogno di ulteriori rimaneggiamenti. Per esprimere il termine non lineare in funzione delle quantità medie il termine usiamo la decomposizione di Reynolds e sviluppiamo il prodotto:

$$\overline{u_j u_{i,j}} = \overline{(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_{i,j} + u'_{i,j})} = \overline{\bar{u}_j \bar{u}_{i,j}} + \overline{\bar{u}_j u'_{i,j}} + \overline{u'_j \bar{u}_{i,j}} + \overline{u'_j u'_{i,j}}$$

le quantità medie nei due termini intermedi, possono uscire dalla media:

$$\overline{u_j u_{i,j}} = \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \overline{u'_j \bar{u}_{i,j}} + \overline{\bar{u}_j u'_{i,j}} + \overline{u'_j u'_{i,j}} = \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \overline{u'_j u'_{i,j}} \quad (50)$$

il secondo termine (verde) a secondo membro può essere riscritto usando la regola di derivazione del prodotto:

$$(u'_i u'_j)_{,j} = u'_{i,j} u'_j + u'_i u'_{j,j} = u'_j u'_{i,j}$$

il termine rosso è nullo. Per dimostrarlo sottraiamo all'equazione di continuità sotto l'ipotesi di Boussinesq (19) quella per la parte media (48), dopo aver decomposto la prima secondo Reynolds:

$$0 = u_{j,j} - \bar{u}_{j,j} = (\bar{u}_{j,j} + u'_{j,j}) - \bar{u}_{j,j} = u'_{j,j} = 0$$

come volevasi dimostrare. Quindi, il termine in verde della precedente si riduce a:  $\overline{u'_j u'_{i,j}} = (\overline{u'_i u'_j})_{,j}$  e il termine non lineare dell'equazione di Navier-Stokes (49) assume la forma che ci interessa:

$$\overline{u_j u_{i,j}} = \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + (\overline{u'_i u'_j})_{,j}$$

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes questo risultato si ottiene l'equazione di Reynolds sotto l'ipotesi di Boussinesq:

$$\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\frac{\bar{p}}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}_{,i} + \nu \bar{u}_{i,jj} - (\overline{u'_i u'_j})_{,j} \quad (51)$$

Utilizzando la decomposizione di Reynolds si rinuncia a prevedere cosa accade nella singola realizzazione di un esperimento per ottenere delle equazioni prognostiche per le quantità medie le quali, per loro natura, non risentono delle condizioni iniziali; in questo modo, tuttavia, si hanno a disposizione solo 4 equazioni (3 componenti dell'equazione vettoriale di Reynolds + 1 di continuità), oltre a quella per le variazioni di densità:

$$\begin{cases} \bar{u}_{j,j} = 0 & 1 \text{ equazione} \\ \bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\frac{\bar{p}}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}_{,i} + \nu \bar{u}_{i,jj} - (\overline{u'_i u'_j})_{,j} & 3 \text{ equazioni} \end{cases}$$

mentre le incognite sono ora 10: 1 per la pressione media, 3 per la velocità media, e 6 per le correlazioni tra velocità. Il problema così posto non è, perciò, determinato, e sarà necessario individuare altre 6 equazioni che permettano di chiudere il sistema.

---

*Ne è valsa la pena? Sì, perché anche se dovremo fare ricorso ad equazioni di chiusura di natura empirica, le equazioni così poste permettono di ottenere una stima ragionevole delle quantità medie, che ha senso cercare di prevedere. Il sistema di partenza (costituito dalle equazioni di Navier-Stokes e continuità da cui siamo partiti) è chiuso, ma la sua soluzione non ci aiuterebbe a prevedere i fenomeni a causa della sensibilità alle condizioni iniziali.*

---

#### 5.4.4. Tensore degli sforzi di Reynolds

L'ultimo termine vede comparire il cosiddetto *tensore degli sforzi di Reynolds*  $\underline{\tau}_R$  definito come:

$$\tau_{Rij} = -\overline{\rho u'_i u'_j}$$

Usando a ritroso le equazioni costitutive per un fluido debolmente comprimibile alle quali applichiamo la media,

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + 2\mu\bar{e} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$$

l'equazione (51) diventa:

$$\rho\bar{u}_{i,t} + \rho\bar{u}_j\bar{u}_{i,j} = -\frac{\bar{p}}{\rho_0}gz_{,i} + (\bar{\tau}_{ij} + \tau_{Rij})_{,j} \quad (52)$$

Il ruolo svolto dal tensore di Reynolds è formalmente identico a quello svolto dal tensore degli sforzi viscosi, anche se esso non dipende soltanto dalle caratteristiche del fluido come quest'ultimo, ma da quelle della turbolenza e, in ultima analisi, dal flusso stesso. In ogni caso, grazie a questa analogia formale, l'effetto della turbolenza viene rappresentato spesso come quello di uno stato tensionale aggiuntivo (i cosiddetti *sforzi turbolenti*) a quello effettivamente esistente ed il tensore sopra definito viene detto tensore degli sforzi turbolenti. In questa interpretazione, l'equazione per il moto diventa formalmente identica a quella per il moto istantaneo introducendo uno sforzo totale pari alla somma degli sforzi viscosi e quelli turbolenti:  $\underline{\underline{\tau}}_T = \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_R$ .

## 5.5. Equazioni di chiusura

Le 6 equazioni mancanti, necessarie per poter risolvere il sistema di equazioni per le quantità medie sono dette *equazioni di chiusura*, e si dimostra che non possono essere ricavate a partire dai principi della meccanica dei fluidi. Sarà quindi necessario ricorrere ad equazioni semi empiriche. Ci sono diversi tipi di equazioni di chiusura, di diversa complessità e grado di approssimazione. Data la loro origine empirica però, nessuna di esse ha carattere generale, ma vanno adattate di volta in volta allo specifico tipo di flusso che si sta studiando e poi verificate sperimentalmente.

Una delle chiusure più semplici e più diffuse è quella basata sulla cosiddetta *ipotesi di Boussinesq*. L'ipotesi si basa sul fatto che, se gli effetti della turbolenza possono essere interpretati come sforzi aggiuntivi, essi possono essere immaginati derivare da una viscosità aggiuntiva, la *viscosità turbolenta*. Supponiamo di avere due strati di fluido separati da una superficie piana che si muovono con differenti velocità medie parallele alla superficie di separazione. In presenza di turbolenza le particelle fluide vengono scambiate tra i due strati, cosicché alcune particelle dello strato più lento vanno a finire in quello più veloce e viceversa, provocando un rallentamento dello strato più veloce ed un'accelerazione dello strato più lento. In definitiva, appare che lo strato più veloce trascini il più lento e, al contempo, quello più lento freni quello più veloce come se alla superficie di separazione si avesse uno sforzo di taglio direttamente proporzionale alla differenza di velocità tra i due strati ed inversamente proporzionale alla distanza in cui tale differenza si manifesta.

Seguendo questo ragionamento, in analogia con le equazioni costitutive per gli sforzi viscosi, Boussinesq ha proposto di assumere che il tensore di Reynolds sia legato alla parte simmetrica del gradiente di velocità media attraverso un *coefficiente di viscosità turbolenta*,  $\mu_T$ :

$$\tau_{Rij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_T\bar{e}_{ij} = \mu_T(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (53)$$

Una sostanziale differenza tra sforzi viscosi e quelli turbolenti è legata al fatto che mentre  $\mu$  è una caratteristica del fluido,  $\mu_T$  è una caratteristica del flusso<sup>15</sup>.

Con questa ipotesi, l'equazione di Reynolds per la parte media si può riscrivere:

<sup>15</sup> Si consideri infatti che, se il flusso è laminare  $\mu_T = 0$

$$\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} z_{,i} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} + (v + v_T) \bar{u}_{i,jj}$$

avendo definito  $v_T = \mu_T / \rho$ . L'ipotesi di Boussinesq, tuttora ampiamente utilizzata, non risulta fisicamente fondata:

- lo schema proposto vale solo per alcuni tipi di turbolenza, per esempio quella generata in prossimità di una parete lambita da un fluido, ma non in altri, come nel caso della convezione turbolenta;
- le direzioni principali del tensore di Reynolds non coincidono con quelle del tensore velocità di deformazione;
- misure sperimentali evidenziano casi nei quali lo sforzo di taglio turbolento è massimo lì dove non si hanno gradienti di velocità.

Infine questa ipotesi è incongrua da un punto di vista energetico: infatti, ponendo  $i = j$  nell'espressione (53), si ha:

$$\frac{\tau_{R11}}{\rho} = -\overline{u_1'^2} = 2v_T \bar{u}_{1,1}; \quad \frac{\tau_{R22}}{\rho} = -\overline{u_2'^2} = 2v_T \bar{u}_{2,2}; \quad \frac{\tau_{R33}}{\rho} = -\overline{u_3'^2} = 2v_T \bar{u}_{3,3}$$

quindi, l'energia cinetica associata alle fluttuazioni turbolente risulta:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} \right) = 2v_T (\bar{u}_{1,1} + \bar{u}_{2,2} + \bar{u}_{3,3}) = 2v_T \bar{u}_{j,j} = 0,$$

la quale risulta nulla poiché nell'ultimo membro compare l'equazione di bilancio della massa in termini di parte media (48). Si avrebbe quindi un paradosso, ovvero un moto turbolento con energia cinetica della turbolenza nulla.

## 5.6. Equazioni globali per i flussi turbolenti

### 5.6.1. Conservazione della massa

Si vuole trovare una forma dell'equazione globale di conservazione della massa che permetta di fare previsioni per le quantità medie. Consideriamo un fluido barotropico ed ipotizziamo che, essendo esso debolmente comprimibile, la densità sia funzione della sola pressione media:

$$\rho = \rho(\bar{p}) \quad (54)$$

o, che è lo stesso, che le fluttuazioni di densità dovute alle fluttuazioni di pressione siano trascurabili. Per scrivere l'equazione cercata consideriamo l'equazione globale in termini delle quantità istantanee, decomponiamo secondo Reynolds e mediamo l'espressione così ottenuta.

Il principio di conservazione della massa (15), operando la decomposizione di Reynolds e mediando si scrive:

$$\overline{\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV} + \overline{\int_S \rho (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} dS} = 0$$

la quale, ricordando che la media dei termini fluttuanti è nulla e che  $\bar{\rho} = \rho$  per l'ipotesi (54), diventa:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

la quale, in analogia con la sua versione per le quantità istantanee può essere scritta in forma analoga alla (16):

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial t} + \bar{\phi}_m = 0 \quad (55)$$

Questa è la forma dell'equazione globale di conservazione della massa scritta per i flussi turbolenti.

### 5.6.2. Bilancio della quantità di moto

Seguiamo, per il bilancio della quantità di moto, la stessa procedura descritta nel paragrafo precedente. Consideriamo l'equazione globale (20), mediamola

$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{\Pi}} + \bar{\mathbf{G}}$$

e consideriamo i termini uno ad uno.

La variazione della quantità di moto media contenuta nel volume di controllo è:

$$\bar{\mathbf{I}} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') dV} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{u}} dV = \mathbf{I}_T$$

che ha la stessa forma di quella scritta per il moto istantaneo anche se vi compare la velocità media.

Il flusso medio di quantità di moto attraverso la superficie del volume di controllo è:

$$\bar{\mathbf{M}} = \overline{\int_{S_c} \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{ndS}} = \int_{S_c} (\rho \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_c} \rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} \cdot \mathbf{ndS}$$

ed è quindi determinato da due componenti: un flusso dovuto al moto medio, che corrisponde al primo termine dell'ultimo membro, ed un flusso turbolento, che corrisponde al secondo termine. Indichiamo con

$$\mathbf{M}_T = \int_{S_c} (\rho \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{ndS}$$

il flusso dovuto al moto medio, e con:

$$\mathbf{\Pi}_R = \int_{S_c} -\rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} \cdot \mathbf{ndS} = \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}}_R \cdot \mathbf{ndS}$$

il flusso dovuto alle fluttuazioni turbolente, che può essere letto come *risultante degli sforzi turbolenti* sulla superficie del volume di controllo. Si ha dunque:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_T - \mathbf{\Pi}_R$$

Le forze di superficie sono:

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \overline{\int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}') \cdot \mathbf{ndS}} = \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{ndS}$$

e raggruppandole con la risultante degli sforzi turbolenti possiamo definire una *risultante degli sforzi totali*:

$$\mathbf{\Pi}_T = \bar{\mathbf{\Pi}} + \mathbf{\Pi}_R = \int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_R) \cdot \mathbf{ndS}$$

Le forze di volume sono:

$$\bar{\mathbf{G}} = \overline{\int_{V_c} \rho(\bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}') dV} = \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{f}} dV = \mathbf{G}_T$$

Riunendo i risultati sin qui raggiunti nell'equazione globale ne otteniamo la forma per i moti turbolenti:

$$\mathbf{I}_T + \mathbf{M}_T = \mathbf{\Pi}_T + \mathbf{G}_T \quad (56)$$

## 6. IL BILANCIO DI ENERGIA CINETICA

### 6.1. Energia cinetica del moto medio

Per comprendere il ruolo delle forze di galleggiamento nella generazione o nello smorzamento della turbolenza è necessario, come descritto in precedenza, far riferimento al bilancio di energia cinetica turbolenta. Prima di affrontare questo argomento però è utile scrivere l'equazione di bilancio dell'energia cinetica del moto medio, la quale ne è il naturale complemento, così come evidenziato dalla (43).

Per ricavarla si consideri inizialmente l'equazione di Reynolds (51). Raccogliendo tutti i termini relativi agli sforzi sia di pressione, sia viscosi sia turbolenti nel termine:

$$T_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + 2\mu\bar{e}_{ij} - \rho_0\overline{u'_i u'_j} \quad (57)$$

che può essere considerato una sorta di sforzo totale modificato per la presenza di  $\bar{p}$  invece di  $p$ , e sostituendo otteniamo:

$$\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j\bar{u}_{i,j} = -\frac{\bar{p}}{\rho_0}gz_{,i} + \frac{T_{ij,j}}{\rho_0} \quad (58)$$

che ha la stessa struttura dell'equazione di Cauchy. Moltiplichiamo ora l'equazione per  $\bar{u}_i$  e facciamo le somme anche sull'indice  $i$  per sommare l'energia relativa alle tre componenti della velocità:

$$\sum_{i,j} \bar{u}_i\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_{i,j} = -\bar{u}_i\frac{\bar{p}}{\rho_0}gz_{,i} + \bar{u}_i\frac{T_{ij,j}}{\rho_0}$$

i primi due termini possono essere riscritti usando a ritroso la regola di derivazione del quadrato di una funzione:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_i^2)_{,t} &= 2\bar{u}_i\bar{u}_{i,t} \rightarrow \bar{u}_i\bar{u}_{i,t} = \left(\frac{\bar{u}_i^2}{2}\right)_{,t} = E_{,t} \\ \bar{u}_i\bar{u}_{i,j} &= \left(\frac{\bar{u}_i^2}{2}\right)_{,j} = E_{,j} \end{aligned}$$

ottenendo:

$$E_{,t} + \bar{u}_jE_{,j} = -\bar{u}_i\frac{\bar{p}}{\rho_0}gz_{,i} + \bar{u}_i\frac{T_{ij,j}}{\rho_0} \quad (59)$$

invece il secondo termine a primo membro può essere scritto usando un ragionamento analogo a quello volto per ottenere gli sforzi di Reynolds, usando a ritroso la regola di derivazione del prodotto:

$$\bar{u}_jE_{,j} = (\bar{u}_jE)_{,j} - \underbrace{\bar{u}_{j,j}}_{\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}=0} E = (\bar{u}_jE)_{,j}$$

L'ultimo termine a secondo membro si annulla in virtù dell'equazione di continuità per la parte media (48). Con ragionamento analogo possiamo trattare l'ultimo termine della (59):

$$\sum_{i,j} \bar{u}_i\frac{T_{ij,j}}{\rho_0} = \left(\bar{u}_i\frac{T_{ij}}{\rho_0}\right)_{,j} - \bar{u}_{i,j}\frac{T_{ij}}{\rho_0} = \left(\bar{u}_i\frac{T_{ij}}{\rho_0}\right)_{,j} - \bar{e}_{ij}\frac{T_{ij}}{\rho_0} - \underbrace{\bar{r}_{ij}}_{\text{II}}\frac{T_{ij}}{\rho_0} \quad (60)$$

Avendo osservato che nel termine I compare la ij-esima componente del tensore gradiente della velocità media trasposto (4), che può essere scomposto nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica  $\bar{u}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{r}_{ij}$ . Il termine II è nullo; dimostriamolo ricordando che:

- $\bar{r}$  è antisimmetrico per definizione;
- $\bar{T}$ , come è facile verificare dalla sua definizione, è un tensore simmetrico;
- è possibile scambiare nome agli indici (usare j al posto di i e viceversa) senza che il risultato cambi;
- è possibile trasporre l'equazione poiché il risultato è uno scalare.

$$\sum_{i,j} \bar{r}_{ij} T_{ij} \stackrel{\substack{= \\ \text{scambiando} \\ \text{il nome} \\ \text{agli indici}}}{=} \sum_{j,i} \bar{r}_{ji} T_{ji} \stackrel{\substack{= \\ \text{trasponendo} \\ \bar{r}^t = -\bar{r} \\ \bar{T}^t = \bar{T}}}{=} \sum_{j,i} (-\bar{r}_{ij}) T_{ij} \stackrel{\substack{= \\ \text{invertendo} \\ \text{l'ordine delle} \\ \text{sommatorie}}}{=} - \sum_{i,j} \bar{r}_{ij} T_{ij} \Rightarrow \sum_{i,j} \bar{r}_{ij} T_{ij} = 0 \quad (61)$$

Confrontando il primo e l'ultimo membro si deduce che esso deve essere uguale al suo opposto, e quindi sono entrambi nulli, come volevasi dimostrare.

Sostituendo la (60) nella (59) e tenendo conto della nullità del termine II, si ha:

$$E_{,t} + (\bar{u}_j E)_{,j} = -\bar{u}_i \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g z_{,i} + (\bar{u}_i T_{ij})_{,j} - \bar{e}_{ij} \frac{T_{ij}}{\rho_0} \quad (62)$$

che è una prima versione dell'equazione dell'energia cinetica del moto medio.

### 6.1.1. Bilancio su un volume di controllo ed interpretazione fisica

Prima di arrivare alla forma finale dell'equazione, sviluppiamo alcuni ragionamenti che ci permetteranno di capire il significato fisico dei diversi termini dell'equazione appena ottenuta e trarre alcune conclusioni di carattere anche più generale. Per prima cosa integriamo l'equazione su un volume di controllo, quindi arbitrario e fisso nel tempo:

$$\int_{V_c} E_{,t} dV + \int_{V_c} (\bar{u}_j E)_{,j} dV = \int_{V_c} -\bar{u}_i \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g z_{,i} dV + \int_{V_c} (\bar{u}_i \frac{T_{ij}}{\rho_0})_{,j} dV - \int_{V_c} \bar{e}_{ij} \frac{T_{ij}}{\rho_0} dV$$

Nel termine I scambiamo la derivata con l'integrale e ai termini II e III applichiamo il teorema della divergenza (2), con  $a_j = \bar{u}_j E$  e  $a_j = \bar{u}_i T_{ij}$  rispettivamente, per farli diventare integrali di superficie:

$$\left[ \int_{V_c} E dV \right]_{,t} + \int_{S_c} E \bar{u}_j n_j dS = \int_{V_c} -\bar{u}_i \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g z_{,i} dV + \int_{S_c} \bar{u}_i \frac{T_{ij}}{\rho_0} n_j dS - \int_{V_c} \bar{e}_{ij} \frac{T_{ij}}{\rho_0} dV$$

Nel termine I, possiamo riconoscere che compaiono le forze di massa (di galleggiamento) mediate  $\bar{f}_i = (-\bar{\rho})g z_{,i}$  e quindi l'integrando diventa:  $\bar{u}_i \bar{f}_i / \rho_0 = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} / \rho_0$ .

Nel termine II, in analogia a quanto affermato dal teorema di Cauchy (24), possiamo individuare la i-esima componente dello "sforzo totale" sopra definito:  $t_{ni} = T_{ij} n_j$  e l'integrando diventa  $\bar{u}_i t_{ni} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}_n$ .

L'integrando III rappresenta la somma dei prodotti delle componenti dei tensori  $\bar{\mathbf{e}}$  e  $\bar{\mathbf{T}}$ , ovvero il loro prodotto scalare:  $\bar{\mathbf{e}} : \bar{\mathbf{T}}$ .

Sulla scorta di queste considerazioni possiamo riscrivere il nostro bilancio sul volume di controllo usando la notazione vettoriale:

$$\left[ \int_{V_c} E dV \right]_{,t} + \int_{S_c} E (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V_c} \frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f}}{\rho_0} dV + \int_{S_c} \frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}_n}{\rho_0} dS - \int_{V_c} \frac{\bar{\mathbf{e}} : \bar{\mathbf{T}}}{\rho_0} dV$$

e leggere il significato fisico dei termini che vi compaiono:

- 
- I rappresenta la variazione nell'unità di tempo dell'energia cinetica del moto medio contenuta nel volume di controllo;*
- II è il flusso di energia cinetica del moto medio, nell'unità di tempo, attraverso la superficie del volume di controllo;*
- III è il lavoro compiuto dalle forze di galleggiamento nell'unità di tempo: infatti è il prodotto della forza  $\mathbf{f}$  per lo spostamento nell'unità di tempo  $\bar{\mathbf{u}}$ ;*
- IV è il lavoro per unità di tempo delle forze esterne di superficie che agiscono su  $S_c$ ;*
- V è il lavoro di deformazione interna del fluido per unità di tempo: infatti vi compare il prodotto degli sforzi interni  $\underline{\mathbb{T}}$  per la velocità di deformazione  $\bar{\underline{\epsilon}}$  (ovvero la deformazione media per unità di tempo).*
- 

Considerazioni:

1. Ricordando che  $E$  rappresenta l'energia cinetica del moto medio per unità di massa, segue che tutto il bilancio è a intendersi per unità di massa.
2. Immaginando il termine II a secondo membro, l'equazione stabilisce che l'energia cinetica contenuta nel volume di controllo varia (I) perché: esce o entra dalla superficie del volume di controllo trasportata dal moto medio del fluido (II); per il lavoro delle forze esterne di massa, che sono quelle di galleggiamento (III); per il lavoro delle forze esterne di superficie (IV); per il lavoro degli sforzi interni quando il fluido si deforma (V).
3. L'equazione (58) dalla quale siamo partiti ha la stessa struttura dell'equazione di Cauchy (25), che vale per qualsiasi mezzo continuo. Quindi, il bilancio di energia ha la stessa struttura anche se applicato a qualsiasi mezzo continuo.
4. Il significato sopra descritto può essere attribuito ai termini dell'equazione differenziale (62):

$$E_{,t} + (\bar{u}_j E)_{,j} = -\bar{u}_i \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g_{z,i} + \left( \frac{\bar{u}_i T_{ij}}{\rho_0} \right)_{,j} - \frac{\bar{\epsilon}_{ij} T_{ij}}{\rho_0}$$

Si noti, inoltre, che i primi due termini hanno forma simile a quella che si trova in molte equazioni differenziali di bilancio, e può sempre essere loro attribuito il significato di: *I: variazione locale della quantità considerata e, II: trasporto della quantità considerata, o termine avvertivo.*

5. Si osservi anche che i due integrali di superficie sono derivati dai termini II e IV che, in considerazione delle somme sottintese presenti sull'indice  $j$ , *rappresentano due divergenze.* Proprio in virtù di questo fatto è stato possibile applicare il teorema di Gauss e passare da un integrale di volume ad uno di superficie che rappresenta un flusso.

---

*Per questo motivo i termini di un'equazione differenziale scritti come una divergenza di una quantità vettoriale  $\phi: \nabla \cdot (\phi) = (\phi)_{,j}$  si dicono termini in forma di flusso.*

---

### 6.1.2. Equazione di bilancio dell'energia cinetica del moto medio in forma locale

L'equazione (62), pur mettendo in evidenza molti aspetti fondamentali del bilancio di energia, non ne evidenzia uno fondamentale, ovvero la dissipazione causata dalla viscosità. Sappiamo che essa dovrà scaturire dal termine viscoso V, ma dovrà contenere solo gli effetti della viscosità ed essere definita negativa, poiché la trasformazione di energia in calore per effetto della dissipazione viscosa è irreversibile.

Consideriamo quindi il termine V dell'equazione differenziale e sviluppiamolo risostituendo la definizione di  $\underline{\mathbb{T}}$  (57):

$$-\frac{\bar{e}_{ij} T_{ij}}{\rho_0} = -\bar{e}_{ij} \left( -\frac{\bar{p}}{\rho_0} \delta_{ij} + 2\nu \bar{e}_{ij} - \overline{u'_i u'_j} \right) = +\bar{e}_{ii} \frac{\bar{p}}{\rho_0} - 2\nu \bar{e}_{ij}^2 + \bar{e}_{ij} \overline{u'_i u'_j}$$

Il termine I deriva da una somma per  $j=1,3$  nella quale  $\delta_{ij} \neq 0$  solo quando  $i=j$ , e quindi si riduce a  $\bar{e}_{ii}$ , che è nullo; infatti:  $\sum_{ij} \bar{e}_{ij} \delta_{ij} = \sum_i \bar{e}_{ii} = \sum_i u_{i,i} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$  per l'equazione di continuità per il moto medio sotto l'ipotesi di Boussinesq (48), quindi le forze di pressione non compiono lavoro se il fluido non cambia volume in modo apprezzabile.

Sostituendo nell'equazione di bilancio (62) abbiamo:

$$\begin{aligned} E_{,t} + (\bar{u}_j E)_{,j} &= - \bar{u}_i \frac{\bar{p}}{\rho_0} g_{z,i} + \left( \frac{\bar{u}_i T_{ij}}{\rho_0} \right)_{,j} + \bar{e}_{ij} \overline{u'_i u'_j} - 2\nu \bar{e}_{ij}^2 \\ \text{variazione} & \quad \text{Trasporto di E} & \quad \text{lavoro delle} & \quad \text{lavoro delle} & \quad \text{trasferimento} & \quad \text{dissipazione viscosa} \\ \text{locale di E} & \quad \text{ad opera del} & \quad \text{forze di} & \quad \text{forze di} & \quad \text{di energia} & \quad \text{di energia cinetica} \\ \text{nel tempo} & \quad \text{moto medio} & \quad \text{galleggiamento} & \quad \text{superficie} & \quad \text{dal moto medio} & \quad \text{del moto medio} \\ & & & & \quad \text{al moto turbolento} & \end{aligned} \quad (63)$$

I primi termini conservano il significato loro dato in precedenza, l'ultimo termine, proporzionale alla viscosità e definito negativo, è proprio la *dissipazione viscosa di energia cinetica del moto medio*, mentre il significato del penultimo termine, come dimostreremo dopo aver ricavato l'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta, ha il significato di *trasferimento di energia dal moto medio al moto turbolento*.

## 6.2. Energia cinetica turbolenta

I meccanismi di generazione e smorzamento della turbolenza nei flussi ambientali, che sono generalmente turbolenti, sono descritti dall'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta per unità di massa:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_i'^2 \quad (64)$$

della quale l'equazione per l'energia cinetica del moto medio è il complemento. Ci dobbiamo concentrare stavolta sulle fluttuazioni di velocità. I passi che seguiremo saranno:

- i) *decomponiamo tutti i termini delle equazioni di Navier-Stokes secondo Reynolds;*
- ii) *all'equazione risultante sottraiamo l'equazione di Reynolds (51);*
- iii) *moltiplichiamo l'equazione risultante per  $u'_i$ , sommiamo anche sull'indice  $i=1,3$  e mediamo entrambi i membri dell'equazione;*
- iv) *riconosciamo i termini nei quali compare  $\varepsilon$ ;*
- v) *mettiamo tutti i termini per i quali è possibile in forma di flusso;*
- vi) *sviluppiamo il termine viscoso in modo da far apparire la dissipazione di energia cinetica turbolenta.*

Procediamo un passo alla volta:

i) decomponiamo tutti i termini delle equazioni di Navier-Stokes in parte media e parte fluttuante secondo Reynolds:

Partiamo dalla (31):

$$(\bar{u}_i + u'_i)_{,t} + (\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)_{,j} = -\frac{\bar{p} + \tilde{p}'}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} (\bar{p} + \tilde{p}')_{,i} + 2\nu (\bar{e}_{ij} + e'_{ij})_{,j}$$

distribuiamo le derivate rispetto alla somma e sviluppiamo il prodotto nel **termine non lineare**:

$$\bar{u}_{i,t} + u'_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_j u'_{i,j} + u'_j \bar{u}_{i,j} + u'_j u'_{i,j} = -\frac{\bar{p}}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{\tilde{p}'}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}_{,i} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{p}'_{,i} + 2\nu \bar{e}_{ij,j} + 2\nu e'_{ij,j}$$

ii) sottraiamo l'equazione di Reynolds (51):

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,t} + u'_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_j u'_{i,j} + u'_j \bar{u}_{i,j} + u'_j u'_{i,j} &= -\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{\tilde{\rho}'}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}'_{,i} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{p}'_{,i} + 2v \bar{e}_{ij,j} + 2v e'_{ij,j} \\ \bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} &= -\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}'_{,i} + 2v \bar{e}_{ij,j} - \overline{(u'_i u'_j)}_{,j} \end{aligned}$$


---


$$u'_{i,t} + \bar{u}_j u'_{i,j} + u'_j \bar{u}_{i,j} + u'_j u'_{i,j} = -\frac{\tilde{\rho}'}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \tilde{p}'_{,i} + 2v e'_{ij,j} + \overline{(u'_i u'_j)}_{,j}$$

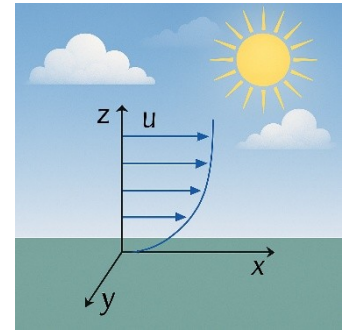
iii) moltiplichiamo l'equazione risultante per per  $u'_i$ , sommiamo anche sull'indice i e mediamo entrambi i membri dell'equazione:

$$\overline{u'_i u'_{i,t}} + \bar{u}_j \overline{u'_i u'_{i,j}} + \overline{u'_i u'_j \bar{u}_{i,j}} + \overline{u'_i u'_j u'_{i,j}} = -g \frac{\overline{\tilde{\rho}' u'_i}}{\rho_0} z_{,i} - \frac{1}{\rho_0} \overline{u'_i \tilde{p}'_{,i}} + 2v \overline{u'_i e'_{ij,j}} + \overline{u'_i} \overline{(u'_i u'_j)}_{,j}$$

Nel termine VI compare  $\overline{u'_i} = 0$  che è nullo in quanto media di una parte fluttuante.

Finora abbiamo considerato un sistema di riferimento costituito da una terna ortonormale di orientazione generica  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , nel quale le componenti della velocità sono indicate come  $(u_1, u_2, u_3)$ . Nel contesto dei flussi ambientali è utile, a volte, far riferimento ad una terna ortonormale di orientazione specifica:  $\{x, y, z\}$ , nella quale la velocità ha componenti  $(u, v, w)$  con:

- l'asse z verticale diretto verso l'alto, come di consueto;
- l'asse x orizzontale diretto come la velocità media (la direzione del vento in atmosfera, o della corrente in mare);
- l'asse y orizzontale e ortogonale alla velocità media.



Utilizzando questo sistema di riferimento, si può notare che, poiché  $\nabla z$  è il versore dell'asse z, nel termine V compare il prodotto scalare tra il vettore delle fluttuazioni di velocità e il versore dell'asse z:  $\sum_i u'_i z_{,i} = \mathbf{u}' \cdot \nabla z = w'$ , ovvero la proiezione in direzione z della fluttuazione di velocità.

iv) riconosciamo i termini nei quali compare  $\varepsilon$ :

Analizzando i diversi termini dell'equazione precedente osserviamo che:

- I può essere riscritto usando la derivata del quadrato a ritroso, come:  $\overline{u'_i u'_{i,t}} = \left( \frac{\overline{u'^2_i}}{2} \right)_{,t} = \bar{\varepsilon}_{,t}$
- II può essere riscritto, usando anche qui la derivata del quadrato a ritroso, come:  $\bar{u}_j \overline{u'_i u'_{i,j}} = \bar{u}_j \left( \frac{\overline{u'^2_i}}{2} \right)_{,j} = \bar{u}_j \bar{\varepsilon}_{,j}$
- III si tratta del prodotto scalare tra  $\overline{u'_i u'_j}$ , che è un tensore simmetrico<sup>16</sup>, ed il gradiente di velocità trasposto  $(\bar{u}_{i,j})$ , che può essere decomposto in parte simmetrica  $(\bar{e}_{ij})$  ed antisimmetrica  $(\bar{r}_{ij})$ . Perciò  $(\overline{u'_i u'_j}) \bar{u}_{i,j} = (\overline{u'_i u'_j}) \bar{e}_{ij} + (\overline{u'_i u'_j}) \bar{r}_{ij}$ . D'altra parte, il **secondo termine** è nullo in quanto prodotto scalare di un tensore simmetrico per uno antisimmetrico, come dimostrato in precedenza (61). Il termine può quindi essere riscritto:  $(\overline{u'_i u'_j}) \bar{u}_{i,j} = (\overline{u'_i u'_j}) \bar{e}_{ij}$

<sup>16</sup> scambiando i con j il risultato non cambia data la proprietà commutativa del prodotto:  $\overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_j u'_i}$

IV anche in questo termine si può usare la derivata del quadrato a ritroso, ottenendo:  $\overline{u'_i(u'_i u'_{i,j})} = \overline{u'_i \left(\frac{u_i'^2}{2}\right)_{,j}} = \overline{u'_i \varepsilon_{,j}}$ .

Si ottiene infine:

$$\bar{\varepsilon}_{,t} + \overline{u_j \bar{\varepsilon}}_{,j} + \overline{u'_i u'_j \bar{\varepsilon}}_{ij} + \overline{u'_j \varepsilon'_{,j}} = - \frac{\overline{w' \tilde{\rho}'}}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \overline{u'_i \tilde{\rho}'_{,i}} + 2\nu \overline{u'_i e'_{ij,j}}$$

v) mettiamo i termini I, III, V, VI in forma di flusso:

Utilizzando nei termini I, III, e V della precedente la derivata del prodotto di due funzioni:  $a_{,j}b = (ab)_{,j} - ab_{,j}$ , osserviamo che, il secondo termine della derivata del prodotto ( $ab_{,j}$ ) contiene una divergenza della velocità, che è nulla a causa dell'equazione di continuità; applicando la regola al termine VI rimangono invece entrambi i termini della derivata (indicati con VI' e VI'' nella successiva equazione). Otteniamo perciò:

$$\sum_{ij} \bar{\varepsilon}_{,t} + (\overline{u_j \bar{\varepsilon}})_{,j} + \overline{u'_i u'_j \bar{\varepsilon}}_{ij} + \overline{(u'_j \varepsilon')}_{,j} = -g \frac{\overline{w' \tilde{\rho}'}}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \overline{(u'_i \tilde{\rho}')}_{,i} + 2\nu \overline{(u'_i e'_{ij})}_{,j} - 2\nu \overline{(u'_{i,j} e'_{ij})}_{,j}$$

vi) sviluppiamo il termine viscoso VI'' in modo da far apparire la dissipazione di energia cinetica turbolenta:

I termini che contengono la viscosità sono 2, il primo (VI') rappresenta una divergenza; quindi, se fosse integrato su di un volume di controllo darebbe luogo ad un integrale di superficie; sappiamo invece che la dissipazione viscosa agisce su ogni elemento di fluido all'interno del volume di controllo, non solo sulla sua superficie: rivolgiamo quindi l'attenzione al termine VI'', nel quale compare il gradiente di velocità trasposto che, al solito, può essere scomposto in parte simmetrica e parte antisimmetrica ( $u'_{i,j} = e'_{ij} + r'_{ij}$ ):

$$\sum_{ij} -2\nu \overline{(u'_{i,j} e'_{ij})} = -2\nu \overline{e'_{ij} e'_{ij}} - \underbrace{2\nu \overline{e'_{ij} r'_{ij}}}_{=0} = -2\nu \overline{e'^2_{ij}}$$

nella quale il secondo termine a secondo membro è nullo in quanto rappresenta il prodotto scalare tra un tensore simmetrico ed uno antisimmetrico ( $\underline{e}': \underline{r}' = 0$ ) (61). Il termine rimanente è proporzionale alla viscosità, agisce in ogni elementino di fluido, ed è definito negativo; ha quindi tutte le caratteristiche richieste alla dissipazione viscosa. Sostituendo otteniamo la forma finale dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta:

	$\bar{\varepsilon}_{,t}$	+	$(\overline{u_j \bar{\varepsilon}})_{,j}$						
	I. Variazione di $\bar{\varepsilon}$ nel tempo		II. Trasporto di $\bar{\varepsilon}$ ad opera del moto medio						
$\sum_{ij}$	=			$-\overline{u'_i u'_j \bar{\varepsilon}}_{ij}$	$-\overline{(u'_j \varepsilon')}_{,j}$	$-g \frac{\overline{w' \tilde{\rho}'}}{\rho_0}$	$-\frac{1}{\rho_0} \overline{(u'_i \tilde{\rho}')}_{,i}$	$+ 2\nu \overline{(u'_i e'_{ij})}_{,j}$	(65)
				III. Produzione meccanica di $\bar{\varepsilon}$	IV. Flusso turbolento di $\varepsilon$	V. Produzione dovuta alle forze di galleggiamento	VI. Lavoro delle fluttuazioni di pressione	VII. Lavoro degli sforzi viscosi su $S_c$	
				$-\overline{2\nu e'^2_{ij}}$					
				VIII. Dissipazione viscosa di $\bar{\varepsilon}$					

Ricordando che  $\varepsilon$  rappresenta l'energia cinetica per unità di peso associata alle fluttuazioni turbolente nella singola realizzazione dell'esperimento, l'equazione appena ottenuta è un bilancio del suo valor medio di insieme,  $\bar{\varepsilon}$ . Globalmente, l'equazione va letta considerando che il primo termine rappresenta la variazione di energia cinetica turbolenta nel tempo, e gli altri termini rappresentano le cause di questa variazione. Analizziamo alcuni termini singolarmente:

II. Trasporto di  $\bar{\varepsilon}$  ad opera del moto medio.

Si noti che è una divergenza, quindi integrando su un volume di controllo e usando il teorema della divergenza si otterrebbe un flusso alla superficie, e la velocità di trasporto che compare è la velocità media.

### III. Produzione meccanica di $\bar{\epsilon}$ .

Si tratta in effetti di un *trasferimento di energia cinetica dal moto medio al moto turbolento*. Questa interpretazione deriva dal fatto che esso compare identico, ma con segno opposto nell'equazione dell'energia cinetica del moto medio (63). Perciò, esso aggiunge esattamente tanta energia da una parte quanta ne sottrae dall'altra. Poiché non ha un segno definito, in teoria, potrebbe corrispondere sia ad un trasferimento di energia da moto medio a quello turbolento sia dal moto turbolento a quello medio. Però il moto medio è tipicamente un moto organizzato, mentre le fluttuazioni turbolente sono per loro natura caotiche e disorganizzate, corrispondono quindi ad un livello di entropia del flusso più alto. Di conseguenza, in ossequio alla seconda legge della termodinamica, è molto più probabile che il trasferimento avvenga nella direzione che aumenta l'entropia piuttosto che il viceversa. Nell'esperienza, infatti, il termine  $\overline{u'_i u'_j \bar{u}_{i,j}}$  è tipicamente negativo.

Per convincercene consideriamo il classico caso dello strato limite di parete in condizioni neutre trattato in precedenza (Figura 21). Se consideriamo condizioni orizzontalmente omogenee e la velocità diretta secondo l'asse x, l'unico gradiente di velocità media non nullo è  $\bar{u}_{,z}$  e, di conseguenza, gli unici termini di  $\bar{\epsilon}_{ij} = 1/2 (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$  non nulli sono  $\bar{\epsilon}_{xy} = \bar{\epsilon}_{zx} = 1/2 \bar{u}_{,z}$ . Il termine III dell'equazione risulta quindi:

$$PM = -\sum_{i,j=1\dots3} \overline{u'_i u'_j \bar{\epsilon}_{ij}} = -\overline{u'w'} \bar{\epsilon}_{zx} - \overline{w'u'} \bar{\epsilon}_{zx} = -\frac{1}{2} \overline{u'w'} \bar{u}_{,z} - \frac{1}{2} \overline{w'u'} \bar{u}_{,z} = -\overline{u'w'} \bar{u}_{,z} \quad (66)$$

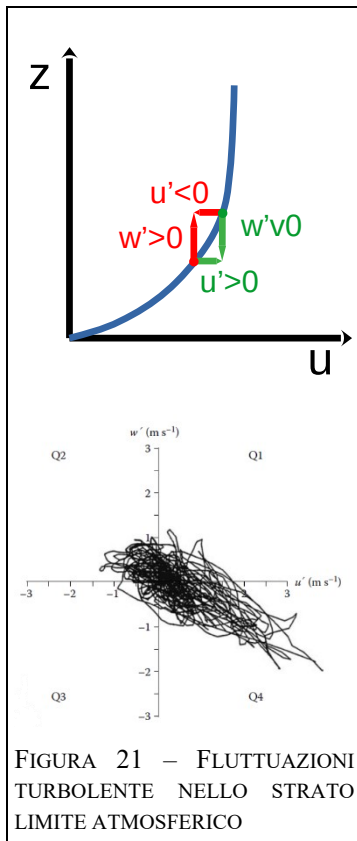


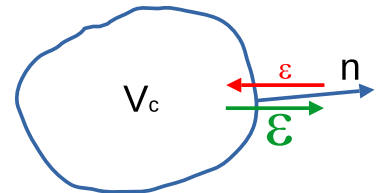
FIGURA 21 - FLUTTUAZIONI TURBOLENTE NELLO STRATO LIMITE ATMOSFERICO

Per studiare il segno del termine P.M., con riferimento al grafico superiore nella Figura 21, consideriamo una particella (rossa in figura) che abbia un'improvvisa perturbazione verso l'alto ( $w' > 0$ ) trovandosi perciò in uno strato più veloce di quello di partenza; se la perturbazione è istantanea, la particella conserverà la velocità del suo strato di provenienza e determinerà una fluttuazione negativa di velocità orizzontale ( $u' < 0$ ), quindi il corrispondente prodotto risulterà  $u'w' < 0$ . Se consideriamo invece la particella verde che ha una perturbazione verso il basso ( $w' < 0$ ), essa si trasferirà da uno strato più veloce ad uno più lento e, conservando la sua velocità iniziale, sarà più veloce delle particelle dello strato di destinazione, determinando una fluttuazione di velocità orizzontale positiva ( $u' > 0$ ). Anche in questo caso il prodotto delle fluttuazioni sarà negativo:  $u'w' < 0$ . Poiché il gradiente di velocità media, nello strato limite considerato è positivo ( $\bar{u}_{,z} > 0$ ), il termine  $P.M. = (\overline{u'w'}) \bar{u}_{,z}$  risulterà in entrambi i casi negativo.

Il ragionamento è confermato dalle misure sperimentali riportate nel grafico inferiore della Figura 21, che rappresenta in un piano  $u'-w'$  i valori di fluttuazioni di velocità misurate sperimentalmente in uno strato limite di parete. Si nota che la maggior parte dei punti sono all'interno del 2° quadrante, dove  $w' > 0$  e  $u' < 0$ , e del 4° quadrante, dove  $w' < 0$  e  $u' > 0$ . Il trasferimento di energia sarà quindi, come aspettato, dall'energia del moto medio a quella del moto turbolento.

### IV. Flusso turbolento di $\epsilon$

Si tratta della divergenza della correlazione tra l'energia cinetica turbolenta del moto nella singola realizzazione dell'esperimento (la quantità trasportata) e le fluttuazioni di velocità in direzione j (il trasporto). Essendo una divergenza è un termine di flusso alla superficie di un volume di controllo, che è diverso da zero quando c'è una correlazione statistica tra le fluttuazioni di velocità e quelle di  $\epsilon$ . Questo tipo di flusso può essere descritto immaginando una particella che non abbia velocità media, e si trovi in prossimità della superficie del volume di controllo che stiamo considerando. Se ogni volta che la particella è in uscita dal volume di controllo ( $u' > 0$  freccia verde) essa trasporta più energia cinetica turbolenta ( $\epsilon' > 0$ ), e ogni volta che rientra ( $u' < 0$ ) ne trasporta di meno e ( $\epsilon' < 0$ ), risulterà sempre  $u'\epsilon' > 0$  e avremo un contributo netto complessivo al flusso di energia  $\bar{\epsilon}$  attraverso la superficie del volume di controllo anche se non c'è, in media, un flusso netto di fluido (perché la particella in media rimane nella sua posizione).



### V. Produzione dovuta alle forze di galleggiamento:

Questo termine agisce su ogni elemento del fluido, e può essere sia positivo, quando le forze di galleggiamento generano turbolenza, oppure negativo, quando invece smorzano la turbolenza eventualmente presente e svolgono quindi un ruolo stabilizzante. Quando prevale l'effetto stabilizzante il fluido tende a stratificarsi stabilmente ( $\overline{\rho_{,z}} < 0$ ) e per comprenderne la dinamica lo strumento più adatto è l'analisi di stabilità statica descritto in precedenza. Quando invece il termine è positivo, l'instabilità si traduce in turbolenza, la quale promuove un intenso mescolamento del fluido, mantenendo una densità media circa costante con la quota ( $\overline{\rho_{,z}}$ ) e prevenendo la generazione di una stratificazione instabile ( $\overline{\rho_{,z}} > 0$ ), che proprio per la sua instabilità non può esistere nella pratica.

Vista l'importanza del caso, consideriamo il caso in cui le differenze di densità dipendano da differenze di temperatura,  $\vartheta$ , e consideriamo come fluido l'aria, che possiamo assumere risponda con ottima approssimazione alla legge dei gas perfetti:

$$p = \rho R \vartheta \quad (67)$$

avendo indicato con  $p$  la pressione assoluta, con  $R$  la costante dei gas perfetti e con  $\vartheta$  la temperatura. Consideriamo una condizione di riferimento ( $p_0, \rho_0, \vartheta_0$ ), nella quale:

$$p_0 = \rho_0 R \vartheta_0. \quad (68)$$

Se immaginiamo ora una piccola perturbazione rispetto alle condizioni di riferimento avremo:

$$p_0 + p' = R (\rho_0 + \rho') (\vartheta_0 + \vartheta') = R(\rho_0\vartheta_0 + \rho_0\vartheta' + \rho'\vartheta_0 + \rho'\vartheta')$$

dove, nell'ipotesi di piccole perturbazioni, si ha che  $p'/p_0 \ll 1$ ,  $\rho'/\rho_0 \ll 1$  e  $\vartheta'/\vartheta_0 \ll 1$ . Trascurando il termine del secondo ordine per l'ipotesi di piccole perturbazioni, e dividendo per la (68) si ottiene:

$$\frac{p_0 + p'}{p_0} = \frac{\rho_0\vartheta_0 + \rho_0\vartheta' + \rho'\vartheta_0}{\rho_0\vartheta_0} \rightarrow 1 + \frac{p'}{p_0} = 1 + \frac{\vartheta'}{\vartheta_0} + \frac{\rho'}{\rho_0}$$

ovvero:

$$\frac{p'}{p_0} \underset{\text{trascurabile}}{=} \frac{\vartheta'}{\vartheta_0} + \frac{\rho'}{\rho_0}$$

In atmosfera le fluttuazioni relative di pressione sono trascurabili rispetto alle altre due (la condizione può essere considerata localmente isobara). Otteniamo così la relazione tra fluttuazioni di densità e fluttuazioni di temperatura che viene comunemente adottata nello studio dello strato limite atmosferico:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} \approx -\frac{\vartheta'}{\vartheta_0}$$

Con questa ipotesi la produzione dovuta al galleggiamento diventa:

$$P. G. = -g \frac{\overline{w'\tilde{\rho}'}}{\rho_0} = g \frac{\overline{w'\vartheta'}}{\vartheta_0} \quad (69)$$

Il termine  $q = \overline{w'\vartheta'}$  è un flusso turbolento di  $\vartheta$  in direzione verticale, il quale, se moltiplicato per  $\rho_0 C_p$  rappresenterebbe un flusso di calore verso l'alto. Per questo motivo,  $q$  è detto: *flusso cinematico di calore*. Quando il fluido è scaldato dal basso,  $q > 0$  e di conseguenza  $PG > 0$  e si genera quella che viene chiamata *convezione turbolenta*.

### VI. Lavoro delle fluttuazioni di pressione:

Si tratta di una divergenza, cioè di termine in forma di flusso, che quindi agisce sulla superficie del volume di controllo. Quasi impossibile da misurare sperimentalmente perché le sonde di pressione prevedono tutta una presenza fisica della sonda nel punto di misura e perturbano la velocità del fluido. Generalmente si tratta di un termine che assume valori poco significativi.

VII. Lavoro degli sforzi viscosi:

Si tratta di un termine in forma di flusso che quindi se integrato potrebbe essere ricondotto ad un integrale di superficie. Rappresenta il lavoro delle forze viscosi sulla superficie del volume di controllo. Il significato del termine deriva dal fatto che il termine corrisponde ad una correlazione tra velocità  $u'_i$  (spostamento per unità di tempo dovuto alle fluttuazioni turbolente) e il termine  $2ve'_{ij}$ , che, in accordo con l'equazione costitutiva sotto l'ipotesi di Boussineq (28), rappresenta la componente viscosa dello stato di tensione. In sintesi, quando vi è correlazione tra spostamento e fluttuazioni di sforzi viscosi, si produce un lavoro netto (positivo o negativo) alla superficie  $S_c$ .

VIII. Dissipazione viscosa di energia cinetica turbolenta:

Questo termine, definito negativo, rappresenta la dissipazione per effetto della viscosità che avviene in ogni elemento di fluido quando si deforma per effetto delle fluttuazioni turbolente.

### 6.3. Stabilità dinamica

Per analizzare la stabilità del flusso quando è turbolento consideriamo l'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta (65) e immaginiamo di applicarla ad un volume di controllo isolato. I termini in forma di flusso, in verde nell'equazione, non rappresentano né produzione né dissipazione netta di energia, ma semplicemente ingresso o uscita di energia attraverso la superficie del volume di controllo e vanno dunque esclusi. Il bilancio in un sistema isolato si riduce quindi a:

$$\bar{\epsilon}_{\tau} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j \bar{\epsilon}_{ij}}}_{PM} - g \frac{\overline{w' \bar{\rho}'}}{\rho_0} - \underbrace{2ve'_{ij}}_{\text{Dissipazione viscosa}}$$

Il fatto che un flusso sia turbolento o meno dipende quindi dal bilancio che di volta in volta si realizza tra produzione meccanica, produzione delle forze di galleggiamento, e dissipazione viscosa. La produzione meccanica è tipicamente positiva e quindi ha un effetto instabilizzante. La produzione dovuta a galleggiamento può essere, a seconda dei casi, o positiva o negativa. Mentre la dissipazione viscosa è sempre negativa e ha quindi un ruolo stabilizzante ma, nella maggior parte dei flussi ambientali, non gioca un ruolo rilevante in quanto il numero di Reynolds è tipicamente molto alto e, di conseguenza, gli effetti della viscosità sono trascurabili.

6.3.1. *Numero di Richardson del flusso*

In conclusione, il fatto che un flusso sia turbolento o meno dipende dal bilancio tra produzione meccanica e produzione dovuta al galleggiamento. Questo concetto porta alla definizione del cosiddetto *numero di Richardson* del flusso (flux Richardson number), definito dal rapporto tra i due termini:

$$R_i = -\frac{PG}{PM} = -\frac{g \frac{\overline{\rho' w'}}{\rho_0}}{\overline{u'_i u'_j \bar{\epsilon}_{ij}}} \stackrel{\text{in}}{=} \frac{g \frac{\overline{\vartheta' w'}}{\vartheta_0}}{\overline{u'_i u'_j \bar{\epsilon}_{ij}}} \stackrel{\text{Strato}}{=} \frac{g \frac{\overline{\vartheta' w'}}{\vartheta_0}}{\overline{u' w' \bar{u}_{i,z}}} \stackrel{\text{limite}}{=} \frac{g \frac{\overline{\vartheta' w'}}{\vartheta_0}}{\overline{u' w' \bar{u}_{i,z}}} \stackrel{\text{di parete}}{=}$$

attraverso il quale è possibile descrivere in modo sintetico la condizione di stabilità dinamica. Nell'espressione di  $R_i$  i termini sono stati espressi nel caso generale, e poi considerando le fluttuazioni di densità legate a quelle di temperatura (69) e con la produzione meccanica espressa in uno strato limite di parete (66) (il suolo, se consideriamo lo strato limite atmosferico).

6.3.2. *Analisi di stabilità dinamica*

Per studiare le diverse condizioni di stabilità dinamica usiamo un semplice esperimento come supporto al ragionamento. Consideriamo un contenitore pieno d'acqua (Figura 22) nel quale sia possibile controllare la temperatura del fondo e sia presente un agitatore meccanico a velocità variabile, per esempio una piccola elica.

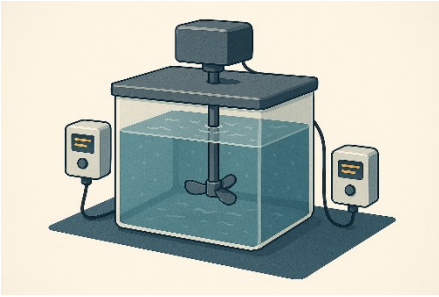


FIGURA 22

Con la temperatura del fondo si controlla la produzione delle forze di galleggiamento (positiva scaldando o negativa raffreddando dal basso), con l'agitatore si controlla invece la produzione meccanica.

Usiamo un diagramma PG-PM (Figura 23) per analizzare le diverse condizioni di stabilità dinamica:

- Nella zona 1.,  $PM \ll PG$  e prevale l'effetto delle forze di galleggiamento, che sono instabilizzanti, la condizione è quella di *convezione turbolenta* il numero di Richardson è negativo e in valore assoluto molto grande:  $R_i \rightarrow -\infty$ . Nel nostro esperimento questa condizione si realizza attivando il riscaldamento inferiore ( $PG > 0$ ) e tenendo spento (o quasi) l'agitatore ( $PM \approx 0$ ). Le particelle che si trovano vicino al fondo si scaldano, diminuiscono la loro densità, e tendono a salire. Una volta in alto, si raffreddano nuovamente e riscendono, mantenendo il flusso turbolento e con un elevato livello di mescolamento che rende la temperatura media della vasca uniforme, tranne che per un piccolissimo strato in prossimità del fondo, lo strato limite termico, dove sarà decrescente con la quota.
- Nella zona 2., le forze di galleggiamento sono ancora instabilizzanti ma la produzione meccanica è diventata rilevante, ed ha grosso modo lo stesso ordine di grandezza di  $PG$ , la condizione è di *convezione mista* e  $R_i \approx -1$ : nell'esperimento, si sta mantenendo acceso il riscaldamento mentre si attiva l'agitatore ad una velocità moderata per avere  $PM \approx PG$ . In questo caso sulle particelle fluide agiscono contemporaneamente gli effetti termici convettivi descritti in precedenza e l'agitazione meccanica; la temperatura media della vasca sarà, anche in questo caso, uniforme.
- Nella zona 3. domina la produzione meccanica. Si parla in questo caso di *condizioni neutre*, perché le forze di galleggiamento sono trascurabili. Il flusso è di *convezione forzata*, il numero di Richardson è molto basso:  $R_i \approx 0$ . Nell'esperimento, abbiamo spento il riscaldamento e la turbolenza è generata solo per effetto dell'agitatore. La temperatura nella vasca è sempre costante.
- Nella zona 4., la produzione dovuta al galleggiamento è negativa, quindi tende a smorzare la turbolenza, ma la produzione meccanica prevale:  $PG < 0$ ,  $PM > |PG|$ . Abbiamo *turbolenza in un flusso stratificato*. Il numero di è  $R_i < 1$ . Nel nostro esperimento stiamo raffreddando la superficie inferiore, le particelle fluide che vengono a contatto con il fondo si raffreddano, aumentano la loro densità, e tendono a rimanere in basso, raffreddandosi sempre più; la temperatura media del fluido tende ad avere un andamento crescente con la quota, con un effetto stabilizzante sul flusso, ma l'azione di mescolamento dell'agitatore meccanico mantiene comunque un certo livello di turbolenza.
- Nella zona 5., sotto la bisettrice del secondo quadrante,  $R_i > 1$ , l'effetto stabilizzante delle forze di galleggiamento prevale su quello instabilizzante della produzione meccanica e la turbolenza, se presente, si smorza. Si tratta di *flussi stratificati stabili* e stabili. Nell'esperimento la superficie inferiore è raffreddata intensamente e l'agitatore è regolato per un mescolamento debole o è completamente spento. Pian piano le particelle più fredde, e quindi più dense, tendono a rimanere più in basso e quelle più calde a rimanere nella parte alta della vasca, generando una stratificazione stabile, con la temperatura che cresce con la quota. La turbolenza gradualmente, anche in presenza di qualche perturbazione di lieve entità, viene smorzata dalle forze di galleggiamento fino a sparire quasi completamente. Nel flusso il mescolamento turbolento è quasi assente.

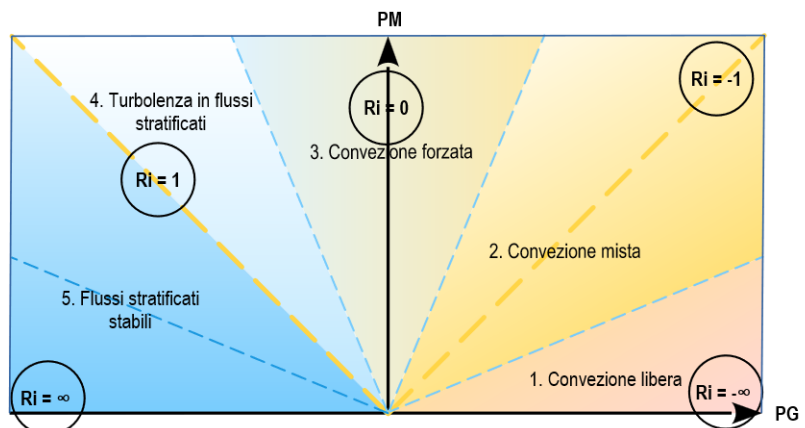


FIGURA 23 – STABILITÀ DINAMICA

## 7. STRATO LIMITE NEUTRO

### 7.1. Transizione dello strato limite

Analizziamo il comportamento di un flusso uniforme che viene in contatto con una parete scabra. Ipotizziamo condizioni neutre, ovvero temperatura uniforme, e forze di galleggiamento che non giocano un ruolo rilevante nella produzione di energia cinetica turbolenta.

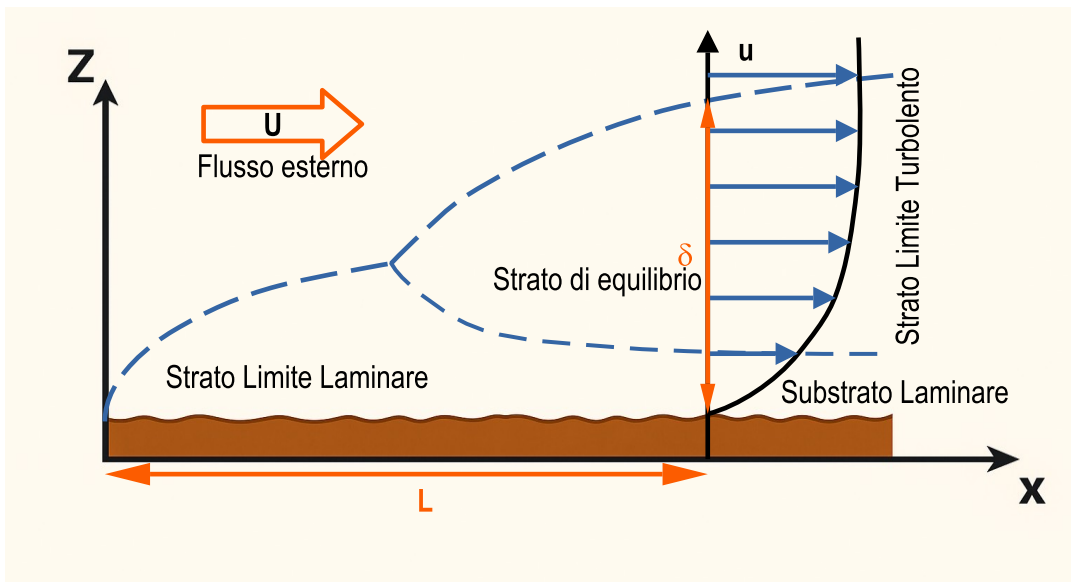


FIGURA 24

Quando il fluido lambisce la parete, si sviluppano, nella zona adiacente, elevati gradienti di velocità a causa della condizione di aderenza, che impone velocità nulla alla parete. In questa regione, a partire dall'inizio della lastra, nasce uno strato dominato dagli effetti della viscosità, detto *strato limite laminare*, che aumenta di spessore proporzionalmente alla radice quadrata della distanza dal punto di inizio della parete. Il moto al suo interno risulta laminare, perché eventuali disturbi non si propagano, ma si estinguono immediatamente per effetto delle forze viscose, che risultano dello stesso ordine di grandezza di quelle d'inerzia. All'aumentare della distanza,  $L$ , dall'inizio dello sviluppo dello strato, il numero di Reynolds,  $Re = UL/\nu$ , cresce e le forze di inerzia diventano preponderanti rispetto a quelle viscose ed il flusso diventa turbolento. La transizione tra un tipo di flusso e l'altro avviene per un  $Re$  critico,  $Re_c$ , il cui valore è stato trovato sperimentalmente essere  $Re_c = 465$ .

Oltre questo punto, si sviluppano due differenti strati che costituiscono lo *strato limite turbolento*. Queste due zone prendono il nome di *strato di equilibrio* e *substrato laminare*.

Lo *strato di equilibrio* è caratterizzato da un moto turbolento in quanto le forze d'inerzia risultano molto maggiori di quelle viscose ( $Re \gg 1$ ) e per questo le perturbazioni si amplificano esponenzialmente senza essere efficacemente smorzate dalle forze viscose. Il *sottostrato laminare* è, invece, una zona in cui, a causa degli elevati gradienti di velocità, le forze viscose continuano a prevalere su quelle di inerzia e riescono dunque a smorzare le fluttuazioni turbolente: pertanto il moto risulta laminare. Lo spessore di questo strato, che sarà indicato con  $z_0$ , è solitamente molto piccolo e, a differenza dello spessore dello strato limite laminare, non dipende da  $x$ .

Dal punto di vista dello strato di equilibrio possiamo distinguere due situazioni in funzione del rapporto tra l'altezza del sottostrato laminare,  $z_0$ , e quella della scabrezza,  $\epsilon_c$ :

$z_0 > \epsilon_c$ : in tal caso le asperità della parete sono completamente immerse nel substrato laminare e le perturbazioni che esse generano vengono immediatamente smorzate: la scabrezza non influenza lo strato di equilibrio; la parete si dice *fluidodinamicamente liscia*;

$z_0 < \varepsilon_e$ : in tal caso le asperità sono esterne al substrato laminare e generano perturbazioni direttamente nello strato di equilibrio, dove le forze di inerzia sono dominanti e quindi non vengono smorzate: la scabrezza influenza tutto lo strato limite e la parete si dice *fluidodinamicamente scabra*.

## 7.2. Struttura dello strato limite turbolento

Consideriamo ora la struttura dello strato limite quando la distanza dall'inizio del suo sviluppo,  $L$ , sia diventata molto grande e la turbolenza si sia completamente sviluppata, come tipico nei flussi ambientali; ad esempio, quando il vento lambisce un terreno piano, oppure una corrente marina scorre sul fondo. In questa situazione, si ha uno strato limite turbolento nel quale l'evoluzione in direzione  $x$  è ormai molto lenta.

Per comprendere quanto succede, si consideri che la turbolenza può essere considerata come la sovrapposizione di vortici di tutte le dimensioni che interagiscono tra di loro in una dinamica di continua instabilità tipica della turbolenza. L'energia viene trasferita dal moto medio alla turbolenza, attraverso il termine di produzione meccanica, prevalentemente ai grandi vortici; questi diventano instabili, dando vita a vortici più piccoli che, a loro volta, si scindono in vortici ancora più piccoli, e così via. In questo processo, detto cascata dell'energia, una parte dell'energia contenuta in un vortice si trasferisce ai vortici più piccoli e una parte viene dissipata per effetto della viscosità. La quota di energia che si perde per dissipazione aumenta al diminuire della scala per il fatto che a vortici più piccoli corrispondono velocità di deformazione,  $e'_{ij}$ , maggiori. La relazione inversa tra la dimensione dei vortici e l'intensità della dissipazione viscosa impone un limite inferiore alla dimensione dei piccoli vortici, detto scala di Kolmogorov, (indicata con  $\mu$  in Figura 25, mentre  $\eta$  è la scala di Taylor precedentemente definita, ed  $L$  la scala integrale).

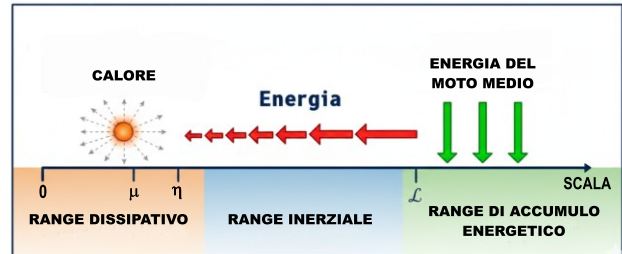


FIGURA 25

Infatti, man mano che l'energia si trasferisce da vortici grandi a vortici più piccoli, la quota dissipata diventerà sempre più importante, finché, raggiunta la scala di Kolmogorov, tutta l'energia disponibile andrà dissipata e non ne rimarrà di disponibile per lo sviluppo di vortici ancor più piccoli.

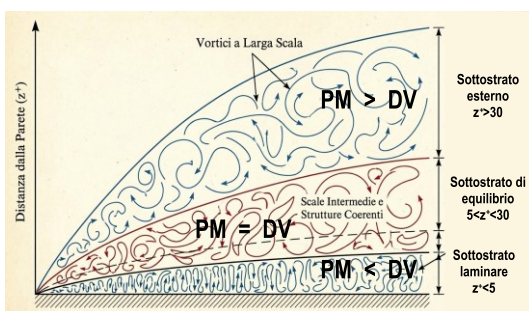
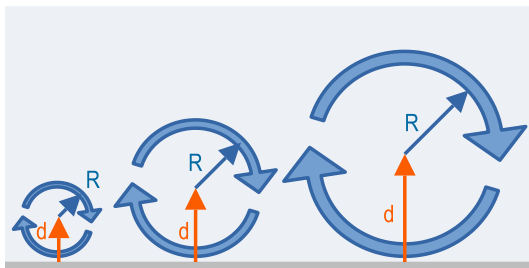


FIGURA 26

si trova una zona intermedia dove produzione e dissipazione sono dello stesso ordine di grandezza ( $PM \approx DV$ ) detta *sottostrato di equilibrio*.

Un importante risultato sperimentale mostra che lo sforzo totale si mantiene circa costante, e pari allo sforzo viscoso alla parete,  $\tau_0$ , nello strato limite:  $\tau_{T_{xz}} = -\rho_0 \overline{u'w'} + \mu \bar{u}_{,z} \approx \tau_0$ .

Analizziamo ora in dettaglio i diversi sottostrati:

### 7.2.1. Sottostrato laminare

In prossimità della superficie il flusso è dominato dalla condizione di aderenza che impone che la velocità si annulli alla superficie. Le velocità sono perciò molto basse e i gradienti verticali di velocità molto grandi. Per i motivi sopra menzionati, inoltre, nel sottostrato laminare domina la presenza di vortici di piccola scala. Per questo motivo le forze viscosi dominano sui termini inerziali e la dissipazione viscosa, DV, prevale sulla produzione meccanica, PM, ( $DV > PM$ ) impedendo lo sviluppo della turbolenza.

Anche gli sforzi turbolenti  $-\rho_0 \overline{u'w'}$ , sono trascurabili rispetto a quelli viscosi  $\bar{\tau}_{xz} = \mu \bar{u}_{,z}$ . Le grandezze che controllano il problema sono quelle di parete, perché si tratta di una zona troppo sottile e vicina alla parete, affinché le cosiddette grandezze esterne, come la velocità del flusso indisturbato oppure lo spessore dell'intero strato limite,  $\delta$ , siano adeguate. Infatti queste ultime sono molto maggiori delle velocità e lunghezze all'interno del sottostrato laminare. Scegliamo perciò come scale:

- la viscosità:  $\nu$ ;
- la densità:  $\rho_0$ ;
- lo sforzo alla parete:  $\tau_0$ .

Sulla base di queste è possibile costruire le due scale di cui abbiamo bisogno:

- una scala delle velocità:  $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$  detta *velocità d'attrito (friction velocity)*.
- una scala delle lunghezze:  $\ell^+ = \nu/u_*$ .

Ricordando che lo sforzo totale si mantiene circa costante e che nel sottostrato laminare gli sforzi turbolenti sono trascurabili rispetto a quelli viscosi, è possibile ipotizzare che lo sforzo tangenziale rimanga circa costante e pari a quello che si ha alla parete,  $\tau_0$ . Potremo quindi scrivere:

$$\mu \bar{u}_{,z} \approx \tau_0 \rightarrow \bar{u}_{,z} \approx \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\tau_0}{\nu} \rho_0$$

avendo usato la definizione di viscosità cinematica  $\nu = \mu/\rho_0$ . Adimensionalizzando con le scale di parete, sostituendo alle grandezze dimensionali quelle adimensionali moltiplicate per la loro scala:  $u = u^+ u_*$ , e  $z = z^+ \ell^+$  si ottiene:

$$\bar{u}_{,z} = \bar{u}^+_{,z^+} \left( \frac{u_*}{\ell^+} \right) = \frac{\tau_0}{\nu} \rho_0 \rightarrow \bar{u}^+_{,z^+} = \frac{\tau_0}{\nu} \rho_0 \left( \frac{\ell^+}{u_*} \right) = 1$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito la definizione di  $\ell^+$  e della velocità d'attrito  $u_*$  e semplificato fino ad ottenere 1. Integrando, otteniamo banalmente:

$$\bar{u}^+ = z^+$$

L'andamento della velocità nel sottostrato laminare risulta quindi lineare con la distanza dalla parete.

### 7.2.2. Sottostrato di equilibrio

In prossimità della parete, nel sottostrato laminare, abbiamo visto che  $PM < DV$ . Lontano dalla parete, nel flusso esterno, sappiamo che, essendo il numero di Reynolds molto grande,  $PM > DV$ . Dovrà quindi esistere una zona intermedia nella quale  $PM \approx DV$ . Questa zona è il *sottostrato di equilibrio*, che prende il suo nome proprio dal fatto che in esso vi è un *equilibrio tra produzione meccanica e dissipazione viscosa di energia cinetica turbolenta*. A partire dall'equilibrio tra produzione e dissipazione di energia cinetica turbolenta è possibile ricavare la forma del profilo di velocità.

Ricordiamo che, nel flusso di strato limite, in cui  $\bar{u} \neq 0$  e  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ , e  $\bar{u} = \bar{u}(z)$ , il termine di produzione meccanica si riduce a (66):

$$PM = -\overline{u'w'} \bar{u}_{,z}$$

Al di fuori del sottostrato laminare, gli sforzi viscosi sono trascurabili e lo sforzo totale, circa pari a  $\tau_0$ , si converte interamente nel corrispondente sforzo turbolento:

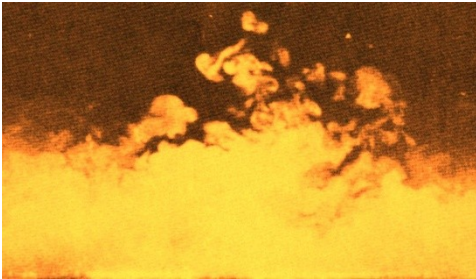


FIGURA 27 - STRUTTURE TURBOLENTE DELLO STRATO LIMITE: RE=600 (IN ALTO); RE=9400 (IN BASSO)

$$\tau_{Rxz} = -\rho_0 \overline{u'w'} \approx \tau_0 \rightarrow \overline{u'w'} = \frac{\tau_0}{\rho_0} = u_*^2$$

Quindi possiamo approssimare il termine di produzione meccanica come:

$$PM = -u_*^2 \bar{u}_{,z}$$

La dissipazione viscosa invece si ricava attraverso un ragionamento di analisi dimensionale. Trattandosi di una diminuzione di energia cinetica  $\bar{\epsilon}$  per unità di tempo avrà come dimensioni:

$$[DV] = \frac{[\text{velocità}]^2}{[\text{tempo}]} = [\text{velocità}]^2 \left( \frac{[\text{velocità}]}{[\text{lunghezza}]} \right) = \frac{[\text{velocità}]^3}{[\text{lunghezza}]^{1/\text{tempo}}}$$

Avendo osservato che  $[\text{tempo}] = [\text{lunghezza}]/[\text{velocità}]$ . Sulla scorta di queste considerazioni dimensionali la dissipazione viscosa dovrà essere proporzionale attraverso un coefficiente adimensionale, che indicheremo come  $1/\kappa$ , al cubo della scala delle velocità diviso la scala delle lunghezze. Come scala delle velocità usiamo la velocità d'attrito  $u_*$ , mentre per quella delle lunghezze,

dobbiamo osservare che siamo in una zona intermedia, per la quale  $\ell^+$  è troppo piccola, mentre lo spessore dello strato limite,  $\delta$ , è troppo grande. Non rimane quindi che scegliere come scala la  $z$  stessa. La proporzionalità sarà quindi:

$$DV \approx -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{u_*^3}{z}$$

Il coefficiente adimensionale prende il nome di *costante di Von Kármán*, e il suo valore è stato misurato sperimentalmente essere  $\kappa = 0.4$ .

Possiamo ora imporre l'equilibrio tra il termine di produzione meccanica e quello di dissipazione:

$$-u_*^2 \bar{u}_{,z} \approx -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{u_*^3}{z}$$

e ottenere un'espressione per il gradiente di velocità:

$$\bar{u}_{,z} = \frac{u_*}{\kappa z} \tag{70}$$

Per scrivere l'equazione in forma adimensionale definiamo  $z^+$  e  $\bar{u}^+$  tali che:  $\bar{u} = \bar{u}^+ u_*$  e  $z = z^+ \ell^+$ , e sostituiamo nell'equazione precedente:

$$\bar{u}_{,z^+} = \frac{1}{\kappa z^+}$$

Infine, integrando rispetto a  $z^+$  otteniamo l'equazione del profilo di velocità:

$$\bar{u}^+(z^+) = \frac{1}{\kappa} \ln(z^+) + C \tag{71}$$

La costante di integrazione  $C$  va determinata sperimentalmente e, *in caso di superficie liscia*, risulta:  $C \approx 5.1$ . Questa legge logaritmica, che a rigore è valida solo nel sottostrato di equilibrio, è in realtà rappresentativa, con buona approssimazione, dell'andamento della velocità per tutto lo strato limite, fatta eccezione naturalmente, nelle immediate vicinanze della parete, dove il logaritmo diventerebbe negativo, e si usa invece

ala legge lineare del sottostrato laminare, e nel sottostrato esterno, nel quale la velocità tende asintoticamente alla velocità del flusso indisturbato,  $U$ .

### 7.2.3. Sottostrato esterno

Il sottostrato esterno è la zona nella quale l'energia cinetica del moto medio viene parzialmente ceduta alla turbolenza. Le fonti che alimentano la turbolenza all'interno di questo strato sono fondamentalmente due: il gradiente verticale di velocità media, che porta ad instabilità di Kelvin-Helmholtz descritte in precedenza, oppure, quando il flusso esterno è turbolento, sono le perturbazioni generate dalle strutture vorticosi che vengono a contatto con lo strato limite ad alimentare l'instabilità. Per questo motivo, la struttura del sottostrato esterno non ha un carattere generale, come avviene per gli altri due sottostrati, ma dipende direttamente dal tipo di moto che si ha all'esterno dello strato limite, dal suo livello di turbolenza, e dalle caratteristiche delle strutture turbolente eventualmente presenti nel flusso esterno. La Figura 27 mostra le strutture dello strato limite turbolento a due numeri di Reynolds ( $Re = U\delta/\nu$ ) diversi. Avendo indicato con  $\delta$  l'altezza dello strato limite. È interessante notare che nel caso con numero di Reynolds più alto, le strutture sono più piccole in quanto, a  $Re$  più alto, il grado di instabilità è maggiore e quindi le grandi strutture trasferiscono la loro energia più rapidamente alle strutture più piccole, che quindi sono presenti in numero maggiore.

## 7.3. Strato limite turbolento su superfici scabre

Come già menzionato, l'esperienza dimostra che la legge logaritmica, per quanto valida in teoria solo nel sottostrato di equilibrio, approssima soddisfacentemente il profilo di velocità per la maggior parte dello strato limite. La sua espressione dipende però da tipo di scabrezza presente sul fondo.

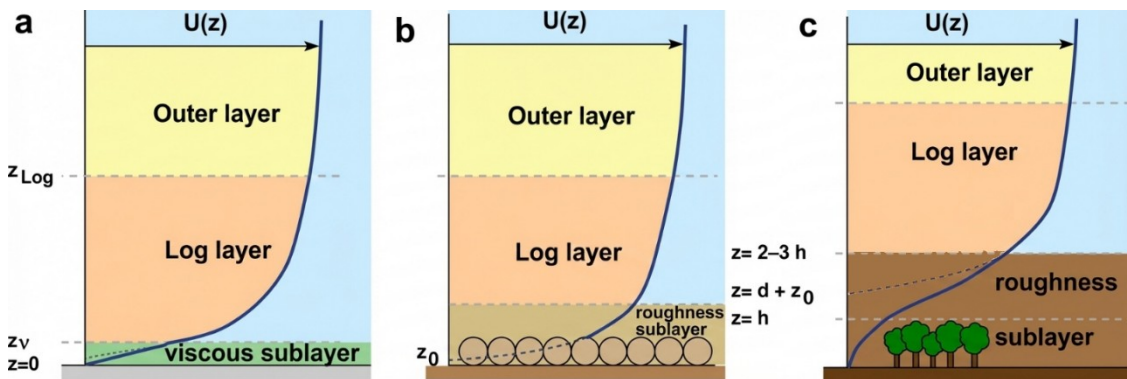


FIGURA 28

Con superficie liscia (Figura 28a) la soluzione è quella descritta in precedenza e la formulazione del profilo logaritmico è quella già individuata nell'equazione (71), che a volte è scritta come:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln(z/z_0)$$

dove  $z_0$  è la scala della scabrezza (*roughness length*), equivalente alla costante  $C$  a causa della proprietà dei logaritmi.

In presenza di scabrezza di spessore rilevante (Figura 28b e c) si crea uno strato che risente della presenza dei singoli ostacoli presenti sul fondo detto *roughness sublayer*, al di sopra del quale si sviluppa il profilo logaritmico, il quale però viene traslato verso l'alto di una quantità  $d$  (*displacement height*). In questo caso, il profilo assume la forma:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right)$$

Il valore delle costanti  $z_0$  e  $d$  viene normalmente individuato minimizzando lo scarto quadratico medio tra i dati sperimentali e la funzione logaritmica sopra riportata.

## 8. DIFFUSIONE E DISPERSIONE DI TRACCIANTI PASSIVI

Nei flussi ambientali, oltre a massa, quantità di moto e momento della quantità di moto, entrano in gioco altre quantità, come temperatura, la salinità nel caso di acqua di mare, che influenzano la densità, oppure le concentrazioni di inquinanti di varia natura di cui ha interesse conoscere e prevedere la distribuzione spaziale e temporale per l'impatto che possono avere sull'ambiente o sull'uomo. Tutte queste grandezze hanno in comune la caratteristica di essere descritte da un campo scalare funzione dello spazio e del tempo:  $C(\mathbf{x}, t)$ , e possono essere trattate con equazioni del tutto analoghe tra loro, che saranno ricavate in questo capitolo. Nella presente trattazione faremo alcune ipotesi semplificative, largamente adottate nella pratica perché in loro assenza la formulazione diventerebbe eccessivamente onerosa e complessa.

Quando si tratta di temperatura, rimarremo nell'ambito dell'ipotesi di Boussinesq, cioè di piccole variazioni nell'intorno di una condizione di riferimento. Per questo motivo non sarà necessario mettere in campo tutta la trattazione relativa alle trasformazioni termodinamiche nel loro complesso (con l'eccezione dello strato limite atmosferico, che vedremo in seguito, nel quale però sarà possibile ricondursi alla trattazione consueta attraverso l'introduzione della temperatura potenziale virtuale).

Nell'ambito delle concentrazioni di sostanze chimiche, ipotizzeremo che non entrino in gioco reazioni chimiche che le trasformano, variandone la natura durante l'evoluzione del fenomeno.

Quando si tratta di concentrazione di particolato o materiale di diversa natura in sospensione (bolle di gas in un liquido, materiale solido, ecc.), ipotizziamo che la sua presenza non modifichi il flusso stesso se non per le eventuali piccole variazioni di densità in accordo con l'ipotesi di Boussinesq. Quando il materiale in sospensione influenza la struttura del flusso (per i solidi ad esempio una colata detritica, per le bolle di gas, il flusso generato da un gorgogliatore), la trattazione richiesta è quella dei *flussi bifase*, il cui studio esula dai nostri obiettivi.

Nell'ambito della meccanica del continuo, sotto le ipotesi appena descritte, si parla di *scalari passivi*, che vengono trattati come una caratteristica aggiuntiva del fluido, la cui variazione nello spazio e nel tempo è descritta da una funzione scalare, la quale deve obbedire ad equazioni che derivano da un principio di conservazione della quantità considerata e da equazioni costitutive. Il modo di procedere è quindi del tutto analogo a quello seguito per le altre equazioni della meccanica dei fluidi.

### 8.1. Equazioni della diffusione e trasporto

#### 8.1.1. Principio di conservazione della massa di tracciante

Consideriamo una funzione scalare  $C(\mathbf{x}, t)$ , che potrebbe rappresentare, per fissare le idee, la concentrazione di una specie chimica, un tracciante, contenuta nel fluido, ed enunciamo il principio di conservazione. Ricordiamo innanzitutto che la *concentrazione*  $C$  è definita da:

$$C(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta m_s}{\Delta V} \right)$$

con  $\Delta V$  volumetto infinitesimo e  $\Delta m_s$  massa di tracciante contenuta in  $\Delta V$ . La massa del tracciante contenuta in un generico volume materiale,  $V$ , è data da:

$$m_s = \int_V C(\mathbf{x}, t) dV$$

Sulla scorta di queste definizioni, il principio di conservazione si esprime come:

---

*La variazione della massa della specie chimica contenuta in un volume materiale è dovuta soltanto al flusso diffusivo attraverso la sua superficie.*

---

In equazioni, questa enunciazione si scrive:

$$\frac{Dm_s}{Dt} + \Phi_d = 0$$

nella quale  $m_s$  è la massa di tracciante contenuta in un *volume materiale*, ovvero un volume,  $V_m(t)$ , definito come la regione di spazio che occupa una specifica porzione di fluido, sempre la stessa, che seguiamo nel tempo. Pertanto se il fluido si muove, il volume materiale cambia corrispondentemente nel tempo.

Indichiamo con  $\Phi_d$  il flusso diffusivo di tracciante attraverso la superficie del volume materiale,  $S_m(t)$  che è pari a:

$$\Phi_d = \int_{S_m(t)} \mathbf{q}_d \cdot \mathbf{n} dV$$

Avendo introdotto il *flusso diffusivo intensivo*  $\mathbf{q}_d$ , un vettore che ha per componente  $i$ -esima la massa di tracciante che attraversa l'unità di superficie con normale in direzione  $x_i$ , nell'unità di tempo per effetto della diffusione molecolare:

$$q_{di}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta m_i}{\Delta S_i \Delta t}$$

nella quale  $\Delta S_i$  è una superficie centrata nel punto  $\mathbf{x}$ , e normale all'asse  $x_i$ , mentre  $\Delta m_i$  è la massa che attraversa la superficie  $\Delta S_i$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Con queste definizioni il principio di conservazione si scrive:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} C dV + \int_{S_m(t)} \mathbf{q}_d \cdot \mathbf{n} dV = 0 \quad (72)$$

Questa equazione è un bilancio su di un volume materiale, che cambia nel tempo seguendo il fluido, perciò, se è la forma naturale per l'espressione del principio, non è adatta ad essere impiegata negli usi concreti. Seguiremo quindi lo stesso percorso usato per le equazioni di base della meccanica dei fluidi, e applicheremo il teorema di Reynolds nelle sue due formulazioni per trasformare l'equazione in un bilancio su di un volume di controllo, arbitrario e fisso nel tempo, e in una formulazione locale, che vale punto per punto in tutto il dominio.

### 8.1.2. Legge di Fick

Per conoscere il valore del flusso diffusivo molecolare usiamo la ben nota legge proposta da Fick nel 1855 che, nella meccanica del continuo, rappresenta un'equazione costitutiva, ovvero un'equazione di derivazione empirica che descrive il particolare mezzo continuo che stiamo trattando. Nel nostro caso, la legge descrive il comportamento diffusivo dello specifico tracciante considerato nello specifico mezzo fluido considerato (per esempio il cloruro di sodio in acqua). Nella sua forma più generale la legge di Fick si scrive:

$$\mathbf{q}_d = -\underline{D}\nabla C \xrightarrow[\text{componenti}]{\text{per}} q_{di} = -D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} = -D_{ij} C_{,j}$$

nella quale  $\underline{D}$  è il tensore della diffusione, e la sua generica componente,  $D_{ij}$ , rappresenta il rapporto tra il flusso in direzione  $x_i$  e il gradiente in direzione  $x_j$ . L'esperienza indica che il flusso si sviluppa nella stessa direzione del gradiente di concentrazione e un gradiente in direzione  $x_j$  non genera nessun flusso in direzione  $x_i$  quando  $i \neq j$ . Di conseguenza avremo che  $D_{ij} \neq 0$  quando  $i = j$ , mentre  $D_{ij} = 0$  quando  $i \neq j$ . Il tensore di diffusione avrà dunque la forma:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \rightarrow D_{ij} = D_i \delta_{ij}$$

che permette di riscrivere la legge di Fick come:

$$q_{di} = -D_i C_{,i} \quad (73)$$

nel caso *isotropo*, il più comune per i fluidi, come acqua e aria, con cui abbiamo a che fare nell'ambiente, i coefficienti diffusivi nelle 3 direzioni saranno uguali:  $D_1 = D_2 = D_3 = D$ , e il tensore sarà  $\underline{D} = D \underline{I}$ . Con  $\underline{I}$  tensore identità, e la legge di Fick diventa:

$$q_{di} = -D C_{,i} \rightarrow \mathbf{q}_d = -D \nabla C$$

In generale, invece, i coefficienti di diffusività,  $D_i$ , dipendono da parametri fisici che possono variare da punto a punto e  $D = D(\mathbf{x}, t)$ , innanzitutto la temperatura. Perciò, l'ipotesi di omogeneità ( $D = \text{cost.}$ ) può essere fatta solo in casi specifici.

### 8.1.3. Relazione tra moto molecolare Browniano e legge di Fick

Seppur dal punto di vista della meccanica del continuo il comportamento delle molecole non può essere considerato in modo esplicito, e la legge di Fick per la diffusione degli scalari passivi deve essere considerata un'equazione ipotizzata su base empirica, è utile sviluppare un ragionamento che mostri come essa derivi dal moto casuale delle molecole del tracciante passivo disperse nel fluido. Per semplicità di trattazione consideriamo un caso monodimensionale.

Immaginiamo uno spazio non limitato nel quale si trovino le molecole del nostro tracciante disperse nel fluido. Sappiamo che le molecole, a causa dei numerosissimi urti che hanno l'una con l'altra, se osservata alla macroscale, si muovono di un moto casuale, noto come moto Browniano, in onore del botanico scozzese che per primo lo osservò al microscopio nel 1827. Identifichiamo in questo spazio due celle parallelepipedo adiacenti di altezza unitaria, profondità unitaria, e larghezza  $\Delta x$  (Figura 29), e calcoliamo flusso di tracciante che avviene attraverso la superficie di separazione unitaria (in azzurro nella figura).

Concentriamoci sulle particelle che attraversano la superficie in un intervallo  $\Delta t$ : contemporaneamente avremo  $n'$  molecole che passano dalla cella 1 alla cella 2, e  $n''$  molecole che passano dalla cella 2 alla cella 1. Il loro numero sarà, rispettivamente:

- $n' = k N_1 \Delta t; \quad 1 \rightarrow 2$
- $n'' = k N_2 \Delta t; \quad 2 \rightarrow 1$

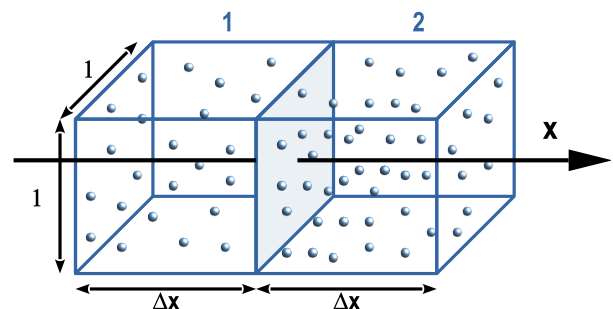


FIGURA 29

Nelle quali abbiamo indicato con  $k$  la probabilità che ha una molecola di passare da una cella all'altra in un intervallo di tempo unitario, e con  $N_i$  il numero di molecole nella cella  $i$ -esima. In conseguenza dell'attraversamento delle molecole da una cella all'altra, avremo due flussi di massa per unità di tempo che sarà dato dal numero di molecole che attraversano la superficie moltiplicato per la massa di una molecola, che indichiamo con  $m$ , e diviso per il tempo intercorso,  $\Delta t$ :

- $q' = \frac{mn'}{\Delta t} = \frac{mkN_1\Delta t}{\Delta t} \quad 1 \rightarrow 2$
- $q'' = \frac{mn''}{\Delta t} = \frac{mkN_2\Delta t}{\Delta t} \quad 2 \rightarrow 1$

e, riconoscendo che  $mN_i = M_i$  è la massa di tracciante contenuto nella cella  $i$ -esima, otteniamo:

- $q' = k M_1; \quad 1 \rightarrow 2$
- $q'' = k M_2; \quad 2 \rightarrow 1$

Il flusso netto che attraversa la superficie in direzione dell'asse  $x$  sarà la differenza dei due:

$$q = q' - q'' = k (M_1 - M_2).$$

L'equazione, scritta in questo modo, fa apparire che il flusso attraverso la superficie unitaria azzurra dipenda dalla massa contenuta nelle celle 1 e 2, la cui dimensione è stata scelta arbitrariamente. Per assurdo, appare che raddoppiando  $\Delta x$ , dato che la dimensione di entrambe le celle raddoppierebbe, esse conterrebbero circa il doppio della massa di tracciante e quindi anche il flusso  $q$  sembrerebbe raddoppiare. Questo, ovviamente, non è possibile perché il flusso non può dipendere in nessun modo da  $\Delta x$ , visto che non cambia la superficie attraverso cui avviene (che rimane unitaria al variare di  $\Delta x$ ).

Cerchiamo quindi una formulazione indipendente da  $\Delta x$ . Se definiamo la concentrazione nella cella  $i$ -esima, che ha volume  $V = \Delta x \cdot 1 \cdot 1$ , come:

$$C = \frac{M_i}{V} = \frac{M_i}{\Delta x \cdot 1 \cdot 1} = \frac{M_i}{\Delta x}$$

il flusso risulta:

$$q = -k (C_1 - C_2) \Delta x$$

$C$  non dipende dalla dimensione della cella, ma la differenza  $C_2 - C_1$  sì: se ad esempio raddoppiasse  $\Delta x$  raddoppierebbe la distanza a cui misuro la concentrazione e quindi la differenza tra le due e, in ultima analisi, il flusso, cosa che sappiamo non essere possibile. Ricordiamo allora la definizione di derivata:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \approx \frac{(C_2 - C_1)}{\Delta x}$$

Possiamo quindi riscrivere il flusso netto in funzione della derivata moltiplicando e dividendo l'espressione precedente per  $\Delta x$  e invertendo i termini della differenza:

$$q = -k \frac{(C_2 - C_1)}{\Delta x} \Delta x^2 = -k \Delta x^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

Nell'espressione ottenuta osserviamo che  $\partial C / \partial x$  non dipende da  $\Delta x$  e, poiché l'intera espressione del flusso non può dipendere da  $\Delta x$ , anche il fattore moltiplicativo  $k \Delta x^2$  deve essere indipendente da  $\Delta x$ , e perciò sarà costante, indicheremo questa costante con  $D = k \Delta x^2$ . Con questa definizione il flusso risulta:

$$q = -D \frac{\partial C}{\partial x}$$

che è proprio la legge di Fick, nella quale riconosciamo che la costante  $D$  è il coefficiente di diffusione molecolare. Possiamo quindi trarre la seguente, importante conclusione:

---

*se un insieme di particelle che si muove di moto puramente casuale, com'è quello Browniano, sussiste una relazione tra il flusso del tracciante ed il gradiente della sua concentrazione. Il segno negativo, indica il fatto che il flusso avviene dalle zone a concentrazione più alta verso quelle a concentrazione più bassa.*

---

#### 8.1.4. Equazione globale della diffusione e trasporto

Riprendiamo il ragionamento sulle equazioni di bilancio. Dall'equazione che rappresenta il principio di conservazione in forma lagrangiana (72) attraverso la prima formulazione del teorema di Reynolds (13), possiamo ricavare una formulazione globale su di un volume di controllo:

$$\left[ \int_{V_c} C dV \right]_{,t} + \int_{S_c} \mathbf{C} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_c} \mathbf{q}_d \cdot \mathbf{n} dV = 0$$

che è l'equazione di diffusione e trasporto in forma globale:

$$m_{s,t} + \Phi_a + \Phi_d = 0 \quad (74)$$

dove abbiamo introdotto il *flusso avvevivo*, ovvero la massa di tracciante che attraversa la superficie  $S_c$  nell'unità di tempo:

$$\Phi_a = \int_{S_c} \mathbf{C} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_c} \mathbf{q}_a \cdot \mathbf{n} dS$$

mentre il *flusso avvevivo intensivo*:  $\mathbf{q}_a = \mathbf{C} \mathbf{u}$ , rappresenta la massa di tracciante trasportata dal fluido nel suo moto per unità di superficie e di tempo. Il flusso diffusivo intensivo  $\mathbf{q}_d$  può essere invece espresso attraverso la legge di Fick (73):

$$\mathbf{q}_d = - \int_{S_m(t)} \underline{\underline{D}} \nabla C \cdot \mathbf{n} dV$$

e l'equazione di diffusione e trasporto in forma globale diventa:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{V_c} C dV \right]_{,t} + \int_{S_c} \mathbf{C} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_c} \underline{\underline{D}} \nabla C \cdot \mathbf{n} dV &= 0 \\ \left[ \int_{V_c} C dV \right]_{,t} + \int_{S_c} C u_j n_j dS - \int_{S_c} D_j C_{,j} n_j dV &= 0 \end{aligned} \quad (75)$$

### 8.1.5. Equazione della diffusione e trasporto in forma locale

Per ottenere la forma locale dell'equazione di conservazione della massa di tracciante, analogamente a quanto fatto per le equazioni di base della meccanica dei fluidi si applica al primo membro dell'equazione di conservazione del tracciante (72) la seconda formulazione del teorema di Reynolds (14):

$$\int_{V_c} \frac{DC}{Dt} + C u_{j,j} dV + \int_{S_c} q_{dj} n_j dS = 0$$

Sviluppiamo ora la *derivata lagrangiana* ed applichiamo il teorema della divergenza (2) all'integrale di superficie:

$$\int_{V_c} C_{,t} + (C_{,j} u_j + C u_{j,j}) dV + \int_{V_c} q_{dj,j} dV = 0$$

Possiamo riconoscere nel secondo e terzo termine del primo integrale la derivata del prodotto e raccogliere tutto sotto lo stesso integrale:

$$\int_{V_c} C_{,t} + (C u_j)_{,j} + q_{dj,j} dV = 0$$

Il termine tra parentesi rappresenta la  $j$ -esima componente del flusso avvevivo intensivo  $q_{aj} = C u_j$ :

$$\int_{V_c} C_{,t} + q_{aj,j} + q_{dj,j} dV = 0$$

Poiché questo integrale deve essere *nullo per qualsiasi volume di controllo* ( $V_c$  è arbitrario), e ipotizzando che la *funzione integranda sia continua*, allora deve essere necessariamente nulla la funzione integranda. Giungiamo quindi alla *forma locale dell'equazione di conservazione della diffusione e trasporto*:

$$\begin{cases} C_{,t} + q_{aj,j} + q_{dj,j} = 0 \\ C_{,t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_a + \nabla \cdot \mathbf{q}_d = 0 \end{cases} \quad (76)$$

Questa forma mette bene in evidenza la struttura dell'equazione, nella quale diffusione e trasporto svolgono un ruolo parallelo tra loro ma, per renderla operativa, conviene sostituire le espressioni dei due flussi intensivi:

$$C_{,t} + (Cu_j)_{,j} - (D_j C_{,j})_{,j} = 0$$

variazione locale
trasporto
diffusione

Questa equazione è stata ottenuta senza nessuna ipotesi sulla comprimibilità del fluido considerato, ed è quindi la forma più generale possibile. Riscriviamola considerando le due ipotesi che possiamo applicare nell'ambito dei flussi ambientali: *i)* flusso debolmente comprimibile secondo Boussinesq (quindi  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) e *ii)* diffusione isotropa ( $D_j = D$ ); sviluppiamo inoltre la derivata del prodotto:

$$C_{,t} + C_{,j} u_j + \underbrace{Cu_{j,j}}_{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} - (DC_{,j})_{,j} = 0 \rightarrow \frac{DC}{Dt} = (DC_{,j})_{,j}$$

La quale, nel caso di *omogeneità* ( $D = \text{cost.}$ ) diventa:

$$\frac{DC}{Dt} = DC_{,jj} \rightarrow \frac{DC}{Dt} = D\nabla^2 C \quad (77)$$

Il primo membro, essendo una derivata lagrangiana, rappresenta la variazione della concentrazione di una particella fluida durante il suo moto, il secondo membro rappresenta la diffusione. Otteniamo quindi una versione locale del principio di conservazione della massa di tracciante da cui siamo partiti: la concentrazione di tracciante di una particella fluida varia, durante il suo moto, solo per effetto della diffusione molecolare.

### 8.1.6. Equazione della diffusione e trasporto in forma adimensionale

Per individuare i parametri da cui dipende un fenomeno di diffusione e trasporto di uno scalare passivo scriviamo l'equazione in forma adimensionale. A questo scopo partiamo dall'equazione nel caso omogeneo e isotropo, due ipotesi comunemente applicabili nei flussi ambientali, e scegliamo come grandezze scala del nostro problema:

- $C_0$ : concentrazione di riferimento (per esempio alla sorgente, se abbiamo una emissione);
- $U$ : scala delle velocità del problema;
- $L$ : scala delle lunghezze;

a partire dalle quali è possibile ottenere una scala dei tempi avvertiva, cioè legata al trasporto da parte del fluido:  $T_a = L/U$ . Sostituendo nella (77), come di consueto, alle grandezze dimensionali quelle adimensionalizzate moltiplicate per la loro scala,  $C = C^* C_0$ ,  $u = u^* U$ ,  $x = x^* L$ ,  $\nabla = \nabla^* / L$ , ecc., si ottiene:

$$\frac{C_0 U}{L} C^*_{,t} + \frac{U C_0}{L} u_j^* C^*_{,j} = \frac{D C_0}{L^2} C^*_{,jj}$$

Dividendo per  $C_0 U$  e moltiplicando per  $L$  si ottiene:

$$C^*_{,t} + u_j^* C^*_{,j} = \left[ \frac{D}{UL} \right] C^*_{,jj}$$

L'equazione dipende da un solo gruppo adimensionale, il *numero di Peclet*:

$$P_e = \frac{UL}{D}$$

Otteniamo così l'*equazione della diffusione e trasporto in forma adimensionale*:

$$C^*_{,t} + \underbrace{u_j^* C^*_{,j}}_{\text{trasporto}} = \underbrace{\frac{1}{P_e} C^*_{,jj}}_{\text{diffusione}}$$

Il numero di Peclet rappresenta il rapporto tra gli effetti del trasporto e di quelli della diffusione:

- quando è molto grande,  $P_e \gg 1$ , il termine diffusivo può essere trascurato e  $C$  varia solo per effetto del trasporto;
- quando invece è piccolo,  $P_e \ll 1$ , è la diffusione a dominare ed il trasporto può essere trascurato.

Allo stesso risultato si può arrivare attraverso un ragionamento di analisi dimensionale basato sulle *scale dei tempi*, che qui faremo perché permette di approfondire la comprensione di questa classe di fenomeni. Supponiamo di voler stimare il tempo necessario affinché il tracciante, che si diffonde con un coefficiente  $D$  in fluido che si muove con velocità caratteristica  $U$ , attraversi un dominio di dimensione  $L$ . A partire dalle grandezze che influenzano il problema:  $\{D, U, L\}$ , è possibile costruire due scale dei tempi, la già introdotta scala avvertiva, ed una diffusiva:

$$\begin{cases} T_a = \frac{L}{U} : \text{scala avvertiva} \\ T_d = \frac{L^2}{D} : \text{scala diffusiva} \end{cases}$$

$T_a$  rappresenta il tempo necessario perché un tracciante passivo si propaghi per una distanza  $L$  a causa del moto del fluido che si muove con velocità  $U$ .  $T_d$ , invece, rappresenta il tempo necessario affinché un tracciante passivo si propaghi per una distanza  $L$  per effetto della diffusione, in un fluido in quiete. In generale avremo che il fenomeno prevalente sarà quello che agisce in un tempo minore:

- $T_a \ll T_d \rightarrow \frac{T_d}{T_a} \gg 1$ : prevale il trasporto;
- $T_a \gg T_d \rightarrow \frac{T_d}{T_a} \ll 1$ : prevale la diffusione.

Per fare questa stima, possiamo dunque usare il rapporto tra le due scale che corrisponde proprio al numero di Peclet:

$$\frac{T_d}{T_a} = \frac{UL}{D} = P_e$$

I due approcci conducono dunque allo stesso risultato.

### 8.1.7. Diffusione semplice

In generale, la soluzione dell'equazione di diffusione e trasporto va cercata utilizzando modelli numerici. È comunque utile, come riferimento concettuale, richiamare qui un caso molto semplice nel qual è possibile ottenere una soluzione analitica. Si tratta del caso di un *rilascio istantaneo di una massa  $m_s$  di tracciante concentrata in un punto, in un fluido in quiete*. Non si ha trasporto e la nuvola di tracciante, dopo il rilascio, si allarga solo per effetto della diffusione. L'equazione si riduce all'equazione di Poisson:

$$\frac{DC}{DT} = D\nabla^2 C$$

con la condizione iniziale  $C(\mathbf{x}, t=0) = m_s \delta(\mathbf{x})$ . Dove  $\delta$  è la funzione di Dirac, definita da:

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 \text{ per } x \neq 0 \\ \delta(0) = \infty \\ \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}) dV = 1 \end{cases}$$

La soluzione risulta una funzione gaussiana:

$$C(\mathbf{x}, t) = \frac{m_s}{\sqrt{(4\pi Dt)^3}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \quad (78)$$

avendo indicato con  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , la distanza dall'origine elevata al quadrato. La gaussiana si allarga proporzionalmente alla radice quadrata del tempo, e la sua larghezza sarà  $\sigma(t) = \sqrt{(2D)t}$  mentre il suo valore massimo si trova sempre nell'origine, ovvero il punto di rilascio, e diminuisce come  $t^{-3/2}$ .

## 8.2. Equazioni delle dispersione turbolenta

Abbiamo già osservato che, quando un flusso è turbolento, diventa impossibile prevedere l'evoluzione del sistema nella singola realizzazione di un esperimento. Bisogna quindi riferirsi alle quantità medie, in questo caso, alla concentrazione media  $\bar{C}$ , analogamente a quanto già visto per le altre equazioni della meccanica dei fluidi. Il percorso da seguire rimane lo stesso delle equazioni precedenti: mediare le equazioni e risolvere i termini non lineari per mezzo della decomposizione di Reynolds in parte media e parte fluttuante.

### 8.2. Equazioni della dispersione in forma globale

Si consideri il caso di uso più comune nei flussi ambientali in cui si considera l'ipotesi di Boussinesq, e la diffusione molecolare è omogenea e isotropa ( $D_i = D = \text{cost.}$ ). Mediando entrambi i membri dell'equazione globale della diffusione e trasporto (75), e considerando l'omogeneità e isotropia della diffusione si ottiene:

$$\left[ \int_{V_c} C dV \right]_{,t} + \int_{S_c} \mathbf{C}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_c} D \nabla C \cdot \mathbf{n} dV = 0$$

La quale, utilizzando il fatto che la media è un operatore lineare, diventa:

$$\left[ \int_{V_c} \bar{C} dV \right]_{,t} + \int_{S_c} \overline{\mathbf{C}\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_c} D \nabla \bar{C} \cdot \mathbf{n} dV = 0$$

Tutti i termini sono già espressi in termini di quantità medie tranne quello non lineare (in azzurro) che contiene la media di un prodotto e va svolto, al solito, utilizzando la decomposizione di Reynolds:

$$\overline{\mathbf{C}\mathbf{u}} = \overline{(\bar{C} + C')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')} = \bar{C}\bar{\mathbf{u}} + \bar{C}\overline{\mathbf{u}'} + \overline{C'\bar{\mathbf{u}}} + \overline{C'\mathbf{u}'} = \bar{C}\bar{\mathbf{u}} + \overline{C'\mathbf{u}'} \quad (79)$$

Rimangono il prodotto delle medie e la correlazione delle parti fluttuanti, mentre i rimanenti due termini si annullano perché contengono medie di parti fluttuanti (evidenziate in grigio). Sostituendo si ottiene l'equazione della dispersione turbolenta in forma globale:

$$\underbrace{\left[ \int_{V_c} \bar{C} dV \right]_{,t}}_{\bar{m}_{s,t} +} + \underbrace{\int_{S_c} \bar{C}\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS}_{\Phi_{am} +} + \underbrace{\int_{S_c} \overline{C'\mathbf{u}'} \cdot \mathbf{n} dS}_{\Phi_T +} - \underbrace{\int_{S_c} D \nabla \bar{C} \cdot \mathbf{n} dV}_{\bar{\Phi}_d} = 0$$

Dove i termini rappresentano:

- $\bar{m}_{s,t}$ : variazione della quantità di tracciante contenuto nel volume di controllo;
- $\Phi_{am}$ : flusso ad opera del moto medio attraverso la superficie del volume di controllo;
- $\Phi_T$ : flusso turbolento attraverso la superficie del volume di controllo;
- $\bar{\Phi}_d$ : flusso diffusivo medio attraverso la superficie del volume di controllo.

Definendo il flusso intensivo turbolento e quello avvevivo del moto medio e osservando che a secondo membro compare la media del flusso diffusivo:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_T = \overline{C' \mathbf{u}'} & \text{flusso turbolento} \\ \mathbf{q}_{am} = \bar{C} \bar{\mathbf{u}} & \text{flusso avvevivo del moto medio} \\ \bar{\mathbf{q}}_d = -D \nabla \bar{C} & \text{flusso diffusivo medio} \end{cases} \quad (80)$$

l'equazione globale può essere riscritta:

$$\left[ \int_{V_c} \bar{C}_{,t} dV \right]_{,t} + \int_{S_c} \mathbf{q}_{am} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_c} \mathbf{q}_T \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_c} \bar{\mathbf{q}}_d \cdot \mathbf{ndS} = 0$$

la quale mette in evidenza il ruolo dei diversi termini: la massa di tracciante contenuta nel volume di controllo varia nel tempo a causa del trasporto ad opera del moto medio, del flusso turbolento, legato alla correlazione tra fluttuazioni di velocità e fluttuazioni di concentrazione, e al flusso diffusivo medio.

### 8.2.1. Equazione della dispersione turbolenta in forma locale

Per ottenere l'equazione della dispersione turbolenta in forma locale si parte dall'equazione della diffusione e trasporto in forma locale, e si mediano entrambi i membri, sviluppando anche questa volta il termine non lineare (quello avvevivo), per mezzo della decomposizione di Reynolds. Consideriamo, anche in questo caso, il caso di diffusione isotropa e omogenea, oltre all'ipotesi di Boussinesq di debole comprimibilità. Applicando la media risulta quindi:

$$\overline{\bar{C}_{,t} + (\bar{u}_j \bar{C})_{,j}} = \overline{D \bar{C}_{,jj}}$$

Applicando le proprietà di linearità della media tutti i termini, tranne quello non lineare, sono espressi in termini di quantità medie:

$$\bar{C}_{,t} + (\bar{u}_j \bar{C})_{,j} = D \bar{C}_{,jj}$$

Applichiamo quindi al **termine non lineare** la decomposizione di Reynolds (79) ottenendo:

$$\begin{cases} \bar{C}_{,t} + (\bar{u}_j \bar{C})_{,j} + (\overline{u'_j C'})_{,j} = D \bar{C}_{,jj} \\ \bar{C}_{,t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{C}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' C'}) = D \nabla^2 \bar{C} \end{cases} \quad (81)$$

la quale, usando la definizione dei flussi intensivi può essere riscritta:

$$\bar{C}_{,t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_{am} + \nabla \cdot \mathbf{q}_T + \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_d = 0$$

la quale mette in evidenza, ancora una volta, che i fenomeni in gioco nella dispersione turbolenta sono il trasporto ad opera del moto medio, il flusso turbolento e quello diffusivo medio.

### 8.3. Equazioni di chiusura della turbolenza

Abbiamo visto che, quando il moto è turbolento, è necessario utilizzare le equazioni della meccanica dei fluidi relative alle parti medie poiché non avrebbe senso cercare di prevedere cosa succede nelle singola realizzazione di un esperimento.

Ricapitoliamo quali sono:

$$\begin{cases}
 \bar{u}_{j,j} = 0 & \text{Continuità} \\
 \bar{u}_{i,t} + \underbrace{(\bar{u}_i \bar{u}_j)_{,j}}_{\text{trasporto del moto medio}} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}_{,i} + \underbrace{v \bar{u}_{i,jj}}_{\text{diffusione molecolare}} - \underbrace{(\overline{u'_i u'_j})_{,j}}_{\text{flusso turbolento}} & \text{Reynolds} \\
 \bar{C}_{,t} + \underbrace{(\bar{C} \bar{u}_j)_{,j}}_{\text{trasporto del moto medio}} = \underbrace{D \bar{C}_{,jj}}_{\text{diffusione molecolare}} - \underbrace{(\overline{C' u'_j})_{,j}}_{\text{flusso turbolento}} & \text{Dispersione} \\
 \bar{\rho} = \bar{\rho}(\dots) & \text{Equazione di stato per } \bar{\rho}
 \end{cases}$$

La prima rappresenta la conservazione della massa, la seconda e la terza hanno una struttura molto simile poiché rappresentano due equazioni di bilancio:

- l'equazione di Reynolds è l'equazione di bilancio per  $u_i$  che rappresenta la componente  $i$ -esima della *quantità di moto* per unità di massa;
- l'equazione della dispersione rappresenta invece un bilancio di  $C$ , la concentrazione.

In entrambe compare un termine di trasporto ad opera del moto medio, un termine di diffusione molecolare, ed un termine di diffusione turbolenta. Confrontando i termini diffusivi si può osservare che la *viscosità cinematica*,  $\nu$ , in analogia con  $D$ , *rappresenta il coefficiente di diffusione molecolare della quantità di moto*. Purtroppo, le equazioni scritte in termini di parti medie introducono 9 incognite aggiuntive, ovvero i flussi turbolenti:

- $\overline{u'_i u'_j} = -\frac{\tau_{Rij}}{\rho_0}$  flusso turbolento di quantità di moto, tensore simmetrico  $3 \times 3 \rightarrow$  6 incognite
- $\overline{C' u'_j} = q_{Tj}$  Flusso turbolento dello scalare passivo, vettore  $\rightarrow$  3 incognite

per le quali non è possibile trovare equazioni di previsione rigorosamente fondate. Il sistema risulta quindi avere più incognite che equazioni e, per poterlo risolvere è necessario aggiungere 9 equazioni di chiusura di natura empirica. I modelli basati sulla risoluzione di queste equazioni sono chiamati modelli RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes).

Nel paragrafo 8.1.3. si è mostrato che se un gruppo di molecole si muove di moto puramente casuale, sussiste una relazione (la legge di Fick) tra il flusso di massa di tracciante ed il gradiente. Il ragionamento può essere esteso anche al caso turbolento se, al posto delle molecole, consideriamo particelle fluide ed immaginiamo che esse siano trasportate in modo casuale dai vortici di cui è costituita la turbolenza invece che dall'agitazione browniana.

Così come il moto browniano di una molecola è casuale in ragione degli innumerevoli urti cui va incontro nel suo percorso, allo stesso modo possiamo immaginare che il moto di una particella fluida trasportata dalla turbolenza sia casuale quando essa passa, nel suo percorso, all'interno di innumerevoli vortici.

Infatti, un urto è un evento nel quale la traiettoria di una molecola può cambiare radicalmente in ragione di perturbazioni infinitesime (determinando la ben nota sensibilità alle condizioni iniziali), e dopo pochi urti la traiettoria diventa del tutto imprevedibile e quindi casuale; allo stesso modo quando una particella fluida, che trasporta una generica quantità,  $A$ , passa da un vortice all'altro la sua traiettoria può cambiare per effetto di perturbazioni infinitesime. Quindi, se una particella fluida passa attraverso un elevato numero di vortici il suo moto può essere considerato casuale (di tipo browniano) e possiamo applicare il ragionamento esposto nel caso della legge di Fick, concludendo che si può stabilire una relazione tra flusso turbolento e gradiente della quantità media di un generica quantità  $A$ :

$$q_j = \overline{u'_j A'} = -K_j \nabla A$$

Questo tipo di chiusure sono dette di tipo K proprio in ragione della lettera K con la quale è consuetudine indicare il coefficiente di proporzionalità. Se poniamo  $A \equiv C$ , otteniamo la relazione:

$$\overline{u'_j C'} = -K_j \bar{C}_{,j} = -D_{Tj} \bar{C}_{,j} \quad (82)$$

nel quale  $K_j$  ha il ruolo di un coefficiente di dispersione turbolenta, ed è spesso indicato con  $D_{Tj}$ . Se invece poniamo  $A \equiv u_i$ , l'equazione di chiusura diventa quella per gli sforzi di Reynolds:

$$\overline{u'_j u'_i} = -K_j \bar{u}_{i,j} = -\nu_{Tj} \bar{u}_{i,j} \quad (83)$$

e il significato del coefficiente  $K_j$  diventa quello di coefficiente di dispersione turbolenta di quantità di moto, che può anche essere interpretato come una *viscosità turbolenta*  $\nu_{Tj}$ . Questa equazione non è altro che l'ipotesi di Boussinesq introdotta al paragrafo 5.5.

È importante notare che, in entrambi i casi, i coefficienti  $D_{Tj}$  e  $\nu_{Tj}$  non rappresentano proprietà del fluido, come i loro omologhi  $D$  e  $\nu$ , ma proprietà del flusso turbolento; perciò, in generale, non sono né omogenei né isotropi, motivo per il quale si è conservato l'indice  $j$  nella loro definizione.

Per capire quando sia ragionevole adottare questo tipo di chiusura analizziamo il fenomeno del trasporto di una particella fluida che debba percorrere una distanza  $L$ , la scala del nostro problema, per effetto di una turbolenza caratterizzata da vortici di dimensione  $d$  (Figura 30).

Se i vortici sono piccoli rispetto alla scala del problema ( $d \ll L$ , a sinistra in Figura 30) la particella dovrà attraversarne un numero molto elevato per percorrere una distanza  $L$  (linea verde), la sua traiettoria sarà casuale e la chiusura di tipo K appropriata. Se invece i vortici sono dell'ordine di grandezza della scala del problema ( $d \approx L$ , linea verde a destra della figura), il moto della particella fluida è determinato in modo deterministico dall'interazione di un numero limitato di vortici. In questo caso la chiusura di tipo K non è applicabile ed è necessario studiare il comportamento della particella fluida in relazione ai singoli vortici e le loro specifiche caratteristiche.

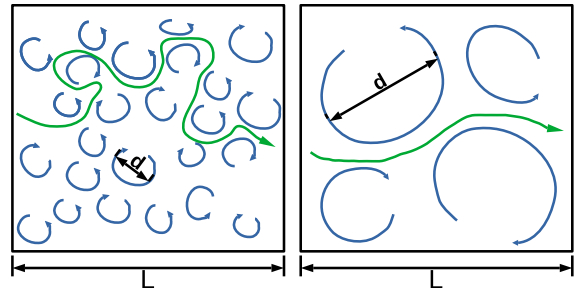


FIGURA 30

Applicando le chiusure di tipo K, le equazioni della meccanica dei fluidi per i moti turbolenti diventano:

$$\begin{cases} \bar{u}_{j,j} = 0 \\ \bar{u}_{i,t} + (\bar{u}_i \bar{u}_j)_{,j} = -\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g_{z,i} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}_{,i} + ((\nu + \nu_{Tj}) \bar{u}_{i,j})_{,j} \\ \bar{C}_{,t} + (\bar{C} \bar{u}_j)_{,j} = ((D + D_{Tj}) \bar{C}_{,j})_{,j} \\ \bar{\rho} = \bar{\rho}(\dots) \end{cases} \quad (84)$$

Quindi con la stessa forma delle equazioni di partenza, considerando però una viscosità turbolenta e un coefficiente di dispersione turbolento aggiuntivi a quelli molecolari. Questi coefficienti sono rimasti sotto il segno di derivazione e sono diverse le loro componenti nelle diverse direzioni dello spazio perché  $D_{Tj}$  e  $\nu_{Tj}$ , poiché, essendo proprietà del flusso, cambiano al variare della posizione e della direzione che si considera. Inoltre, quando il moto è turbolento, questi coefficienti sono tipicamente molto maggiori delle loro controparti molecolari, che pertanto vengono molto spesso trascurate nelle equazioni appena ricavate.

Le chiusure di tipo K sono approssimazioni molto semplificate dei fenomeni turbolenti, ma sono largamente utilizzate nelle applicazioni. Adottare equazioni di chiusura più sofisticate migliora la congruenza fisica del modello, però le equazioni di chiusura sono basate su parametri spesso più difficili da determinare nei casi concreti, quindi la miglior congruenza, essendo associata ad una maggiore incertezza nella determinazione dei

parametri da cui dipendono i modelli di chiusura, non migliora l'accuratezza complessiva delle soluzioni ottenute. Nella pratica ingegneristica, le chiusure di tipo K sono le più comuni nelle equazioni della dispersione mentre, per la stima dei flussi turbolenti di quantità di moto nelle equazioni di Reynolds (gli sforzi di Reynolds), si usano spesso modelli più accurati, basati su bilanci di energia cinetica turbolenta di natura empirica che superano il paradosso rilevato nell'ipotesi di Boussinesq e descritto nel paragrafo 5.5., la trattazione dei quali però esula dagli obiettivi di questo corso.

## 8.4. Descrizione lagrangiana della turbolenza

Quando si valuta la concentrazione di un tracciante a partire dalle equazioni di conservazione, siano esse integrali o in forma locale, ottenendo come risultato un campo  $C(\mathbf{x}, t)$ , si parla di descrizione *euleriana* della dispersione. Vi è però un altro approccio possibile, quello cosiddetto *lagrangiano*, basato sulla simulazione del rilascio di un numero molto grande di particelle di tracciante da una sorgente, sulla riproduzione delle loro traiettorie, e sulla valutazione della concentrazione in funzione delle posizioni assunte dalle particelle nel tempo.

Da un punto di vista concettuale, il rilascio di ciascuna particella, con la ricostruzione della sua traiettoria  $\mathbf{X}^{(k)}(t)$ , con  $k$  indice che indica la  $k$ -esima particella, è la realizzazione di un esperimento. Perciò non avrebbe senso, a causa della sensibilità alle condizioni iniziali di un flusso turbolento, cercare di prevedere la singola traiettoria in modo esatto. Quello che si fa invece, è generare traiettorie che abbiano, nel loro complesso, le stesse caratteristiche statistiche delle particelle effettivamente rilasciate nel campo di moto studiato.

### 8.4.1. Relazione tra probabilità e concentrazione

I modelli lagrangiani si basano sulla corrispondenza diretta tra densità di probabilità delle posizioni delle particelle e campo di concentrazione; quindi, come primo passo dimostriamola.

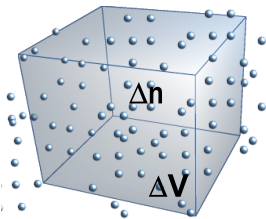


FIGURA 31

Supponiamo di rilasciare da una sorgente un numero molto grande di particelle  $N \rightarrow \infty$ . Per calcolare la densità di probabilità della posizione delle particelle in un punto  $\mathbf{x}$ , si consideri un volumetto infinitesimo  $\Delta V$  nell'intorno del punto  $\mathbf{x}$  e si valuti il numero  $\Delta n$  di particelle che ricadono al suo interno all'istante  $t$ . La densità di probabilità,  $p(\mathbf{x}, t)$  è:

$$p(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \frac{1}{N} \frac{\Delta n}{\Delta V}$$

Se indichiamo con  $m$  la massa di una singola particella, avremo che  $M = mN$  è la massa complessiva di tracciante rilasciato, mentre la massa di tracciante contenuta nel volumetto  $\Delta V$  è pari a:  $\Delta m = m\Delta n$ . Sulla scorta di queste considerazioni, se moltiplichiamo e dividiamo per  $m$  l'equazione precedente otteniamo:

$$p(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \frac{1}{mN} \frac{m\Delta n}{\Delta V} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \frac{1}{M} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{C(\mathbf{x}, t)}{M}$$

La quale stabilisce che la concentrazione è pari alla densità di probabilità della posizione delle particelle moltiplicata per la massa totale di tracciante rilasciata:  $C(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) M$ .

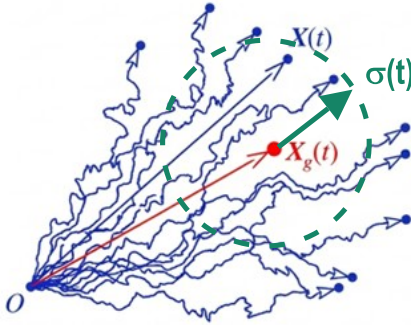
### 8.4.2. Teoria della dispersione di Taylor

Taylor, nel 1921<sup>17</sup>, affrontando la descrizione della turbolenza da un punto di vista lagrangiano, sviluppò una teoria che permette di prevedere il comportamento di un'emissione istantanea di tracciante rilasciata da una sorgente puntiforme. Innanzitutto bisogna notare che, seguendo l'approccio lagrangiano, oltre alla fondamentale relazione tra densità di probabilità della posizione delle particelle e campo di concentrazione, è possibile calcolare altre quantità fondamentali che descrivono le caratteristiche del pennacchio generato da un'emissione puntuale di tracciante a partire dalle proprietà statistiche delle traiettorie delle particelle.

<sup>17</sup> Geoffrey Ingram Taylor, "Diffusion by Continuous Movements", Proceedings of the London Mathematical Society, 1921.

Si consideri, un numero molto grande, al limite infinito, di particelle rilasciate istantaneamente da uno stesso punto. Si genererà una nuvola di traccianti che viene trasportata dal moto medio e, allo stesso tempo, si allarga nel tempo a causa della dispersione turbolenta. La traiettoria di una generica particella può essere ottenuta attraverso l'integrazione nel tempo del campo di velocità. Con riferimento alla  $i$ -esima componente si ha<sup>18</sup>:

$$X_i(t) = \int_0^t u_i(t_1) dt_1$$



La traiettoria di ciascuna particella è una realizzazione dell'esperimento, si possono fare quindi medie di insieme tra tutte le traiettorie, e la posizione media delle particelle  $\bar{X}(t)$  rappresenterà la traiettoria del baricentro della nuvola, mentre la deviazione standard della  $i$ -esima coordinata della posizione delle particelle:

$$\sigma_i(t) = \sqrt{(X_i(t) - \bar{X}_i(t))^2} = \sqrt{\overline{X_i'^2(t)}}$$

è una misura della dimensione in direzione  $x_i$  della nuvola. La teoria di Taylor ci mette in grado di calcolare l'allargamento della nuvola in

funzione del tempo:  $\sigma_i(t)$ .

Si inizia calcolando la derivata rispetto al tempo della varianza della posizione delle particelle:

$$\frac{D\sigma_i^2(t)}{Dt} = \frac{D\overline{X_i'^2(t)}}{Dt} = \overline{2X_i'(t) \frac{DX_i'}{Dt}}$$

ora dobbiamo osservare che:

$$\frac{DX_i'}{Dt} = \frac{D(X_i - \bar{X}_i)}{Dt} = \frac{DX_i}{Dt} - \frac{D\bar{X}_i}{Dt} = u_i - \bar{u}_i = u_i'$$

e sostituendo nella precedente:

$$\frac{D\sigma_i^2(t)}{Dt} = 2\overline{X_i' u_i'} \tag{85}$$

D'altra parte si ha che:

$$X_i'(t) = X_i - \bar{X}_i = \int_0^t u_i(t_1) dt_1 - \int_0^t \bar{u}_i(t_1) dt_1 = \int_0^t (u_i(t_1) - \bar{u}_i(t_1)) dt_1 = \int_0^t u_i'(t_1) dt_1$$

quindi sostituendo nella (85):

$$\frac{D\sigma_i^2(t)}{Dt} = 2 \overline{\int_0^t u_i'(t_1) dt_1 \cdot u_i'(t)} \underset{\substack{\text{portando} \\ u_i'(t) \text{ dentro} \\ \text{l'integrale}}}{=} 2 \int_0^t \overline{u_i'(t_1) u_i'(t)} dt_1 \tag{86}$$

<sup>18</sup> qui e nel seguito di questo paragrafo sarà necessario indicare con simboli diversi la variabile di integrazione (in questo caso  $t_1$ ), rispetto all'estremo di integrazione ( $t$ ).

Introduciamo il *coefficiente di autocorrelazione lagrangiano*, ovvero la correlazione della velocità  $u_i$  della stessa particella misurata a due istanti  $t$  e  $t_1$ , separati da un intervallo temporale  $\tau = t_1 - t$ ,

$$r_{ii}(\tau) = \frac{\overline{u_i'(t)u_i'(t_1)}}{\overline{u_i'^2}} = \frac{\overline{u_i'(t)u_i'(t+\tau)}}{\overline{u_i'^2}}$$

nella quale  $r_{ii}$  dipende da  $\tau$  ma non da  $t$  in quanto abbiamo fatto l'ipotesi di turbolenza statisticamente stazionaria. Osservando che  $dt = dt_1$ , l'equazione (86) diventa:

$$\frac{D\sigma_i^2(t)}{Dt} = 2\overline{u_i'^2} \int_0^t r_{ii}(\tau) d\tau$$

Integrando rispetto al tempo, e ricordando che  $\overline{u_i'^2}$  non dipende dal tempo perché il fenomeno è statisticamente stazionario da un punto di vista euleriano, si ricava la varianza della posizione della nuvola della particelle rilasciate:

$$\sigma_i^2(t) = 2\overline{u_i'^2} \int_0^t \left[ \int_0^{t_1} r_{ii}(\tau) d\tau \right] dt_1$$

Ricordiamo la *regola di integrazione per parti*:

$$\int_a^b \frac{df}{dx} g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

nella quale  $x$  è una generica variabile di integrazione, e la applichiamo ponendo  $x=t_1$  e:

$$\begin{aligned} \frac{df(t_1)}{dt_1} &= 1 \rightarrow f(t_1) = t_1 \\ g(t_1) &= \int_0^{t_1} r_{ii}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

si ha:

$$\sigma_i^2(t) = 2\overline{u_i'^2} \left\{ \int_0^t \underbrace{\left[ \int_0^{t_1} r_{ii}(\tau) d\tau \right]}_g dt_1 \right\} = 2\overline{u_i'^2} \left\{ \left[ \int_0^{t_1} r_{ii}(\tau) d\tau \right]_f^t - \int_0^t \underbrace{t_1}_{f} \cdot \underbrace{\frac{r_{ii}(t_1)}{dg/dt_1}}_{g} dt_1 \right\}$$

Il termine tra parentesi quadre calcolato per  $t_1 = 0$  risulta nullo, rimane quindi solo calcolato per  $t_1 = t$ . Inoltre, nel secondo integrale possiamo indicare la variabile di integrazione come  $\tau$  invece di  $t_1$  senza che il risultato cambi:

$$\sigma_i^2(t) = 2\overline{u_i'^2} \left\{ t \cdot \int_0^t r_{ii}(\tau) d\tau - \int_0^t \frac{\tau \cdot r_{ii}(\tau)}{A} d\tau \right\}$$

Infine, tenendo conto che gli integrali non operano sulla variabile  $t$ , ma solo su  $\tau$ , possiamo raccogliere tutto nello stesso integrale, portando  $t$  a fattor comune dopo aver moltiplicato il termine  $A$  per  $t$ :

$$\sigma_i^2(t) = 2\overline{u_i'^2} \cdot t \int_0^t \left( 1 - \frac{\tau}{t} \right) r_{ii}(\tau) d\tau \quad (87)$$

Che è la forma dell'equazione per la varianza della nuvola di particelle cui volevamo arrivare. Essa mette in evidenza un elemento fondamentale: la dispersione è proporzionale all'intensità delle fluttuazioni turbolente,  $\overline{u_i'^2}$ , come intuitivo, ma anche dall'autocorrelazione lagrangiana  $r_{ii}(\tau)$ , ovvero dalla memoria che la particella fluida ha di sé stessa. In generale la dipendenza è complessa, poiché bisogna tener conto di come evolve la memoria lungo tutta la traiettoria (vista l'integrazione da 0 a t di  $r_{ii}$ ), ma è possibile valutare due comportamenti asintotici facilmente interpretabili:

Al limite per  $t \rightarrow \infty$  il termine A dell'equazione (87) è trascurabile rispetto a 1 perché  $t \gg \tau$ , l'equazione si riduce quindi a:

$$\sigma_i^2(t) = 2\overline{u_i'^2} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t \cdot \int_0^t (1)r_{ii}(\tau)d\tau \right] \approx 2\overline{u_i'^2}T_{Li} \cdot t \rightarrow \sigma_i(t) = \sqrt{2\overline{u_i'^2}T_{Li}} \cdot \sqrt{t}$$

Avendo considerato che l'integrale di  $r_{ii}$ , quando t diventa molto grande, tende a diventare la scala integrale lagrangiana, che misura, analogamente alle scale integrali già introdotte, la memoria che la particella fluida ha di sé stessa durante il suo moto nel flusso turbolento:

$$T_{Li} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t r_{ii}(\tau)d\tau$$

Al limite per  $t \rightarrow 0$  invece, possiamo ipotizzare che la funzione di autocorrelazione tenda a diventare unitaria (per tempi brevi la memoria della particella è ottima):  $\lim_{t \rightarrow 0} r_{ii}(t) = 1$  (vedi Figura 20 e la relativa discussione), perciò l'equazione (87) diventa:

$$\sigma_i^2(t) \approx 2\overline{u_i'^2} \cdot t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \cdot 1d\tau \underset{\text{integrando}}{=} 2\overline{u_i'^2} \cdot t \left[ t - \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} \right] = \overline{u_i'^2} \cdot t^2 \rightarrow \sigma_i(t) = \sqrt{\overline{u_i'^2}} \cdot t$$

In conclusione, la teoria della dispersione di Taylor mette in rilievo il ruolo della memoria che la turbolenza ha di sé stessa, attraverso la scala integrale lagrangiana. Il significato fisico di questa grandezza è strettamente legato alla struttura della turbolenza e, in particolare, alla scala dei vortici che la costituiscono. Possiamo infatti immaginare che una particella conservi memoria del suo comportamento finché rimane all'interno dello stesso vortice perché rimanere all'interno di un vortice non è un comportamento casuale, e richiede memoria di quello che si sta facendo. Quindi la scala integrale lagrangiana è interpretabile come scala temporale dei vortici più grandi che caratterizzano la turbolenza.

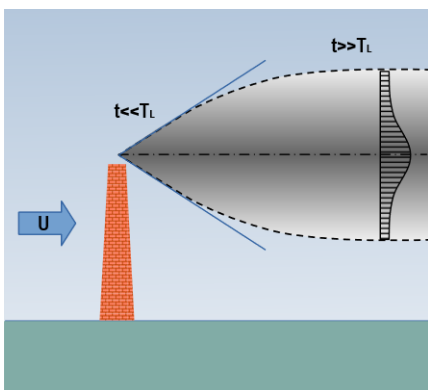


FIGURA 32

Possiamo riassumere i risultati asintotici acquisiti immaginando un'emissione in atmosfera da una ciminiera di particelle di traccianti che vengano trasportate sottovento da un vento medio uniforme, U. In questo modo, man mano che il tempo t passa, la nuvola di particelle viene trasportata verso valle con una diretta relazione diretta:  $x = U \cdot t$ . Inizialmente, per  $t \rightarrow 0$ , ovvero per  $t \ll T_{Li}$ , e finché il moto delle particelle è condizionato dalla memoria della velocità iniziale con la quale sono state rilasciate dalla sorgente, il pennacchio si allarga linearmente (Figura 31). Successivamente, quando le particelle sono passate attraverso un numero molto grande di vortici ( $t \rightarrow \infty$ ), e hanno perso memoria delle loro condizioni iniziali, il pennacchio si allarga in modo proporzionale alla radice quadrata di t.

Va notato, che quando  $t \gg T_L$  e il moto delle particelle diventa casuale, in accordo con le considerazioni fatte nel paragrafo 8.1.3. è possibile utilizzare un'equazione di chiusura di tipo flusso-gradiente e introdurre un coefficiente di dispersione turbolenta  $D_T$  che porta le equazioni della dispersione turbolenta (84) alla stessa forma matematica delle equazioni della diffusione e trasporto (77). La soluzione sarà allora dello stesso tipo di quella descritta nel paragrafo 8.1.7., ovvero una *funzione gaussiana* con larghezza  $\sigma$  che aumenta nel tempo con legge  $\sigma(t) = \sqrt{(2D_T)t}$ .

Dimostriamo ora che non solo la larghezza del pennacchio è in accordo con la soluzione dell'equazione differenziale con chiusura di tipo K, ma lo è anche la distribuzione gaussiana della concentrazione. A questo scopo, ricordiamo l'enunciato di un fondamentale teorema della statistica: *il teorema del limite centrale*, il quale afferma che:

---

*Una variabile aleatoria ottenuta come somma di un numero molto grande (tendente all'infinito) di variabili aleatorie, statisticamente stazionarie, e indipendenti tra loro, ha una densità di probabilità gaussiana qualunque sia la densità di probabilità delle variabili da cui è ottenuta.*

---

D'altra parte, possiamo considerare che una particella fluida, nel suo moto, ogni volta che passa un intervallo di tempo,  $T_L$ , perda memoria di quanto accaduto e il suo percorso successivo sia indipendente dal precedente; quindi, quando  $t \gg T_L$  la posizione della particella è somma di tanti tratti  $\Delta x$  avvenuti in un tempo  $T_L$ , aleatori a causa delle imprevedibili fluttuazioni turbolente, e scorrelati tra loro, e dunque si può applicare il teorema del limite centrale, con la conseguenza che la densità di probabilità della posizione delle particelle dovrà essere gaussiana.

## 9. STRATO LIMITE ATMOSFERICO

Lo strato limite atmosferico, detto anche strato limite planetario (PBL), è la porzione più bassa della troposfera ed è la regione in cui l'atmosfera risente in modo diretto e continuo della presenza della superficie terrestre. In questo strato avviene l'interazione fondamentale tra flusso atmosferico e superficie solida o liquida, mediata da processi di attrito, scambio di calore sensibile e latente, evapotraspirazione, emissione e assorbimento di sostanze chimiche, nonché dalla complessa dinamica della turbolenza. Lo strato limite atmosferico rappresenta un sistema geofisico turbolento fortemente anisotropo e non stazionario, governato da un delicato equilibrio tra forzanti meccaniche (generate dal vento) e di galleggiamento (dovute alle variazioni di temperatura).

Più precisamente, lo strato limite atmosferico può essere definito come la parte della troposfera che è direttamente influenzata dalla presenza della superficie terrestre e che risponde alle forzanti superficiali (attrito, flussi di calore e di umidità, emissioni di inquinanti, orografia) su scale temporali dell'ordine di un'ora o inferiori.

Lo spessore dello strato limite atmosferico varia tipicamente da poche centinaia di metri fino a 1–3 km, in funzione delle condizioni di stabilità termica, dell'orografia, della copertura del suolo e del ciclo diurno. Sopra lo strato limite si estende l'atmosfera libera, che risponde molto più debolmente alle forzanti superficiali e nella quale la turbolenza è intermittente o confinata a regioni specifiche (ad esempio nubi convettive o correnti a getto). La separazione netta tra questi due domini, dovuta alla presenza di uno strato stabile, rende lo strato limite il principale "filtro dinamico" attraverso cui l'energia, la quantità di moto e le sostanze scalari vengono trasferite dalla superficie all'atmosfera sovrastante.

Dal punto di vista energetico, lo strato limite atmosferico funge da interfaccia per il trasferimento di calore tra la superficie terrestre e l'atmosfera. La radiazione solare, è la fonte primaria di energia di tutti i fenomeni dinamici che interessano l'atmosfera, ma l'interazione non è diretta: la maggior parte dell'energia arriva dal sole nello spettro del visibile, cui l'aria è fondamentalmente trasparente, e raggiunge in gran parte il suolo dal quale viene assorbita, e viene poi ceduta all'atmosfera sovrastante per convezione per irraggiamento nello spettro dell'infrarosso, che invece vede un alto coefficiente di assorbimento da parte dell'aria. Il riscaldamento della superficie innesca flussi turbolenti che trasportano l'energia verso l'alto, alimentando i moti atmosferici globali. Si stima che circa l'80% dell'energia che guida la circolazione atmosferica derivi dal calore latente rilasciato dal vapore acqueo, il quale viene trasportato dall'evaporazione oceanica, attraverso lo strato limite, fino all'atmosfera libera. Inoltre, esso è il luogo in cui viene dissipata circa la metà dell'energia cinetica totale dell'atmosfera a causa dell'attrito con la superficie e della cascata energetica turbolenta verso le piccole scale dei vortici.

Dal punto di vista ambientale, lo strato limite atmosferico è di importanza cruciale perché è l'ambiente in cui vivono gli esseri umani e in cui avviene la quasi totalità delle emissioni antropiche. Le sorgenti di inquinanti atmosferici – traffico, attività industriali, riscaldamento civile, agricoltura – sono prevalentemente superficiali e la qualità dell'aria che respiriamo è determinata dai processi di trasporto e rimescolamento turbolento all'interno dello strato limite.

L'impatto ambientale si estende anche al ciclo idrologico e alla meteorologia. Le previsioni della temperatura massima e minima, della formazione di rugiada o brina, e della visibilità in caso di nebbia, sono essenzialmente previsioni dello stato dello strato limite. Le colture agricole dipendono dalla distribuzione turbolenta di anidride carbonica e umidità, nonché dalla velocità del vento che può favorire o ostacolare la crescita delle piante. In sintesi, lo strato limite atmosferico è il regolatore termico e chimico dell'ambiente di superficie, e la sua struttura turbolenta controlla la dispersione degli inquinanti, mentre il vento medio ne governa l'avvezione orizzontale.

### 9.1. Temperatura potenziale e potenziale virtuale

Finora abbiamo assunto che, nei flussi ambientali, le variazioni di pressione e di densità fossero talmente piccole da non richiedere una descrizione termodinamica completa; ciò ci ha permesso di utilizzare relazioni approssimate che esprimono la densità in funzione di temperatura, salinità o altre proprietà. Se ci concentriamo sull'atmosfera, e trattiamo l'aria come un gas perfetto, con equazione di stato  $p = \rho RT$ , la densità di una

particella fluida è funzione sia della temperatura che della pressione. Se le variazioni di quota sono limitate a qualche decina di metri, la pressione può essere ritenuta approssimativamente costante e la densità rimane funzione della sola temperatura, in linea con quanto assunto sinora. Nella trattazione dello strato limite atmosferico però le variazioni di quota raggiungono le centinaia, e finanche le migliaia, di metri; perciò, l'ipotesi di pressione costante non è più ammissibile: dobbiamo mettere in conto che la pressione vari con la quota.

In prima approssimazione, possiamo ipotizzare, in accordo con l'ipotesi di Boussinesq, che le variazioni di densità siano piccole attorno alla densità di riferimento  $\rho_0$  e la distribuzione della pressione dello strato limite sia di tipo idrostatico:

$$p = p_0 - (\rho g) \cdot z \approx p_0 - (\rho_0 g) \cdot z \quad (88)$$

Nella quale  $p_0$  indica la pressione alla quota di riferimento  $z = 0$ .

### 9.1.1. Stabilità statica nello strato limite atmosferico

Analizziamo la stabilità statica trattata nel paragrafo 4.1. alla luce di queste considerazioni. Ricordiamo innanzitutto che l'analisi prevede di perturbare istantaneamente la quota di una particella fluida e di verificare se la particella tenda a ritornare nella posizione iniziale, oppure se la perturbazione si amplifichi esponenzialmente e la particella si allontani sempre più dalla sua posizione di equilibrio.

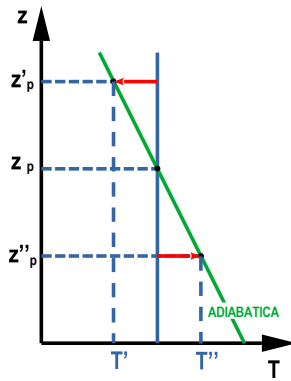


FIGURA 33

di stabilità.

Mentre nella discussione fatta nel paragrafo 4.1. si ipotizzava che la particella nella perturbazione di quota mantenesse costanti la sua temperatura e la sua densità, ora dobbiamo tener conto che esse cambiano. Consideriamo una particella che si trovi alla quota  $z_p$  e temperatura  $T_p$  (Figura 33). Se la portiamo istantaneamente alla quota maggiore  $z'_p$  la particella troverà una pressione inferiore a quella di partenza, di conseguenza si espanderà e la sua temperatura diminuirà fino a  $T'$  poiché la particella non avrà il tempo di scambiare calore con l'aria circostante e seguirà una trasformazione adiabatica. Diminuendo la temperatura, la densità della particella aumenterà. Al contrario, una particella che venga spostata istantaneamente verso il basso, trovando una pressione più alta si comprimerà ed aumenterà la sua temperatura fino a  $T''$ , anche in questo caso seguendo una trasformazione adiabatica; corrispondentemente, la sua densità tenderà a diminuire. Di queste variazioni di temperatura e quindi di densità sarà necessario tenere conto nell'analisi

Consideriamo dunque la nostra particella immersa in uno strato limite atmosferico caratterizzato da un gradiente verticale di temperatura  $\Gamma$ , tale che la temperatura dell'aria sia data da:

$$T(z) = T_{p0} - \Gamma(z - z_{p0}) = T_{p0} - \Gamma \Delta z, \quad (89)$$

dove  $z_{p0}$  e  $T_{p0}$  sono la quota e la temperatura iniziali della particella e  $\Delta z = (z - z_{p0})$  è la variazione di quota. Se perturbiamo istantaneamente la quota della particella, la sua temperatura varierà seguendo una trasformazione adiabatica, con una legge che possiamo approssimare localmente al prim'ordine come:

$$T_p(z) = T_{p0} - \Gamma_{ad}(z - z_{p0}). \quad (90)$$

nella quale il coefficiente  $\Gamma_{ad}$  è detto *gradiente adiabatico*. Nel paragrafo relativo all'analisi di stabilità statica (4.1.) abbiamo visto che, alla nuova quota, la particella sarà soggetta ad una forza di galleggiamento per unità di massa pari a (vedi equazione (34)):

$$F = (\rho(z) - \rho_p(z))g$$

avendo indicato con  $\rho$  la densità dell'aria e con  $\rho_p$  quella della particella. Utilizziamo l'equazione di stato,  $p = \rho RT$ , per esprimere la forza di galleggiamento in funzione della temperatura, tenendo conto che, dopo lo spostamento, la pressione della particella,  $p_p$ , coinciderà con quella dell'aria circostante:  $p_p(z) = p(z)$ . Ricavando la densità dall'equazione di stato e sostituendo otteniamo:

$$\frac{F}{\rho_p(z)} = \frac{\left( \frac{p(z)}{RT(z)} - \frac{p_p(z)}{RT_p(z)} \right) g}{\frac{p_p(z)}{RT_p(z)}} \stackrel{\substack{\text{simplificando} \\ \text{con } p(z)=p_p(z)}}{=} \frac{\left( \frac{1}{T(z)} - \frac{1}{T_p(z)} \right) g}{\frac{1}{T_p(z)}} \stackrel{\text{riarrangiando}}{=} \frac{(T_p(z) - T(z))}{T(z)} g$$

Usiamo ora le approssimazioni lineari (89) per  $T(z)$  e (90) per  $T_p(z)$ , ottenendo:

$$\frac{F}{\rho_p} = \frac{[(T_{p0} - \Gamma_{ad}\Delta z) - (T_{p0} - \Gamma\Delta z)]}{T(z)} g$$

ovvero:

$$F(\Delta z) = \rho_p g \frac{(\Gamma - \Gamma_{ad})}{T(z)} \Delta z$$

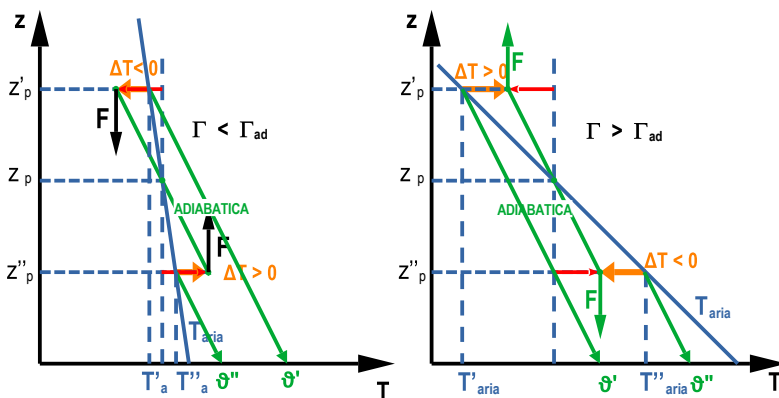


FIGURA 34

ulteriormente dalla condizione di equilibrio; perciò, *la stratificazione è instabile*. Se invece consideriamo il caso in cui  $\Gamma < \Gamma_{ad}$ , come rappresentato nel grafico di sinistra della figura, la differenza dei gradienti risulta  $\Gamma - \Gamma_{ad} < 0$  e avremo:

- $\Delta z > 0 \rightarrow F < 0$ ;
- $\Delta z < 0 \rightarrow F > 0$ .

In questo caso se la particella viene spostata verso l'alto è soggetta ad una forza verso il basso, che tende a farla tornare alla sua posizione di equilibrio e, analogamente, se viene spostata verso il basso la forza di galleggiamento risulta positiva tendendo, anche questa volta, a farla ritornare alla posizione di equilibrio iniziale: in questo caso *la stratificazione è stabile*. Infine, *la stratificazione risulterà neutra* quando  $\Gamma = \Gamma_{ad}$ , ovvero quando la stratificazione atmosferica corrisponde proprio al gradiente adiabatico. In questo caso,  $F = 0$  per qualsiasi  $\Delta z$ ; infatti, quando la particella cambia quota, segue un aumento o una diminuzione della temperatura esattamente uguale a quello dell'aria circostante e, quando arriva ad una nuova quota, la sua temperatura sarà sempre uguale a quella dell'aria circostante, trovandosi quindi sempre in equilibrio.

Nel seguito introdurremo il concetto di temperatura potenziale, che permette di rimuovere dall'analisi di stabilità le variazioni di pressione con la quota, riportando la discussione ad essere del tutto simile a quella fatta a suo tempo. La definizione di temperatura potenziale ci permetterà anche di ricavare il valore del gradiente di temperatura adiabatico,  $\Gamma_{ad}$ , che separa le stratificazioni stabili da quelle instabili.

### 9.1.2. Definizione di temperatura potenziale e stabilità statica

Per rimuovere l'effetto delle variazioni di pressione in seguito allo spostamento istantaneo di una particella da una quota ad un'altra, attraverso una trasformazione adiabatica, si introducono il concetto di temperatura potenziale, quando l'aria è secca, e di temperatura potenziale virtuale, quando si deve tenere conto della presenza dell'umidità.

---

*La temperatura potenziale,  $\vartheta$ , è la temperatura che una particella d'aria secca assumerebbe se portata ad una pressione di riferimento attraverso una trasformazione adiabatica reversibile.*

---

La pressione di riferimento tipicamente utilizzata è  $p_0 = 100$  kPa. Consideriamo il grafico di destra della Figura 34, che abbiamo verificato rappresentare una condizione instabile ( $\Gamma > \Gamma_{ad}$ ), e verifichiamo a quale gradiente verticale di temperatura potenziale corrisponde. Innanzitutto consideriamo che la pressione atmosferica sia funzione della quota secondo la legge idrostatica dell'equazione (88), e di prendere l'origine delle  $z$  in modo che la pressione a quota  $z=0$  sia  $p_0 = 100$  kPa, cioè proprio la pressione di riferimento cui bisogna portare una particella d'aria secca per conoscerne la temperatura potenziale.

Per conoscere la temperatura potenziale dell'aria alla quota  $z'_p$  bisogna immaginare di portare una particella d'aria attraverso una trasformazione adiabatica alla pressione di riferimento. Nel grafico questa trasformazione corrisponde a percorrere la linea verde (con gradiente adiabatico) a partire da  $T_{aria}(z'_p) = T'_{aria}$  fino a  $z=0$ , dove  $p = p_0$  e la temperatura risulta  $\vartheta'$ , la quale, quindi, è la temperatura potenziale dell'aria a quota  $z'_p$ :  $\vartheta(z'_p) = \vartheta'$ .

Analogamente, la temperatura potenziale dell'aria a quota  $z''_p$ ,  $\vartheta(z''_p)$  si calcola partendo dalla temperatura  $T_{aria}(z''_p) = T''_{aria}$  e seguendo la corrispondente linea adiabatica (verde) fino alla quota  $z=0$ , dove si raggiunge la pressione di riferimento e la temperatura  $\vartheta''$ . Avremo quindi che  $\vartheta(z''_p) = \vartheta''$ .

Confrontando i due valori nel grafico di figura è facile verificare che  $\vartheta' < \vartheta''$ , e quindi la temperatura potenziale è decrescente con la quota ( $d\vartheta/dz < 0$ ). Se ripetiamo il ragionamento nel grafico di sinistra della Figura 34, che rappresenta una stratificazione stabile, seguendo le due linee verdi fino a quota nulla, verifichiamo facilmente che, in questo caso,  $\vartheta'' < \vartheta'$  e, dunque, la temperatura potenziale cresce con la quota ( $d\vartheta/dz > 0$ ).

Abbiamo dimostrato che un gradiente positivo di temperatura potenziale corrisponde ad una stratificazione stabile, mentre uno negativo corrisponde ad una stratificazione instabile; la separazione tra i due casi è il caso di temperatura potenziale costante ( $d\vartheta/dz = 0$ ), che corrisponde ad un gradiente adiabatico della temperatura assoluta e ad una stratificazione neutra. In sintesi:

- $d\vartheta/dz > 0 \rightarrow$  stabile;
- $d\vartheta/dz = 0 \rightarrow$  neutro;
- $d\vartheta/dz < 0 \rightarrow$  instabile.

La discussione di stabilità in termini di temperatura potenziale è ritornata quindi esattamente equivalente a quella in termini di temperatura assoluta nel caso di assenza di trasformazioni termodinamiche come accade, ad esempio, nel caso in cui il fluido sia l'acqua, che non varia sensibilmente la sua densità nelle trasformazioni che hanno luogo nei flussi ambientali. Infatti in quel caso una temperatura crescente con la quota corrisponde a fluido più leggero (caldo) al di sopra di fluido più pesante (freddo), che è una condizione stabile, e viceversa. E, in effetti, nel caso di liquidi, come l'acqua, la temperatura assoluta e quella potenziale, semplicemente, coincidono.

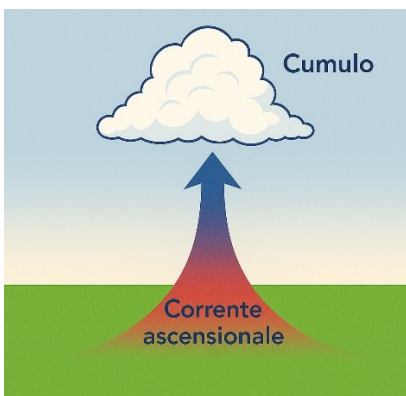


FIGURA 35

In conclusione, se analizziamo le condizioni di stabilità dello strato limite atmosferico in termini di temperatura potenziale, possiamo evitare di tener conto delle trasformazioni termodinamiche che avvengono a causa dei cambiamenti di pressione con la quota, e ragionare in modo del tutto analogo a quanto si fa con i liquidi.

Se l'aria non è secca, ma contiene del vapor d'acqua, dovremo tener conto anche dei cambiamenti di stato che possono avvenire. Ipotizziamo di spostare una particella d'aria umida istantaneamente verso, dunque con una trasformazione adiabatica. Sappiamo che mentre sale si espande e si raffredda. In presenza di vapor d'acqua man mano che la temperatura diminuisce, la sua umidità relativa aumenta, fin quando, ad una certa quota, non raggiunge il 100% e l'acqua condensa, rilasciando il suo calore latente, che aumenta la temperatura assoluta e genera le goccioline in

sospensione che formano le nubi (cumuli da bel tempo, Figura 35). Nel percorso inverso però (la particella scende e, comprimendosi, si scalda) la trasformazione non è esattamente speculare, ma vi è un'isteresi poiché

affinché il cambiamento di fase possa avvenire, devono essere presenti goccioline d'acqua in sospensione che possano evaporare assorbendo il calore latente. Quindi, l'effettivo realizzarsi della trasformazione è subordinato alla presenza di acqua allo stato liquido (Figura 36).

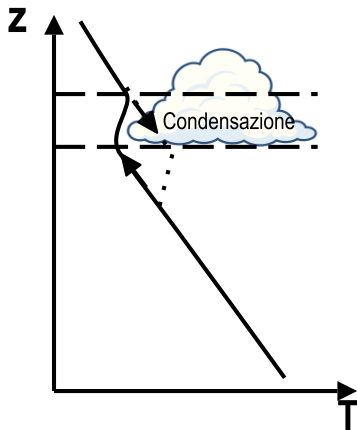


FIGURA 36

Per tener conto del calore latente rilasciato ed assorbito durante questi processi si definisce la temperatura potenziale virtuale  $\vartheta_v$ .

---

*La temperatura potenziale virtuale,  $\vartheta_v$ , è la temperatura che una particella d'aria umida raggiungerebbe se portata ad una pressione di riferimento,  $p_0$ , per mezzo di una trasformazione adiabatica reversibile.*

---

Quindi, in presenza di aria umida (cioè la maggior parte dei casi), la discussione sulla stabilità statica dello strato limite atmosferico condotta in precedenza può essere ripetuta tal quale utilizzando quest'ultima grandezza.

### 9.1.3. Relazione tra temperatura assoluta e temperatura potenziale e gradiente di temperatura adiabatico

Calcoliamo la relazione tra temperatura assoluta e temperatura potenziale. Consideriamo una particella in una condizione generica, caratterizzata da temperatura,  $T$ , pressione,  $p$ , e densità,  $\rho$ , e portiamola con un'adiabatica reversibile alla pressione di riferimento  $p_0$ , condizione nella quale la particella avrà raggiunto una densità  $\rho_0$  e una temperatura  $\vartheta$  (la temperatura potenziale).

Approssimando il comportamento dell'aria come quello di un gas perfetto, possiamo applicare l'equazione di stato sia nella condizione di partenza ( $p = \rho RT$ ) sia in quella di riferimento ( $p_0 = \rho_0 R \vartheta$ ) e fare il rapporto tra le due equazioni:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho RT}{\rho_0 R \vartheta} = \frac{\rho T}{\rho_0 \vartheta}$$

D'altra parte, per un gas perfetto, una trasformazione adiabatica reversibile coincide con l'isentropica, che ha equazione:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (91)$$

Nella quale  $\gamma = c_p/c_v \approx 1.4$  per l'aria secca è il rapporto dei calori specifici, rispettivamente, a pressione e volume costante. Sostituendo la (91) a  $\rho/\rho_0$  nella precedente otteniamo:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{T}{\vartheta} \xrightarrow[\text{a sinistra}]{\text{raccolgendo le pressioni}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{T}{\vartheta}$$

La frazione ad esponente può essere riscritta ricordando che  $\gamma = c_p/c_v$  e, per un gas perfetto,  $R = c_p - c_v$ :

$$1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{c_v}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{R}{c_p}$$

Giungendo quindi all'espressione che mette in relazione  $\vartheta$  e  $T$  una volta nota la distribuzione delle pressioni  $p(z)$ :

$$\frac{\vartheta}{T} = \left(\frac{p_0}{p(z)}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

Per ricavare una relazione tra i gradienti verticali di temperatura, che sono il parametro principale se si analizza la stabilità statica, facciamo il logaritmo dell'equazione precedente e poi deriviamo rispetto a  $z$ . Il logaritmo di entrambi i membri risulta:

$$\ln(\vartheta) - \ln(T) = \frac{R}{c_p} (\ln(p_0) - \ln(p))$$

e derivando rispetto a  $z$ :

$$\frac{1}{\vartheta} \vartheta_{,z} - \frac{1}{T} T_{,z} = \frac{R}{c_p} \left( \frac{1}{p_0} p_{,z} - \frac{1}{p} p_{,z} \right) = - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p} p_{,z}$$

nella quale, essendo  $p_0$  costante, la sua derivata rispetto a  $z$  è nulla. Nel secondo membro, il gradiente verticale di pressione, nel limitato spessore dello strato limite atmosferico, può essere calcolato, per mezzo della legge idrostatica (88), come  $p_{,z} = -\rho g$ , mentre la pressione,  $p$ , può essere sostituita con  $\rho R T$  usando la legge dei gas perfetti. Si ottiene quindi:

$$\frac{1}{\vartheta} \vartheta_{,z} - \frac{1}{T} T_{,z} = \frac{R}{c_p} \frac{\rho g}{\rho R T} = \frac{g}{c_p} \frac{1}{T}$$

Dalla quale possiamo ricavare l'espressione che mette in relazione il gradiente verticale di temperatura potenziale con quello della temperatura assoluta:

$$\vartheta_{,z} = \frac{\vartheta}{T} \left( T_{,z} + \frac{g}{c_p} \right) \quad (92)$$

Quest'ultima equazione permette anche di calcolare a quanto corrisponde il *gradiente di temperatura adiabatica*. Infatti, abbiamo visto che le condizioni di stabilità neutra corrispondono ad un gradiente di temperatura verticale pari a quello adiabatico:  $\Gamma_{ad}$ ; ma corrispondono anche a una stratificazione nella quale la temperatura potenziale è costante con la quota, e perciò  $\vartheta_{,z} = 0$ . Annullando quindi  $\vartheta_{,z}$  nell'equazione (92) ricaviamo  $T_{,z}$  in condizioni adiabatiche:

$$\Gamma_{ad} = - \frac{g}{c_p} \approx -0.98 \frac{^\circ\text{C}}{100\text{m}}$$

La quale stabilisce che, in condizioni di stratificazione neutra, la temperatura assoluta diminuisce di circa un grado ogni cento metri di quota.

## 9.2. Evoluzione giornaliera dello strato limite atmosferico

La struttura dello strato limite atmosferico è principalmente determinata dalle condizioni meteorologiche e dall'avvicinarsi del giorno e della notte che, a loro volta, determinano le forzanti cui lo strato limite è soggetto. I meccanismi in gioco sono principalmente 3 (Figura 37):

1. *L'irraggiamento solare*, che avviene principalmente nello spettro del visibile, attraversa l'atmosfera senza essere assorbito se non in minima parte e raggiunge il suolo, poiché l'aria è quasi trasparente a questa gamma di lunghezze d'onda. Il suolo assorbe l'energia proveniente dal sole e si scalda, cedendo il suo calore all'aria sovrastante per convezione. Questo fattore è significativo di giorno e in presenza di cielo sereno. A causa del riscaldamento dell'aria dal basso, si genera una produzione positiva di energia cinetica turbolenta.
2. Il suolo, come tutti i corpi, cede calore per *irraggiamento verso l'alto*. Il calore così ceduto non viene assorbito dall'aria ma in assenza di ostacoli va perduto verso il cielo e il suolo tende a raffreddarsi. Questo fenomeno è significativo di notte, quando viene a mancare l'irraggiamento solare (altrimenti largamente prevalente), caso in cui il suolo raggiunge temperature inferiori a quelle dell'aria

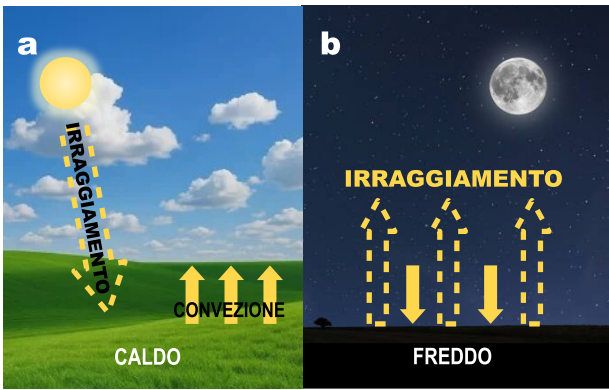


FIGURA 37

non hanno modo di agire e la produzione di energia cinetica turbolenta dovuta alle forze di galleggiamento non è presente.

Durante l'avvicinarsi del giorno e della notte questi fattori si alternano tra loro determinando la struttura dello strato limite atmosferico e la sua evoluzione giornaliera.

Consideriamo, come primo caso, un giorno di bel tempo, con cielo sereno e vento leggero, che non superi 1-2 m/s. La produzione meccanica di energia cinetica turbolenta sarà dunque trascurabile rispetto alla produzione per galleggiamento, che evolve al succedersi del giorno e della notte.

All'alba, l'ingresso della radiazione solare provoca un progressivo riscaldamento del suolo (Figura 37a), che durante la notte si era raffreddato. Si sviluppa così uno strato turbolento (lo *Strato Limite Convettivo*), dominato dalla convezione ( $P_G > 0$ ), il quale, man mano che l'irraggiamento solare diventa più intenso e la produzione di energia cinetica delle forze di galleggiamento cresce, erodendo lo strato stabile che, come vedremo, si è formato nella notte precedente. Lo spessore dello strato limite convettivo cresce fino a raggiungere, verso la fine della mattina, lo *Strato di Inversione*, uno strato caratterizzato da una stratificazione termica stabile che, in condizioni di bel tempo, confina lo sviluppo dello strato limite atmosferico durante l'intero ciclo giornaliero (Figura 38).

Nel pomeriggio, l'irraggiamento solare diminuisce gradualmente, fino a mancare del tutto al tramonto. Viene quindi meno il riscaldamento del suolo, la forzante termica che alimentava la convezione turbolenta ( $P_G \approx 0$ ). Lo strato limite convettivo si trasforma così nello *Strato Limite Residuo*, nel quale la turbolenza, sviluppata nella fase precedente, decade lentamente. Contemporaneamente, il bilancio radiativo al suolo diventa rapidamente negativo perché, in assenza dell'apporto dell'irraggiamento solare, prevale il calore ceduto dal suolo verso il cielo per irraggiamento. Poiché l'aria è fondamentalmente trasparente all'irraggiamento, il calore ceduto dal suolo si allontana indefinitamente e va perduto (Figura 37b) e il suolo diventa più freddo dell'aria sovrastante. Il raffreddamento dal basso rende negativa la produzione di energia cinetica turbolenta dovuta alle forze di galleggiamento ( $P_G < 0$ ), con il risultato di smorzare la turbolenza fino a sviluppare uno *Strato Stabile Notturmo* che, con il progredire della notte, cresce di spessore a spese del sovrastante strato limite residuo. Il ciclo ricomincia all'alba del giorno dopo, con la nascita di un nuovo strato limite convettivo che gradualmente erode lo strato stabile notturno.

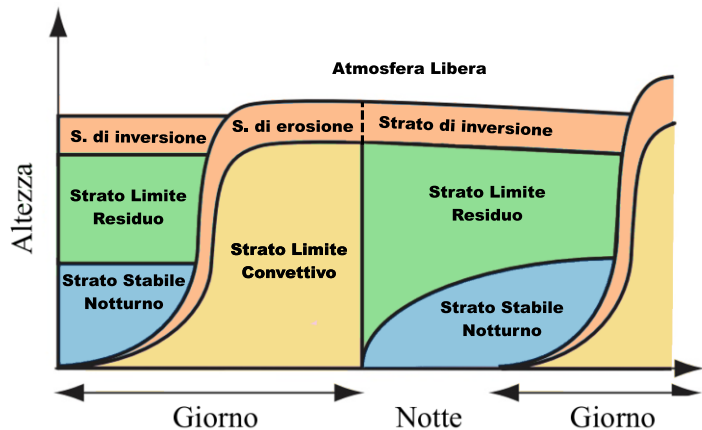


FIGURA 38

### 9.2.1. Strato Limite Convettivo

Nello Strato Limite Convettivo si sviluppano, a partire dal suolo, piccole correnti d'aria calda soggette a una forza di galleggiamento positivo che, man mano che salgono, si uniscono tra loro trasformandosi in strutture più grandi, le cosiddette *correnti ascensionali termiche* che hanno un'estensione orizzontale di alcune centinaia di metri e con un massimo di velocità verticale che raggiunge i 2-5 m/s. Queste correnti calde

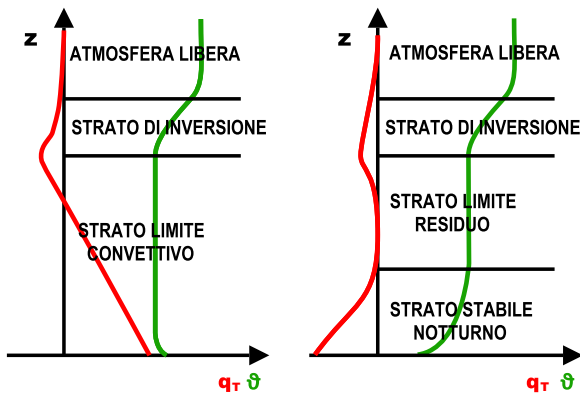


FIGURA 39 – PROFILI DI TEMPERATURA POTENZIALE E FLUSSO DI CALORE TURBOLENTO IN CONDIZIONI DIURNE (SINISTRA) E NOTTURNE (DESTRA)

continuano il loro moto fino ad incontrare il sovrastante *Strato di Inversione*, uno strato caratterizzato da una stratificazione stabile, che separa lo strato limite atmosferico dall'*Atmosfera Libera* che si trova al di sopra di esso.

Lo Strato Limite Convettivo è uno strato fortemente turbolento a causa del significativo flusso di calore positivo (dal basso verso l'alto)  $q_T = \overline{\vartheta'w'} > 0$  e quindi della elevata produzione dovuta al galleggiamento  $P_G = \frac{\overline{\vartheta'w'}}{g\bar{\vartheta}} > 0$ . Per questo è chiamato anche *Strato Ben*

*Mescolato*. Poiché l'energia proviene solo dal basso (il suolo) e le forze di galleggiamento agiscono solo in direzione verticale, la struttura della turbolenza che lo caratterizza è fortemente anisotropa e non omogenea. Essa è caratterizzata dal generarsi, svilupparsi ed avvicinarsi delle correnti ascensionali termiche, alte come l'intero strato limite convettivo e leggermente più larghe, caratterizzate da velocità verticali positive intense. Corrispondentemente, si formano correnti discensionali di aria relativamente più fredda che arrivano fino in prossimità del suolo. Queste sono più ampie come area orizzontale interessata, ma caratterizzate da velocità verticali inferiori. Si tratta di uno strato instabile e la sua temperatura potenziale media è relativamente costante al suo interno, proprio grazie all'intenso mescolamento (Figura 39). Lo strato cresce di spessore nel tempo erodendo lo strato stabile notturno generatosi la notte precedente, attraverso un meccanismo di mescolamento unidirezionale nel quale l'aria appartenente allo strato stabile va a far parte dello strato ben mescolato, ma non accade il contrario. Il motivo sta nel fatto che lo strato stabile è composto di fluido disposto ordinatamente (strati di fluido più denso in basso e strati di fluido meno denso in alto), quindi corrisponde ad uno stato di bassa entropia; lo strato convettivo, al contrario, è turbolento e non c'è ordine nella disposizione del fluido che si trova quindi in uno stato di alta entropia. Perciò, se del fluido appartenente allo strato convettivo andasse a far parte dello strato stabile, passando dal disordine all'ordine, dovrebbe diminuire la sua entropia, e questo, in forza del secondo principio della termodinamica, non è possibile. Infine, è importante osservare che, essendo uno strato dominato da grandi strutture, non è applicabile una chiusura di tipo flusso-gradiente mediante un coefficiente di dispersione turbolenta. Ne è prova evidente il fatto che, pur essendo il gradiente di temperatura verticale nullo a causa dell'intenso mescolamento ( $\overline{\vartheta',z}=0$ ), il flusso di calore turbolento,  $q_T = \overline{\vartheta'w'}$ , è positivo.

### 9.2.2. Strato Stabile Notturmo

Dopo il tramonto, il suolo smette di ricevere il flusso di calore derivante dall'irraggiamento solare, ma, come ogni altro corpo, continua a cedere calore per irraggiamento. Quando il cielo è sereno, questo calore va disperso e il suolo diventa più freddo dell'aria sovrastante. Il flusso di calore,  $q_T = \overline{\vartheta'w'}$ , negativo (verso il basso) fa sì che anche la produzione  $P_G = \overline{\vartheta'w'}/g\bar{\vartheta}$  sia negativa. La turbolenza diminuisce permettendo una stratificazione del fluido nella quale la temperatura potenziale aumenta con la quota (Figura 39). In questo strato, le perturbazioni eventualmente presenti, ad esempio a causa della produzione meccanica dovuta ad un vento leggero, vengono rapidamente smorzate. Lo smorzamento avviene prevalentemente nella direzione di azione delle forze di galleggiamento, quella verticale. Pur con qualche limite, è possibile applicare chiusure di tipo flusso-gradiente, ma, per le caratteristiche di stabilità di questo strato, la dispersione turbolenta è molto ridotta.

### 9.2.3. Strato Limite Residuo

Lo strato Limite Residuo si forma quando viene a mancare l'irraggiamento solare e il termine di produzione di energia cinetica dovuta al galleggiamento si annulla ( $P_G \approx 0$ ). La turbolenza, non più alimentata dal flusso di calore proveniente dal suolo, dissipa lentamente la sua energia per effetto della viscosità. A causa della cascata di energia della turbolenza le grandi strutture convettive decadono in vortici sempre più piccoli e, mancando una forzante direzionale, sempre più isotropi. L'assenza di forzanti termiche, associata al mescolamento dovuto alla turbolenza residua, fa sì che la temperatura potenziale sia uniforme. Si tratta dunque di uno strato neutro e caratterizzato da turbolenza omogenea e isotropa, prevalentemente di piccola scala: condizioni adeguate all'applicazione di chiusure di tipo flusso-gradiente.

### 9.2.4. Strato di Inversione

Durante tutto il ciclo giornaliero lo strato limite atmosferico è separato dall'atmosfera libera da uno strato caratterizzato da una intensa stratificazione stabile, che limita fortemente gli scambi di massa tra i due strati e ne disaccoppia la dinamica: lo Strato di Inversione; così chiamato perché in esso la temperatura cresce con la quota. A causa della sua presenza, gli inquinanti rilasciati in prossimità del suolo rimangono intrappolati nello strato limite atmosferico, determinando concentrazioni particolarmente elevate. Questo fa sì che, durante l'inverno, quando le emissioni nelle aree urbane sono particolarmente alte a causa del riscaldamento degli edifici, i periodi di bel tempo con poco vento siano particolarmente critici dal punto di vista della qualità dell'aria.

### 9.2.5. Strato limite neutro

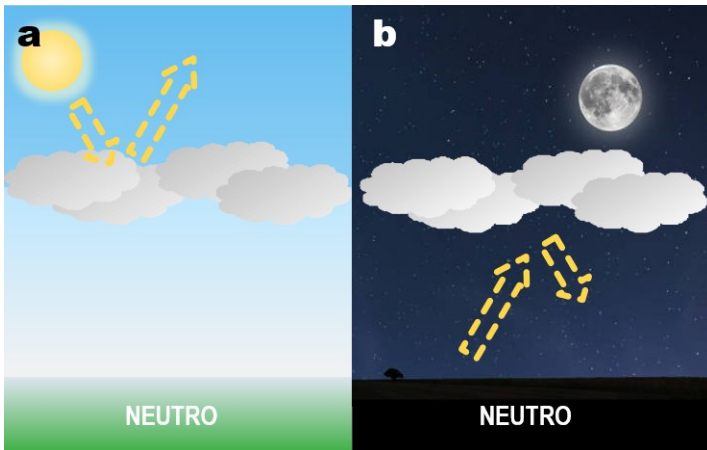


FIGURA 40

Nel paragrafo precedente abbiamo formulato l'ipotesi di vento leggero ( $P_M \approx 0$ ), e cielo sgombro da nubi. Sotto queste ipotesi, la dinamica del ciclo giornaliero è fortemente condizionata dal bilancio radiativo del suolo, positivo di giorno, e negativo di notte e dalla produzione di energia cinetica turbolenta dovuta al galleggiamento, che svolge un ruolo prevalente (positivo o negativo) rispetto alla produzione meccanica ( $|P_G| \gg |P_M|$ ). La presenza di una copertura nuvolosa, o di un vento medio intenso possono cambiare questo scenario. Le nubi inibiscono gli scambi radiativi (Figura 40). Di giorno l'irraggiamento solare non raggiunge il suolo, che così non si riscalda; di notte il calore

irraggiato dal suolo non viene disperso ma riflesso dalle nubi nuovamente verso il basso, e il suolo non si raffredda. Di conseguenza, il suolo e l'aria sovrastante omogeneizzano rapidamente la loro temperatura, facendo mancare la forzante termica e riducendo il valore di  $P_G$ . La presenza di vento intenso, invece, fa sì che i gradienti di velocità indotti nello strato limite aumentino il valore della produzione meccanica,  $P_M$ . Il risultato, in entrambi i casi, è che la produzione meccanica assume un ruolo preponderante rispetto alla produzione dovuta alle forze di galleggiamento ( $|P_G| \ll |P_M|$ ) e che si sviluppi uno *Strato Limite Neutro* con le caratteristiche descritte in dettaglio nel capitolo 7. In questo caso, la turbolenza è ragionevolmente isotropa, non omogenea perché dipende in modo determinante dalla distanza dalla parete, e dominata prevalentemente dalle piccole scale. È quindi possibile utilizzare chiusure di tipo flusso-gradiente per le quali esistono modelli consolidati in letteratura.

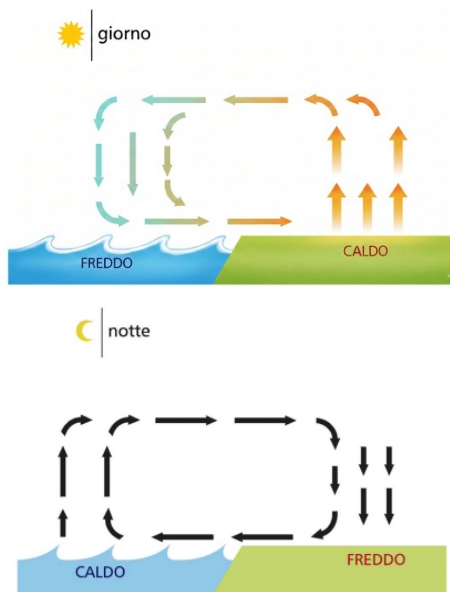


Figura 41

## 9.3. Regime di brezza

Nelle zone costiere la struttura dello strato limite atmosferico è profondamente influenzata dalla presenza del ciclo giornaliero di brezza. La forza motrice delle brezze è il gradiente termico orizzontale determinato dalla maggiore capacità termica specifica del mare rispetto a quella del suolo. Mentre la temperatura del suolo aumenta e diminuisce seguendo il ciclo giornaliero, la temperatura superficiale del mare rimane approssimativamente costante a causa della maggiore capacità termica specifica e del rimescolamento verticale degli strati marini superficiali.

Di giorno, dunque, la terra si riscalda molto di più del mare, sotto l'effetto dei raggi solari. Essa riscalda conseguentemente l'aria a suo contatto, che diventa più leggera di quella sopra il mare. Quest'ultima, quindi, essendo più pesante, tende a portarsi sulla terra e a scivolare sotto all'aria calda, che, dal canto suo, si innalza. Corrispondentemente, ad una quota che può variare tra i 500m e

1500m, si forma una corrente di ritorno che, muovendosi dalla terra verso il mare, chiude la cella di circolazione. Durante il giorno la cella di brezza si propaga progressivamente verso l'interno, anche per 10-20 km. Di notte, avviene il fenomeno inverso: il raffreddamento della terra, dovuto alla cessione radiativa di calore, è più rapido di quello del mare. La terra diventa più fredda dell'acqua e l'aria in prossimità del suolo fluisce dalla terra verso il mare, mentre in quota si forma una corrente di ritorno che chiude la cella. Questo regime è solitamente più debole della brezza di mare a causa del minor gradiente termico notturno e della stabilità atmosferica tipica della notte, e si propaga in misura molto minore verso l'interno.



FIGURA 42 – LE CIMINIERE DI MACCHIAREDDU VISUALIZZANO LA CELLA DI BREZZA NEL GOLFO DI CAGLIARI NELLA TARDA MATTINATA DI UN GIORNO INVERNALE. LA PARTE BASSA DEL PENNACCHIO RISENTE DELLA BREZZA DI MARE E VA VERSO DESTRA, LA PARTE ALTA RISENTE DELLA CORRENTE DI RITORNO E SI MUOVE NELLA DIREZIONE OPPOSTA.

Questo regime di venti a ciclo giornaliero deve essere tenuto in conto quando si considera la dispersione degli inquinanti, per esempio, nel caso di una città situata sulla costa, perché garantisce un afflusso costante di aria pulita durante il giorno, per effetto della brezza di mare, mentre, durante la notte, la brezza di terra contribuisce alla rimozione degli inquinanti rilasciati nella zona urbana trasportandoli verso il mare.

## 9.4. Isola di calore urbana

Un fenomeno legato all'urbanizzazione del territorio che genera effetti significativi è la cosiddetta isola di calore urbana: un fenomeno microclimatico in cui la temperatura dell'aria nelle aree urbane risulta significativamente più elevata rispetto a quella delle zone rurali circostanti. Questa differenza può raggiungere 4-7°C, soprattutto nelle ore serali e notturne. Il fenomeno nasce dall'intreccio non lineare tra bilancio radiativo, proprietà dei materiali, morfologia, flussi turbolenti e comportamenti energetici della città: un sistema che, sotto forzante solare e con particolari condizioni di stabilità, autorganizza un microclima persistente.

Durante il giorno la zona urbana si riscalda con maggior intensità dell'ambiente rurale circostante per una somma di fattori: i materiali delle pavimentazioni stradali e degli edifici hanno una bassa *albedo* (altrimenti detta *riflettanza*, ovvero la frazione di energia con cui viene irraggiata una superficie che viene diffusa dalla superficie stessa). Infatti, la quantità di energia solare assorbita da una superficie è il complemento ad uno dell'albedo. Anche la conformazione morfologica complessa delle aree costruite contribuisce all'intrappolamento dei raggi solari, e rende meno intenso il mescolamento dell'aria per effetto della ventilazione. La riduzione degli alberi e del verde urbano, unito all'impermeabilizzazione del suolo, limita l'evapotraspirazione, un fenomeno che contribuisce significativamente al raffreddamento naturale. Emissioni antropiche aggiuntive, come traffico, attività industriali, climatizzatori e sistemi di riscaldamento generano ulteriore calore che si aggiunge a quello dell'irraggiamento solare. L'effetto è particolarmente intenso durante la notte poiché i materiali con cui sono realizzate strade ed edifici hanno una elevata capacità termica, perciò, accumulano grandi quantità di calore durante il giorno per continuare a rilasciarlo nella notte.

La morfologia urbana un moltiplicatore del fenomeno. I canyon stradali e l'altezza e densità degli edifici riducono il fattore di vista del cielo (*sky view factor*), cioè la porzione di volta celeste "vista" dalle superfici: meno cielo "visibile" significa minor capacità di raffreddarsi per irraggiamento notturno. Allo stesso tempo, i volumi costruiti canalizzano e a volte inibiscono la ventilazione, cosicché l'aria calda ristagna e la turbolenza di origine meccanica che pure si genera lungo le facciate non basta a compensare. Si aggiunga che aerosol e gas urbani possono alterare i flussi radiativi

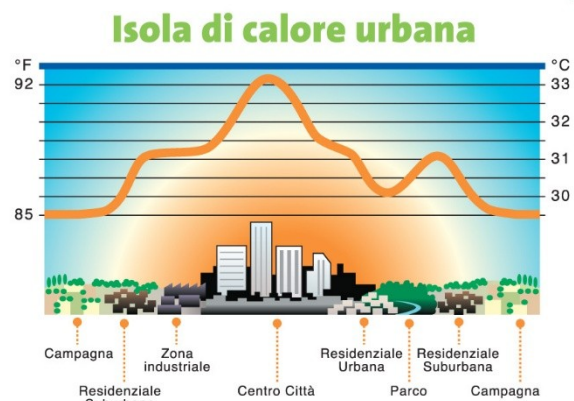


FIGURA 43

(assorbendo e diffondendo la radiazione), prolungando il calore intrappolato: un ulteriore rinforzo, soprattutto nelle notti a causa della stratificazione stabile.

La città funziona come una forzante termica che ridisegna lo strato limite atmosferico urbano. Di giorno, il surplus di calore intensifica la convezione: si formano termiche più energiche che trasportano verso l'alto calore e inquinanti. In giornate umide, la sommità delle termiche può superare il livello di condensazione formando cumuli di bel tempo. Di notte, mentre nelle zone rurali si forma uno strato stabile, la città si raffredda poco: lo strato resta più turbolento e convettivo.

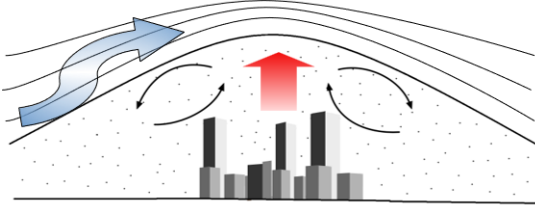


FIGURA 44

Le correnti termiche ascensionali al di sopra dell'area urbana tendono a richiamare aria dalle periferie (una debole convergenza a bassa quota), modulando il rimescolamento e la dispersione degli inquinanti determinando un diverso regime di turbolenza e di scambio tra superficie e atmosfera.

I principali interventi di mitigazione sono:

- Aumentare l'albedo (coperture e pavimentazioni ad alta riflettanza): meno energia assorbita → meno calore da smaltire.
- Verde urbano diffuso (alberi, parchi, tetti verdi): più evapotraspirazione e ombreggiamento.
- Materiali e soluzioni permeabili: favoriscono l'umidificazione del suolo e lo smaltimento del calore per il calore latente dell'evaporazione.
- Forma della città ventilante: corridoi di brezza, allineamenti dei canyon urbani, gestione delle altezze degli edifici.
- Efficienza energetica e riduzione del calore antropico: meno calore immesso soprattutto nei momenti critici.

## 9.5. Il ciclo annuale di stratificazione dei laghi

Benché non riguardi direttamente lo strato limite atmosferico, il ciclo annuale di stratificazione dei laghi è un fenomeno che presenta strette analogie con il ciclo giornaliero di evoluzione dello strato limite atmosferico, e per questo sarà trattato in questo capitolo. L'elemento comune è la ciclicità della forzante termica di superficie (questa volta non il suolo ma la superficie del lago) che con la sua evoluzione periodica determina la struttura della stratificazione e la dinamica della turbolenza.

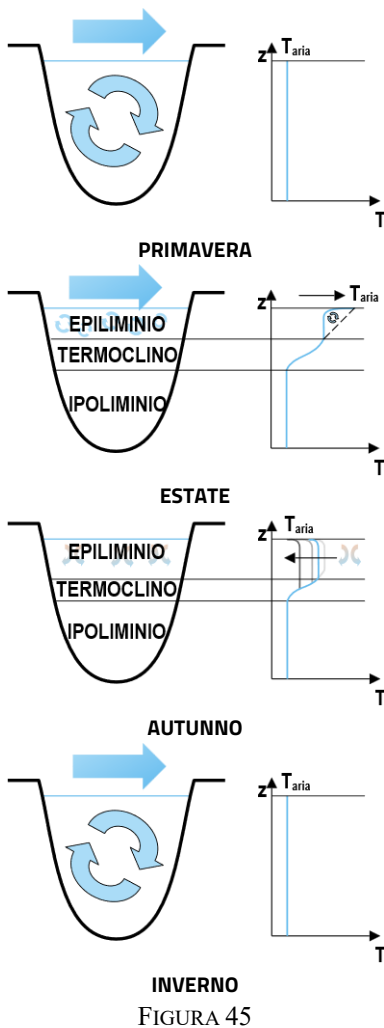
Prendiamo come condizione iniziale quella *primaverile*, nella quale la stratificazione del lago è assente, e la turbolenza generata in superficie dal vento per produzione meccanica si propaga con grande efficienza verso il fondo determinando il rimescolamento completo del lago. Questo stato fisico ha due effetti chiave:

- ventila gli strati profondi rifornendoli di ossigeno disciolto dopo l'isolamento invernale;
- ridistribuisce nutrienti e sostanze accumulate nei sedimenti verso gli strati illuminati, preparando la produttività primaria della stagione calda.

I gradienti di densità sono deboli: il rimescolamento può raggiungere il fondo nei laghi più esposti al vento e la turbolenza ha modo di mescolare l'intera colonna d'acqua mantenendo omogenee la temperatura, l'ossigeno disciolto, i nutrienti e gli eventuali inquinanti rilasciati nel lago.

Con l'avanzare della primavera e l'arrivo *dell'estate*, l'atmosfera sopra il lago si riscalda e genera un flusso di calore verso l'acqua, più fresca, sottostante. Il riscaldamento dall'alto nel lago è speculare al raffreddamento dal basso dello strato limite atmosferico durante la notte: la produzione dovuta alle forze di galleggiamento diventa negativa e negli strati superiori tende a formare una stratificazione stabile con la temperatura crescente con la quota. Contemporaneamente, la produzione meccanica determinata dal vento alla superficie tende a mantenere ben mescolato lo strato più superficiale del lago: si instaura una stratificazione stabile in tre strati:

1. *Epilimnio*: lo strato superficiale caldo (tipicamente  $> 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  in climi temperati), ben rimescolato dall'azione del vento. Qui si concentra la fotosintesi, la produzione primaria e la maggior parte della vita planctonica.
2. *Termoclino*: uno strato stabile dove la temperatura decresce rapidamente (anche  $1\text{--}3\text{ }^{\circ}\text{C}$  per metro o più) con la profondità. Dal punto di vista della meccanica dei fluidi, è una barriera al



mescolamento: l'energia del vento si dissipa nell'epilimnio e solo raramente penetra nel termoclino per mezzo di onde interne di Kelvin-Helmholtz e instabilità locali.

3. *Ipolimnio*: gli strati profondi freddi, densi e poco ossigenati. Qui la turbolenza è debole; il consumo di ossigeno da parte dei processi di decomposizione può portare a ipossia o anossia se la stratificazione persiste a lungo o la produttività è elevata.

Nel corso dell'estate il termoclino tende lentamente a scendere (erosione dall'alto per vento e raffreddamenti episodici), ma la struttura a tre strati si mantiene finché il bilancio energetico superficiale resta positivo.

La situazione cambia all'arrivo dell'autunno, quando la temperatura dell'aria sovrastante si abbassa. Il raffreddamento dall'alto ha un effetto corrispondente al riscaldamento dal basso nello strato limite atmosferico durante il giorno, con una produzione positiva delle forze di galleggiamento che innesca la convezione ed il rimescolamento turbolento dell'epilimnio. La turbolenza stessa erode lentamente lo strato stabile del termoclino finché, all'arrivo dell'inverno, il termoclino non viene completamente eroso e, non trovando più ostacoli, il rimescolamento coinvolge l'intero spessore del lago.

In questa fase, il mescolamento ossigena gli strati profondi, dopo l'isolamento estivo, e redistribuisce nutrienti e sostanze ridotte verso la superficie, chiudendo il ciclo produttivo annuale e riportando il sistema verso condizioni fisiche più uniformi nella successiva primavera.

## 10. DISPERSIONE NELLE CORRENTI

Nella meccanica dei fluidi abbiamo visto che le equazioni generali di bilancio, quella di Navier-Stokes, di continuità, eccetera, che in generale sono pressoché impossibili da risolvere direttamente, possono essere utilmente ridotte ad una forma unidimensionale, le equazioni delle correnti, che possono essere facilmente risolte, permettendo così di ottenere previsioni quantitative per le quantità medie sulle sezioni regolari, fondamentali dal punto di vista ingegneristico. In questo capitolo faremo altrettanto per l'equazione della dispersione turbolenta, arrivando ad una formulazione che permette di stimare l'andamento della concentrazione media sulla sezione regolare lungo l'asse della corrente.

Al fine di mantenere la trattazione analitica la più leggera possibile, in questa sede considereremo una configurazione geometrica molto semplice: una corrente uniforme in un alveo infinitamente largo nel quale si sviluppa uno strato limite turbolento che avrà le caratteristiche studiate nel capitolo 7. La trattazione potrà comunque essere estesa al caso di corrente gradualmente variata approssimando il fenomeno come una successione di casi moto uniforme con profondità diversa. È importante notare che la stessa trattazione può essere estesa inoltre con buona approssimazione alla dispersione nello strato limite atmosferico in una zona pianeggiante e considerando che l'estremo superiore dello strato limite atmosferico corrisponda al pelo libero della corrente.

### 10.1. Analogia di Reynolds

Vedremo più avanti che la dispersione turbolenta in direzione verticale svolge un ruolo fondamentale nel processo di dispersione nello strato limite turbolento sopra una superficie piana. Per questo motivo, prima di entrare nel merito della dispersione unidimensionale, sviluppiamo la cosiddetta *analogia di Reynolds*, che ci permetterà, sulla base delle informazioni che abbiamo ricavato sullo strato limite turbolento nel capitolo 7., di ricavare una stima attendibile del coefficiente di dispersione turbolenta in direzione trasversale,  $D_{Tz}$ .

---

*L'analogia di Reynolds consiste nell'ipotizzare che il meccanismo di dispersione turbolenta di uno scalare passivo sia lo stesso che governa la dispersione della quantità di moto.*

---

Nello strato limite turbolento la turbolenza è di piccola scala ed è quindi ammissibile utilizzare chiusure di tipo K. Seguendo la trattazione del paragrafo 8.3., ricordiamo che il coefficiente  $D_{Tz}$  è il coefficiente che lega il flusso turbolento di tracciante in direzione  $z$ ,  $\overline{C'w'}$ , con il gradiente di concentrazione media,  $\overline{C}_{,z}$  (equazione (82)). D'altra parte, abbiamo visto che  $\nu_T$ , il coefficiente di viscosità turbolenta, può essere letto come il coefficiente di dispersione turbolenta della quantità di moto (equazione (83)). *Se il meccanismo di trasporto turbolento dello scalare passivo e della quantità di moto è lo stesso, possiamo ipotizzare che anche i coefficienti  $\nu_T$  e  $D_{Tz}$  siano uguali tra loro:*

$$D_{Tz} = \nu_T$$

La base logica sta nel fatto che i flussi turbolenti sono generati da spostamenti casuali di particelle fluide che, passando da un punto all'altro dello strato limite, trasportano con loro tutte le quantità fisiche che le caratterizzano; perciò, sia il tracciante, sia la quantità di moto, con un meccanismo equivalente. Sulla base di quanto abbiamo imparato sullo strato limite turbolento è possibile conoscere con buona approssimazione la viscosità turbolenta e, utilizzando l'analogia di Reynolds, possiamo equiparare ad essa il coefficiente di dispersione turbolenta  $D_{Tz}$ , parametro importante per la dispersione nelle correnti.

Ricaviamo dunque il valore della viscosità turbolenta. Dall'equazione (83) abbiamo:

$$\nu_T = \frac{\tau_{Rxx}}{\rho_0 \overline{u}_{,z}} \quad (93)$$

### 10.1.1. Sforzo tangenziale nello strato limite

Per calcolare l'andamento degli sforzi tangenziali nello strato limite turbolento consideriamo, secondo quanto indicato in precedenza, un alveo infinitamente largo, di profondità  $\delta$ , e un flusso stazionario, con la velocità media allineata secondo l'asse delle  $x$ ; assumiamo inoltre che lo strato limite sia ormai completamente sviluppato in modo che le grandezze turbolente non varino più lungo  $x$ . Supponiamo infine di essere in condizioni neutre, ovvero che non ci siano variazioni di densità apprezzabili perché l'acqua è dolce e la temperatura uniforme. Avremo quindi:

1.  $\bar{a}_{,t} = 0$  stazionarietà;
2.  $(\text{turb.})_{,x} = 0$  strato limite completamente sviluppato;
3.  $\bar{w} = 0$  velocità media diretta come l'asse  $x$ .

Scriviamo quindi l'equazione di continuità  $u_{j,j} = 0$ . Sull'indice  $j$  ci sono le somme e gli faremo assumere i valori  $j = x, z$  invece che  $j = 1, 2$ , in virtù del fatto che utilizziamo il sistema di riferimento  $\{x, y, z\}$  invece che  $\{x_1, x_2, x_3\}$ .

$$\bar{u}_{,x} + \bar{w}_{,z} = 0$$

e osservando che  $\bar{w} = 0$ , l'equazione si riduce a:

$$4. \quad \bar{u}_{,x} = 0.$$

Scriviamo ora l'equazione di Reynolds (51) proiettata lungo l'asse  $x$  e l'asse  $z$ . L'indice  $i$  rappresenta la componente e lo porremo uguale ad  $x$  nella prima e a  $z$  nella seconda equazione.:

$$\begin{cases} \bar{u}_{1,t} + \bar{u}(\bar{u}_{4,x}) + \bar{w}\bar{u}_{3,z} = -gz_{,x} \frac{1}{\rho_0} \bar{p}_{,x} + \nu (\bar{u}_{4,xx} + \bar{u}_{1,zz}) - \overline{(u'u')}_2 - \overline{(u'w')}_z \\ \bar{w}_{1,3,t} + \bar{u}(\bar{w}_{3,x}) + \bar{v}\bar{w}_{3,z} = -gz_{,z} - \frac{1}{\rho_0} \bar{p}_{,z} + \nu (\bar{w}_{3,xx} + \bar{w}_{3,zz}) - \overline{(w'u')}_2 - \overline{(w'w')}_z \end{cases}$$

Osserviamo che i termini in **blu** si annullano per l'ipotesi indicata dal numero inferiore. Introducendo il carico piezometrico medio  $\bar{h} = z + p/\gamma$ , rimane dunque:

$$\begin{cases} g\bar{h}_{,x} = \nu \bar{u}_{,zz} - \overline{(u'w')}_z \\ g\bar{h}_{,z} = -\overline{(w'w')}_z \end{cases}$$

Integriamo la seconda rispetto a  $z$ :

$$g\bar{h} = -\overline{w'^2} + C(x)$$

e deriviamola rispetto a  $x$ :

$$\bar{h}_{,x} = -\overline{(w'^2)}_{2,x} - \frac{C(x)_{,x}}{g} \rightarrow f(x)$$

Osservando che il primo termine a secondo membro è nullo per l'ipotesi di turbolenza completamente sviluppata, si deduce che  $\bar{h}_{,x}$  è funzione della sola variabile  $x$  e non di  $z$ . Questa considerazione ci permette di integrare la prima delle due precedenti equazioni rispetto a  $z$ , sapendo che  $\bar{h}_{,x}$  non dipende da  $z$ , e ottenendo quindi:

$$g\bar{h}_{,x} z = \nu \bar{u}_{,z} - \overline{u'w'} + C_1$$

La costante di integrazione  $C_1$  si ottiene calcolando l'equazione appena ottenuta in  $z = 0$ , dove gli sforzi di Reynolds sono nulli perché, alla parete, sia la velocità che le sue fluttuazioni sono nulle per la condizione di

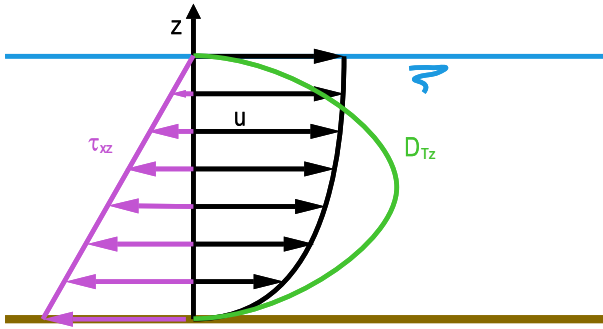


FIGURA 46

aderenza alla parete solida:

$$v\bar{u}_{,z} |_{z=0} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{\tau_0}{\rho_0}$$

Avendo ricordato che  $\tau_0 = \mu\bar{u}_{,z}|_{z=0}$  indica lo sforzo tangenziale medio alla parete. Sostituendo, l'equazione precedente diventa:

$$g\bar{h}_{,x} z = v\bar{u}_{,z} - \overline{u'w'} - \frac{\tau_0}{\rho_0}$$

Valutiamo questa equazione per  $z = \delta$ , cioè al pelo libero, dove possiamo ipotizzare che lo sforzo turbolento sia nullo perché il pelo libero limita le fluttuazioni di velocità, e che lo sforzo viscoso  $\tau_{xz} = \mu\bar{u}_{,z}|_{z=\delta}$ , sia nullo perché rappresenta l'attrito tra acqua e aria sovrastante, che è senz'altro trascurabile. Rimane quindi solo:

$$g\bar{h}_{,x} \delta = -\frac{\tau_0}{\rho_0} \rightarrow g\bar{h}_{,x} = -\frac{\tau_0}{\rho_0 \delta}$$

Sostituendo l'espressione di  $g\bar{h}_{,x}$  appena trovata nell'equazione precedente si ottiene:

$$-\frac{\tau_0}{\rho_0 \delta} z = v\bar{u}_{,z} - \overline{u'w'} - \frac{\tau_0}{\rho_0}$$

ovvero:

$$\frac{\tau_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right) = v\bar{u}_{,z} - \overline{u'w'}$$

Il primo termine a secondo membro è lo sforzo tangenziale viscoso,  $v\bar{u}_{,z} = \tau_{xz}/\rho_0$ , mentre il secondo è lo sforzo di Reynolds,  $-\overline{u'w'} = -\frac{\tau_{Rxz}}{\rho_0}$ , entrambi divisi per la densità. Abbiamo ricavato quindi una legge che indica che la somma dello sforzo viscoso e turbolento (lo sforzo totale) ha un andamento lineare all'interno dello strato limite (Figura 46):

$$\frac{\tau_{Txz}}{\rho_0} = \frac{\tau_{xz} + \tau_{Rxz}}{\rho_0} = \frac{\tau_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right) \quad (94)$$

che rappresenta il numeratore dell'espressione del coefficiente di viscosità turbolenta (93).

### 10.1.2. Il coefficiente di dispersione turbolenta verticale

Dato che il numero di Reynolds del flusso è molto alto, appena al di fuori del sottostrato laminare, che ha uno spessore di pochi millimetri, gli sforzi viscosi diventano trascurabili rispetto a quelli turbolenti. Perciò possiamo considerare che il termine a numeratore nell'equazione (93) sia approssimabile come:  $\tau_{Rxz} \approx \tau_{xz} + \tau_{Rxz} = \tau_{Txz}$ ; il quale, ricavando dalla definizione dei velocità d'attrito  $\tau_0/\rho_0 = u_*^2$ , può essere scritto come:

$$\frac{\tau_{Rxz}}{\rho_0} \approx u_*^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right) \quad (95)$$

Per ottenere il denominatore dell'espressione di  $\nu_T$  (93), ovvero  $\bar{u}_{,z}$ , occorre calcolare la derivata del profilo logaritmico (70) ricavata nel paragrafo 7.2.2., sfruttando il fatto che sia rappresentativa per la quasi totalità dello strato limite, la quale risulta:

$$\bar{u}_{,z} = \frac{u_*}{\kappa z}$$

Sostituendo infine numeratore e denominatore, la (93) diventa:

$$v_T = \frac{\tau_{Rxz}}{\rho_0 \bar{u}_{rz}} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right) \frac{kz}{u_*}$$

La quale può essere scritta in funzione della ordinata adimensionale  $\eta = z/\delta \rightarrow z = \eta \delta$  che è l'espressione cercata della viscosità turbolenta e che, grazie all'analogia di Reynolds, assumiamo rappresentativa anche del coefficiente di dispersione turbolenta di un tracciante passivo in direzione verticale:

$$v_T = D_{Tz} = k(1 - \eta)\eta \cdot \delta u_* = D_{Tz}^* u_* \delta \tag{96}$$

Leggiamo l'espressione ottenuta: essa si compone di una parte (in blu) adimensionale, universalmente valida, che possiamo indicare con  $D_{Tz}^*$ , e di una parte dimensionale, nella quale compaiono  $\delta$  e  $u_*$ , che sono le scale che governano il fenomeno. Il coefficiente  $D_{Tz}$  ha un andamento parabolico con il massimo al centro (Figura 46) ed è linearmente proporzionale allo spessore dello strato limite e alla velocità d'attrito, ovvero alla radice quadrata dello sforzo di taglio alla parete,  $\tau_0$ .

### 10.2. Equazione della dispersione per le correnti

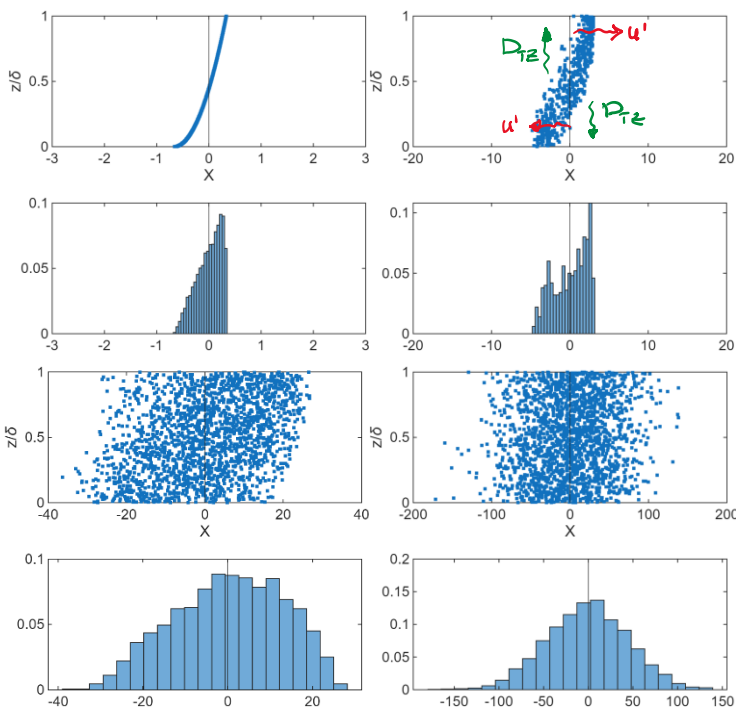


FIGURA 47 – SIMULAZIONE LAGRANGIANA DELLA DISPERSIONE DI UNA LINEA VERTICALE DI TRACCIANTE IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE TRASLA CON LA VELOCITÀ MEDIA DELLA CORRENTE. IN ALTO LA POSIZIONE DELLE PARTICELLE, IN BASSO LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ. LE PARTICELLE SI MUOVONO CON LA VELOCITÀ MEDIA SOLO IN DIREZIONE ORIZZONTALE E SONO SOGGETTE AD AGITAZIONE TURBOLENTE SOLO IN DIREZIONE VERTICALE.

che, immediatamente dopo il rilascio, la linea di tracciante è solo deformata orizzontalmente. Successivamente la dispersione turbolenta verticale ha il suo effetto e la nuvola si uniforma verticalmente, fin quando, abbastanza lontano dalla sorgente, il tracciante si distribuisce uniformemente lungo la verticale. A questo punto, visto che il numero di passi compiuto da ciascuna particella è diventato molto grande, la distribuzione orizzontale delle particelle diventa gaussiana in virtù del teorema del limite centrale (ultimo grafico in basso a destra in Figura 47). *Da questo punto in poi la situazione non cambia: si ha una nuvola di tracciante, uniforme lungo la verticale e distribuito orizzontalmente secondo una gaussiana che si allarga progressivamente nel tempo.*

Immaginiamo di rilasciare, nella corrente a pelo libero che fluisce nell'alveo infinitamente largo sinora considerato, una linea verticale di tracciante e seguiamo la sua dispersione della nuvola. La dispersione è dovuta principalmente a due effetti che si combinano tra di loro (Figura 47):

- la deformazione della nuvola in direzione orizzontale (freccie rosse), dovuta al fatto che la velocità orizzontale media varia con la quota dato il suo profilo logaritmico;
- la dispersione turbolenta in direzione verticale (freccie verdi in figura).

Il primo effetto, dovuto alla presenza di un gradiente verticale di velocità, tende ad aumentare la dimensione orizzontale della nuvola; il secondo effetto tende ad uniformare la nuvola in direzione verticale. *I risultati sperimentali ci dicono, inoltre, che il contributo della dispersione turbolenta in direzione orizzontale ( $D_{Tx}$ ) è trascurabile rispetto a quello combinato dei due precedenti.*

Esaminando i grafici in figura si osserva che, immediatamente dopo il rilascio, la linea di tracciante è solo deformata orizzontalmente. Successivamente la dispersione turbolenta verticale ha il suo effetto e la nuvola si uniforma verticalmente, fin quando, abbastanza lontano dalla sorgente, il tracciante si distribuisce uniformemente lungo la verticale. A questo punto, visto che il numero di passi compiuto da ciascuna particella è diventato molto grande, la distribuzione orizzontale delle particelle diventa gaussiana in virtù del teorema del limite centrale (ultimo grafico in basso a destra in Figura 47). *Da questo punto in poi la situazione non cambia: si ha una nuvola di tracciante, uniforme lungo la verticale e distribuito orizzontalmente secondo una gaussiana che si allarga progressivamente nel tempo.*

Questa trattazione si concentra su quest'ultima fase asintotica del fenomeno nella quale, grazie alla uniformità verticale, è sufficiente conoscere la concentrazione media sulla sezione regolare (cioè verticale) in funzione dell'ascissa,  $x$  e, grazie alla distribuzione gaussiana, è ammissibile ipotizzare che una relazione di tipo flusso-gradiente che rappresenti globalmente il fenomeno permettendo di valutare la dispersione orizzontale della nuvola in termini di concentrazione media sulla sezione.

Ricordiamo nuovamente le ipotesi per il nostro alveo:

- infinitamente largo e di profondità  $\delta$ ;
- approssimativamente orizzontale (le pendenze sono tipicamente molto piccole e non svolgono un ruolo nel fenomeno che stiamo studiando);
- localmente approssimabile come uniforme grazie all'ipotesi di corrente gradualmente variata;
- asse  $x$  orientato come l'asse della corrente ( $\bar{u} \neq 0$ ;  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ )
- problema bidimensionale (non consideriamo la direzione  $y$ , trasversale al moto e analizziamo il problema in un generico piano  $x$ - $z$ ).

L'equazione della dispersione turbolenta con la chiusura di tipo K (la terza delle (84)), trascurando il coefficiente di diffusione molecolare,  $D$ , rispetto a quelli di dispersione turbolenta, diventerà:

$$\bar{C}_{,t} + (\bar{u}\bar{C})_{,x} = (D_{Tx}\bar{C}_{,x})_{,x} + (D_{Tz}\bar{C}_{,z})_{,z} \quad (97)$$

Poiché stiamo cercando un'equazione per la concentrazione mediata sulla sezione regolare, scomponiamo tutte le grandezze in una parte media sulla sezione regolare e uno scostamento da questa media (Figura 48). Sia  $A$  una generica grandezza, indicheremo con  $\langle A \rangle$  la sua media sulla sezione:

$$\langle A \rangle(x) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta A(x, z) dz$$

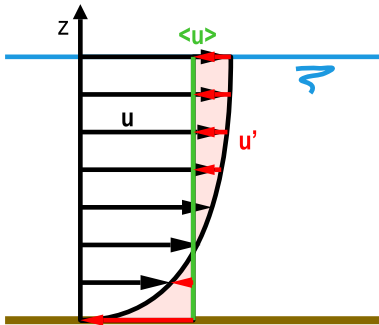


FIGURA 48

Possiamo scomporre la grandezza  $A$  in una parte media sulla sezione regolare,  $\langle A \rangle$ , più uno scostamento dal valor medio,  $A'$ :

$$A = \langle A \rangle + A'$$

Avendo cura di osservare che in questo caso  $A'$  non ha nessuna relazione con le fluttuazioni turbolente, ma rappresenta la non omogeneità verticale della grandezza  $A$  (freccie rosse in Figura 48).

Applichiamo la decomposizione al primo membro dell'equazione della dispersione, utilizzando le proprietà della media come operatore lineare e tralasciando, per semplicità di notazione, di indicare, d'ora in poi, le medie

di insieme:

$$\langle C \rangle_{,t} + C'_{,t} + [(\langle u \rangle + u')(\langle C \rangle + C')]_{,x} = [D_{Tx}C_{,x}]_{,x} + [D_{Tz}C_{,z}]_{,z}$$

Poniamoci ora in un sistema di riferimento che trasli con la velocità media della corrente. In questo sistema di riferimento  $\langle u \rangle = 0$ . Trascuriamo inoltre il primo termine a secondo membro (la dispersione turbolenta in direzione orizzontale) in forza delle considerazioni fatte in precedenza. Rimane dunque:

$$\langle C \rangle_{,t} + C'_{,t} + [u'\langle C \rangle]_{,x} + [u'C']_{,x} = [D_{Tz}C_{,z}]_{,z} \quad (98)$$

Mediando sulla sezione regolare e applicando ancora le proprietà di linearità della media e il fatto che un termine già medio può essere portato fuori dalla media, si ha:

$$\langle C \rangle_{,t} + \underbrace{\langle C' \rangle}_{I}_{,t} + \underbrace{(\langle u' \rangle \langle C \rangle)}_{II}_{,x} + \langle u' C' \rangle_{,x} = \underbrace{\langle D_{Tz} C_{,z} \rangle}_{III}_{,z}$$

I termini I e II sono nulli perché, anche in questo caso, la media di una parte fluttuante è uguale a zero:  $\langle A' \rangle = 0$ . Anche il termine III è nullo. Per dimostrarlo, applichiamo la definizione di media sulla sezione:

$$\langle D_{Tz} C_{,z} \rangle_{,z} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (D_{Tz} C_{,z})_{,z} dz = \frac{1}{\delta} ([D_{Tz} C_{,z}]_\delta - [D_{Tz} C_{,z}]_0) = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} q_{Tz}(\delta) \\ \text{flusso} \\ \text{al pelo} \\ \text{libero} \end{pmatrix} - \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} q_{Tz}(0) \\ \text{flusso} \\ \text{al fondo} \end{pmatrix} = 0$$

Infatti, il flusso turbolento verticale  $q_{Tz} = D_{Tz} C_{,z}$  è nullo sia al fondo che al pelo libero poiché entrambe le superfici non sono attraversate né dal fluido né dal tracciante in esso contenuto. Rimane dunque:

$$\langle C \rangle_{,t} + \langle u' C' \rangle_{,x} = 0 \quad (99)$$

che è l'equazione della dispersione per le correnti.

### 10.3. Coefficiente di dispersione longitudinale

Analogamente a quanto accaduto per le equazioni per la parte media a suo tempo ottenute per i flussi turbolenti, dal termine di trasporto, non lineare, è comparso un termine incognito in più:  $q_L = \langle u' C' \rangle$  che in questo caso chiamiamo *flusso longitudinale*. Abbiamo quindi una sola equazione, e due incognite:  $q_L$  e  $\langle C \rangle$ : per risolverla abbiamo bisogno di un'equazione di chiusura che ci permetta di prevedere  $q_L$ . Cerchiamo una chiusura di tipo flusso-gradiente, che leghi il flusso longitudinale al gradiente della concentrazione media sulla sezione attraverso un coefficiente,  $D_L$ , che possiamo chiamare *coefficiente di dispersione longitudinale*:

$$q_L = \langle u' C' \rangle = -D_L \langle C \rangle_{,x} \quad (100)$$

Per ottenere un'espressione che ci permetta di stimare  $D_L$  ricaveremo  $C'$  a partire dall'equazione della dispersione, moltiplicheremo il risultato per  $u'$  ed infine applicheremo la media verticale per giungere ad un'espressione del flusso turbolento che, attraverso la (100) permetta di identificare  $D_L$ . Per prima cosa, consideriamo l'equazione (98) della dispersione, nel sistema di riferimento solidale alla velocità media e decomposta in parte media e scostamento dalla media che abbiamo già ricavato e sottraiamo ad essa l'equazione della dispersione (99) testé ricavata:

$$\begin{aligned} \langle C \rangle_{,t} + C'_{,t} + [u' \langle C \rangle]_{,x} + [u' C']_{,x} &= [D_{Tz} C_{,z}]_{,z} & - \\ \langle C \rangle_{,t} + \langle u' C' \rangle_{,x} &= 0 & = \\ C'_{,t} + [u' \langle C \rangle]_{,x} + [u' C']_{,x} &= [D_{Tz} C_{,z}]_{,z} + \langle u' C' \rangle_{,x} & III \end{aligned}$$

Ricordando che stiamo considerando la dispersione nella sua fase asintotica, quando il tracciante si è uniformato verticalmente, possiamo ipotizzare che gli scostamenti di concentrazione rispetto alla media siano piccoli rispetto alla concentrazione media stessa:  $C' \ll \langle C \rangle$ . Per questo motivo, osservando che nel termine I  $u'$  è moltiplicato per  $\langle C \rangle$ , mentre nei termini II e III è moltiplicato per  $C'$ , è possibile trascurare II e III rispetto a I. L'equazione si riduce a:

$$\underbrace{C'_{,t}}_{\text{Variazione locale di } C} + \underbrace{(u' \langle C \rangle)_{,x}}_{\text{flusso dovuto al gradiente di velocità media}} = \underbrace{(D_{Tz} C'_{,z})_{,z}}_{\text{flusso turbolento verticale}}$$

Equazione che ben descrive il fenomeno della dispersione longitudinale come frutto dell'azione combinata dell'allargamento orizzontale dovuto alle variazioni di velocità media lungo la verticale e l'omogeneizzazione dovuta alla dispersione in direzione orizzontale.

Per giungere al risultato cercato, bisogna considerare che, sempre sotto l'ipotesi di fase asintotica, è lecito ipotizzare che ormai le variazioni verticali di concentrazione varino molto lentamente nel tempo, e che quindi si possa considerare l'equazione precedente in condizioni stazionarie, trascurando  $C'_{,t}$ . Inoltre, poiché la corrente è gradualmente variata, la forma del profilo di velocità non cambia con  $x$ :  $u' = u'(z)$  e  $u'$  può uscire dalla derivata. L'equazione diventa così:

$$u' \langle C \rangle_{,x} = (D_{Tz} C'_{,z})_{,z}$$

Dalla quale possiamo ricavare  $C'$  integrando due volte rispetto a  $z$ . La prima integrazione dà:

$$C'_{,z} = \frac{1}{D_{Tz}} \int_0^z u' dz \langle C \rangle_{,x}$$

Nella quale la derivata della media verticale della concentrazione,  $\langle C \rangle_{,x}$  non essendo funzione di  $z$  è uscita dall'integrale. Integrando nuovamente:

$$C'(z) = \int_0^z \frac{1}{D_{Tz}(z)} \int_0^z u'(z) dz dz \langle C \rangle_{,x}$$

Moltiplicando per  $u'$ , e applicando la definizione di media sulla verticale, otteniamo il flusso longitudinale:

$$q_L = \langle u' C' \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u' C' dz = \left[ \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u' \int_0^z \frac{1}{D_{Tz}} \int_0^z u'(z) dz dz dz \right] \langle C \rangle_{,x}$$

Confrontando questa espressione con la chiusura di tipo flusso-gradiente (100) si ricava immediatamente l'espressione del coefficiente di dispersione longitudinale come l'opposto del termine tra parentesi quadre:

$$D_L = - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u' \int_0^z \frac{1}{D_{Tz}} \int_0^z u'(z) dz dz dz$$

Per ricavare  $D_L$  bisogna conoscere quindi la forma del profilo di velocità ( $u'(z)$ ) ed il coefficiente di dispersione turbolenta in direzione verticale,  $D_{Tz}(z)$  che, nel nostro caso, è noto dall'analogia di Reynolds (96). Con la chiusura (100), e ponendoci nuovamente in un sistema di riferimento fisso rispetto alle sponde dell'alveo, nella quale dobbiamo reintrodurre nuovamente  $\langle u \rangle$ , otteniamo l'*equazione della dispersione longitudinale* nella forma più utile per le applicazioni:

$$\langle C \rangle_{,t} + \langle u \rangle \langle C \rangle_{,x} = (D_L \langle C \rangle)_{,x}$$

che è ora completamente utilizzabile avendo l'espressione di  $D_L$ .

Nel caso di alveo infinitamente largo, utilizzando l'analogia di Reynolds per il valore di  $D_{Tz}(z)$  e la legge logaritmica della velocità nello strato limite turbolento per il valore di  $u'(z)$ , si ottiene un valore del coefficiente di dispersione longitudinale pari a  $D_L = 5.93 \cdot u_* \delta$ .

Lo stesso ragionamento sviluppato in questa sede per un alveo infinitamente largo può essere ripetuto tal quale per il flusso turbolento all'interno di un tubo tondo, tipico di tutti gli impianti in pressione. Si tratta, anche in questo caso, di un caso bidimensionale, ma questa volta a causa della simmetria cilindrica del problema, per la quale nulla varia al variare dell'angolo attorno all'asse di simmetria. Anche in questo caso il profilo di velocità è logaritmico per la maggior parte dello spessore, ed è possibile applicare l'analogia di Reynolds ottenendo un andamento del coefficiente di dispersione  $D_{Tz}$  parabolico (un paraboloide di rotazione). Sviluppando i calcoli in coordinate cilindriche ed integrando si giunge ad un valore del coefficiente di dispersione longitudinale pari a:  $D_L = 5.05 \cdot D u_*$ , con  $D$ , diametro del tubo.

### Formulazione adimensionale

Attraverso la scelta di opportune scale, il coefficiente di dispersione longitudinale può essere espresso in un forma adimensionale. In particolare, se definiamo le seguenti grandezze adimensionali:

- $D_T^* = D_T / \langle D_T \rangle$ ;
  - $u'^* = u' / \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ ;
  - $\eta = z / \delta$ ;
  - $D_L^* = D_L / [\delta^2 \langle u'^2 \rangle / \langle D_T \rangle]$ ;
- (101)

il coefficiente di dispersione in forma adimensionale risulta:

$$D_L^* = - \int_0^1 u'^* \int_0^\eta \frac{1}{D_T^*} \int_0^\eta u'^* d\eta d\eta d\eta$$

Da un punto di vista pratico, usare la forma adimensionale ha il vantaggio che il range di valori che si ottengono variando le caratteristiche del flusso è abbastanza limitato, aspetto molto importante quando si ha incertezza nei dati di ingresso. Nella maggior parte dei casi si può assumere  $D_L^* \approx 0.1$ , con ragionevole approssimazione.

*Dispersione longitudinale negli alvei naturali*

Sinora si è considerato un moto uniforme in un alveo infinitamente largo, nel quale la velocità,  $u$ , è solo funzione della quota  $z$  (grafico superiore in Figura 49). Negli alvei reali, che sono di larghezza finita, pur considerando condizioni di moto uniforme, la velocità non si deve annullare solo al fondo, ma anche alle pareti laterali e, per questo motivo, la velocità varia sia con la profondità che in direzione trasversale:  $u(y,z)$ . Quindi, gli scostamenti della velocità dal valor medio che determinano la dispersione in direzione orizzontale sono dovuti anche a questa variabilità.

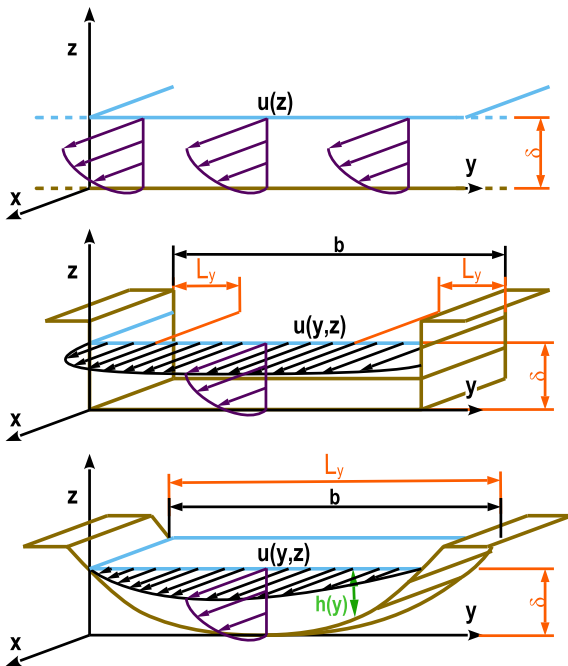


FIGURA 49

La formulazione adimensionale del coefficiente di dispersione longitudinale introdotta nel paragrafo precedente (101) mette in evidenza la dipendenza del coefficiente di dispersione longitudinale dal quadrato della scala delle lunghezze. Nel caso generale, l'analisi dimensionale indica che il coefficiente di dispersione può essere scritto come:

$$D_L \approx D_L^* \cdot \frac{U'}{\Delta_T} L^2$$

dove  $U'$  è una scala degli scostamenti di velocità dalla media sulla sezione regolare,  $L$  la scala delle lunghezze su cui avviene la variazione di velocità  $U'$ , e  $\Delta_T$  una scala per il corrispondente coefficiente di dispersione turbolenta.

Nell'alveo infinitamente largo la velocità varia solo lungo  $z$  e quindi abbiamo considerato il gradiente di velocità in quella direzione,  $L = \delta$  come scala spaziale sulla quale avviene la corrispondente variazione della velocità e il coefficiente di dispersione turbolenta nella medesima direzione,  $D_{Tz}$ , come nella trattazione precedente. Se la velocità varia anche in direzione trasversale rispetto all'alveo, come negli alvei a larghezza è finita, dovremo ripetere lo stesso ragionamento in quella direzione e considerare le variazioni di velocità lungo  $y$ , e la scala  $L_y$  alla quale avvengono le variazioni di velocità, e il corrispondente coefficiente di dispersione turbolenta  $D_{Ty}$ . Bisogna poi confrontare i due affetti per valutare quale dei due prevale. Confrontando la direzione  $y$  e la direzione  $z$ , l'ordine di grandezza degli scostamenti delle velocità rimane esattamente lo stesso, e dunque anche la scala  $U'$  è la stessa. Anche i coefficienti di dispersione turbolenta nelle due direzioni, per quanto diversi, hanno lo stesso ordine di grandezza ( $\Delta_{Ty} \approx \Delta_{Tz}$ ). *Il prevalere del fenomeno in direzione verticale o trasversale dipende, dunque, dalla scala delle lunghezze, la più importante anche perché compare elevata al quadrato. Questo aspetto è particolarmente rilevante dato che, in molti casi, la larghezza dell'alveo,  $b$ , è maggiore della sua profondità,  $\delta$ . Questo aspetto da solo però non è sufficiente a far prevalere la dispersione in direzione  $y$ . Bisogna infatti tener conto del fatto che  $L$  rappresenta la scala sulla quale avviene la variazione di velocità, ovvero lo spessore dello strato limite. Avremo quindi tre casi tipici (Figura 49):*

- i ) *alveo infinitamente largo*: si ha una variazione di velocità solo in direzione  $z \rightarrow L = \delta$  (grafico in alto);
- ii ) *alveo artificiale rettangolare*: verticalmente, lo strato limite si sviluppa per tutta la profondità  $\delta$ , mentre lateralmente si sviluppa per uno spessore  $L_y$  molto inferiore alla larghezza dell'alveo ( $L_y \ll b$ , grafico al centro della figura). Nella maggior parte dell'alveo, infatti, la velocità è circa costante in direzione  $y$  ed è presente quindi solo il gradiente di velocità verticale. Si conclude che,

nonostante  $\delta \ll b$ ,  $L_y < \delta$  e prevale comunque l'effetto del gradiente in direzione  $z$  rispetto a quello lungo  $y$ ;

- iii) *alveo naturale*: in questo caso la profondità diminuisce gradualmente man mano che si va dal centro alle sponde (grafico in basso). Per questo motivo anche la velocità diminuisce gradualmente dal centro alle sponde per tutta la larghezza dell'alveo e  $L_y = b$ . In direzione verticale invece, lo strato limite si sviluppa comunque per tutta la profondità  $\delta$ . Essendo gli alvei naturali tipicamente molto più larghi che profondi ( $b \gg \delta$ )  $L_y \approx b$  e prevarrà l'effetto del gradiente trasversale ( $L_y \gg \delta$ ).

Anche nel caso di alveo naturale, è possibile ricondursi ad una trattazione del tutto simile a quella considerata in precedenza. Per giungere a questo scopo definiamo il profilo trasversale della velocità mediata sulla verticale (Figura 49):

$$\langle u \rangle_z(y) = \frac{1}{h(y)} \int_0^{h(y)} u(y, z) dz$$

e lo scostamento della velocità dalla media:

$$u'(y) = \langle u \rangle_z(y) - U$$

avendo indicato con  $U$  la velocità media sull'intera sezione regolare:

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u(y, z) d\Omega = \frac{1}{b} \int_0^b \langle u \rangle_z(y) dy$$

Sulla scorta di queste definizioni possiamo ripetere gli stessi ragionamenti, considerando l'effetto combinato di un profilo di velocità,  $\langle u \rangle_z(y)$ , che varia in direzione  $y$ , e determina la deformazione della linea di tracciante in direzione  $x$ , e la dispersione turbolenta,  $D_{Ty}$ , che omogeneizza il tracciante in direzione trasversale, ottenendo un'espressione del coefficiente di dispersione longitudinale valida per gli alvei naturali:

$$D_L = -\frac{1}{\Omega} \int_0^b u' h(y) \int_0^y \frac{1}{D_{Ty} h(y)} \int_0^y u'(y) h(y) dy dy dy$$

Anche in questo caso il coefficiente può essere espresso in forma adimensionale introducendo:

- iv)  $D_{Ty} = D_{Ty}^* \langle D_{Ty} \rangle_{\Omega}$ : con  $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$  media sulla sezione, per il coefficiente di dispersione;
- v)  $y = y^* H$ , per l'ascissa trasversale, con  $H = \Omega/b$  profondità media;
- vi)  $u' = u'^* \sqrt{\langle u'^2 \rangle_{\Omega}}$ , per lo scostamento trasversale della velocità;
- vii)  $h = h^* H$ ;

ed ottenendo la relazione:

$$D_L = D_L^* \cdot \frac{b^2 \langle u'^2 \rangle}{\langle D_{Ty} \rangle_{\Omega}}$$

con il coefficiente adimensionale pari a:

$$D_L^* = - \int_0^1 u'^* h^* \int_0^{y^*} \frac{1}{D_{Ty}^* h^*} \int_0^{y^*} u'^* h^* dy^* dy^* dy^*$$

## 11. SCARICHI A MARE

### 11.1. Le fasi della diluizione

Gli scarichi a mare sono infrastrutture che convogliano acque reflue opportunamente trattate in ambiente costiero, affidando alla dinamica del mare (moto ondoso, correnti, turbolenza, stratificazione) la parte residua di diluizione e dispersione necessaria a rispettare gli standard di qualità ambientale. L'immissione di acque reflue o di acque di raffreddamento negli ecosistemi marini attraverso gli scarichi a mare rappresenta una pratica largamente diffusa in molte applicazioni. L'applicazione più frequente è lo smaltimento dei residui degli impianti di trattamento delle acque reflue urbane; in ambito urbano costiero sono usati nella gestione delle acque meteoriche per gestire i picchi di portata durante eventi meteorologici intensi; sono frequentemente usati anche per lo smaltimento di acque di raffreddamento di centrali termoelettriche, che necessitano di enormi volumi d'acqua per il funzionamento dei condensatori; infine, sono usati per lo scarico della salamoia degli impianti di dissalazione, che vedono una diffusione sempre più ampia in ragione della crescente scarsità d'acqua dolce.

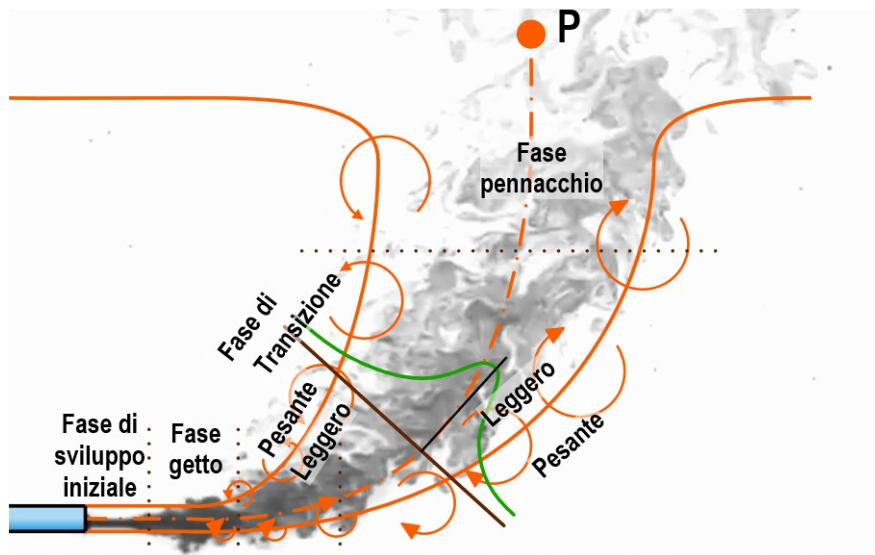


FIGURA 50 – CAMPO VICINO

Le aree urbane costiere concentrano popolazione e attività economiche, spesso su litorali morfologicamente complessi e con vincoli ambientali stringenti. In molti casi, dopo un trattamento a monte (primario/secondario o avanzato a seconda dei contaminanti), il ricorso a uno scarico sottomarino con diffusore consente di ottenere elevate diluizioni iniziali e di allontanare la scia dall'area di costa in modo affidabile e verificabile, purché il progetto consideri correttamente sia i processi di mescolamento sia la variabilità ambientale (maree, stratificazione, stagionalità del moto) del sito.

La scelta va sempre inserita correttamente nella gerarchia delle opzioni di gestione: in primo luogo riduzione alla fonte, in secondo luogo trattamento efficace, infine dispersione. Perché lo scarico a mare sia considerabile un metodo sostenibile di smaltimento non deve provocare danni permanenti all'ecosistema recettore. In primo luogo va considerato il tipo di sostanze rilasciate: sostanze biodegradabili o variazioni termiche possono essere gestite, entro certi limiti, anche mediante dispersione; composti persistenti o bioaccumulabili richiedono invece contenimento e rimozione a monte. In secondo luogo, va considerato che anche una sostanza (o variazione termica) di per sé accettabile, può essere metabolizzata solo in quantità limitata dell'ecosistema recettore. Per questo motivo, nel valutare l'impatto di uno scarico a mare, va verificato che la quantità complessiva rilasciata rientri entro i limiti complessivi assimilabili. Infine, va verificato che le concentrazioni delle sostanze rilasciate, per quanto biodegradabili, non raggiungano limiti che le rendano tossiche. I primi due fattori dipendono dal progetto dell'impianto ed esulano dagli scopi della presente trattazione. Sarà trattata in questa sede, invece, la stima delle concentrazioni e la loro evoluzione spaziale, che invece risulta determinata da fenomeni prettamente fluidodinamici.

Che si tratti di reflui di impianti di trattamento, di acque di raffreddamento, o derivanti da un impianto di dissalazione, dal punto di vista della meccanica dei fluidi, uno scarico a mare consiste sempre nel rilascio di un effluente che comporta l'alterazione di una proprietà scalare rispetto al recettore. La proprietà scalare può essere la concentrazione di una sostanza chimica non presente nel recettore, per esempio sostanze disciolte nell'effluente se si tratta di un impianto di trattamento, della temperatura se si considera un impianto di raffreddamento, o la concentrazione (alterata) di sostanze già presenti nel recettore, come avviene per i sali nel caso di impianti di dissalazione.

Lo studio degli scarichi si articola generalmente in due fasi principali, divise in ragione della scala spaziale e dei processi fisici dominanti:

### *Campo Vicino (Near Field)*

In questa fase iniziale (Figura 50), il comportamento del fluido scaricato è dominato dalle caratteristiche intrinseche della sorgente (geometria dell'ugello, velocità di uscita e densità del reflu). Il fenomeno fluidodinamico è quello di un getto turbolento rilasciato in un fluido approssimativamente in quiete, nel quale si ha una diluizione dovuta al mescolamento tra effluente e recettore. In questa fase, il pennacchio che si forma ha una scala delle lunghezze complessiva circa pari alla profondità dell'acqua (ordine di grandezza 10m), e il suo sviluppo è completamente tridimensionale.

### *Campo Lontano (Far Field)*

Una volta esaurita la quantità di moto iniziale e raggiunto l'equilibrio di galleggiamento, l'effluente viene trasportato e disperso dalle correnti costiere dagli effetti del moto ondoso e dalla turbolenza (Figura 51). Il destino del reflu dipende perciò dalle condizioni idrodinamiche dell'ambiente circostante ad una scala dell'ordine delle decine di km, e lo sviluppo del fenomeno dipende dalla conformazione della costa e dei fondali, dal regime di corrente, e dal moto ondoso. Poiché la scala di sviluppo orizzontale del pennacchio (10km) è molto maggiore della profondità dell'acqua in prossimità della costa (10m), il fenomeno della dispersione assume caratteristiche tipiche di un pennacchio bidimensionale.

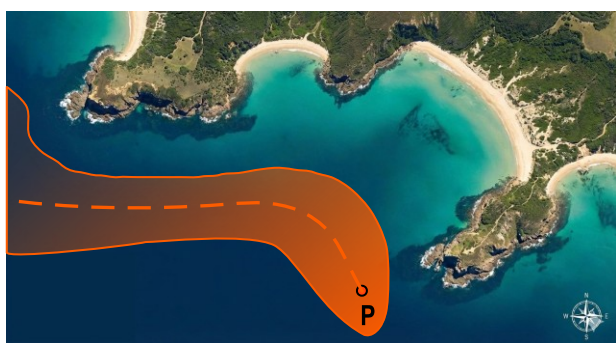


FIGURA 51 – CAMPO LONTANO

A causa delle scale completamente diverse nel campo vicino e in quello lontano, le due fasi della dispersione vanno studiate separatamente con strumenti e approcci diversi. Il metodo che si usa è quello di studiare la fase iniziale della diluizione come tridimensionale, assumendo come condizioni iniziali quelle dell'effluente allo scarico, tenendo conto delle caratteristiche progettuali del diffusore, della distanza dal fondo, e delle caratteristiche del fluido recettore. Lo studio permette di identificare la posizione e le caratteristiche di diluizione al completo sviluppo della fase iniziale (punto **P** di Figura 50). Successivamente,

si assumono la posizione e le caratteristiche ricavate al punto **P** come condizioni iniziali di uno studio di dispersione di un pennacchio bidimensionale, a scala molto maggiore, tenendo conto della conformazione della costa, della profondità del fondale, del regime di circolazione costiera, del moto ondoso, eccetera.

In questo contesto noi limiteremo la trattazione della fase di campo vicino, che assume caratteristiche di generalità, mentre lasceremo la seconda fase, che inevitabilmente è dominata da fattori geografici e mareografici locali, ad una trattazione svolta con i metodi della *meccanica dei fluidi computazionale* e dell'*idraulica costiera*, ovvero nel contesto dello studio dei modelli numerici che permettono di valutare la circolazione costiera, il clima ondoso, e il trasporto e la dispersione dell'effluente nello specifico contesto applicativo. Strumenti fondamentali dell'ingegnere ambientale contemporaneo.

## 11.2. Classificazione degli scarichi a mare

Le condizioni iniziali di rilascio dell'effluente, che caratterizzano la fase di diluizione nel campo vicino, sono definite da tre parametri fondamentali, che sono i flussi specifici (ovvero normalizzati rispetto alla densità del fluido,  $\rho_0$ ) di massa, quantità di moto e galleggiamento:

- *flusso specifico di massa*:  $Q_0 = \frac{1}{\rho_0} [\rho_0 Q_0]_{\text{flusso di massa}} = U\Omega$ , ovvero la portata. Con  $U$  velocità media allo scarico e  $\Omega$  area della sezione di scarico;
- *flusso specifico di quantità di moto*:  $M_0 = \frac{1}{\rho_0} [\rho_0 U Q_0]_{\text{flusso di QdM}} = \frac{Q_0^2}{\Omega}$ ;
- *flusso specifico di galleggiamento*:  $B = \frac{1}{\rho_0} [g\Delta\rho Q_0]_{\text{flusso di galleggiamento}} = g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} Q_0$ . Con  $\Delta\rho$  differenza di densità allo scarico tra fluido effluente e recettore.

In base al ruolo che svolgono questi tre parametri, gli scarichi a mare possono essere classificati in tre categorie:

- Getti semplici*: nei quali la densità del recettore e quella dell'effluente sono molto simili tra loro  $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$ , cosicché le forze di galleggiamento non svolgono un ruolo significativo e dunque si potrà assumere:  $Q_0 \neq 0$ ,  $M_0 \neq 0$  e  $B \approx 0$ . È il caso di uno scarico di un effluente con quasi le stesse caratteristiche del recettore sia come concentrazioni sia come temperatura;
- Pennacchi*: nei quali l'effluente ha una densità molto diversa (sia maggiore che minore) del recettore ( $|\Delta\rho/\rho_0| \gg 1$ ), e viene rilasciato con piccola portata e quantità di moto, e quindi non svolgono un ruolo rilevante. Potremo quindi assumere:  $Q_0 \approx 0$ ,  $M \approx 0$  e  $B \neq 0$ . È il tipo di flusso che si ha quando non c'è uno scarico vero e proprio ma un riscaldamento o raffreddamento localizzato del fluido del recettore, determinando così un flusso di galleggiamento senza una portata. Per esempio, un incendio genera un pennacchio in atmosfera: si ha infatti un riscaldamento in corrispondenza della combustione, senza che sia presente né una portata né un flusso di quantità di moto. Per approssimazione, estendiamo questa classificazione al caso di scarichi con piccolissime portate e grandi differenze di densità;
- Getti dotati di galleggiamento*: il caso intermedio tra i due precedenti, nel quale la densità di effluente e recettore sono significativamente diverse e, al contempo sono rilevanti anche la portata ed il flusso di quantità di moto iniziali. In questo caso nessuno dei tre parametri può essere trascurato e si dovrà considerare:  $Q_0 \neq 0$ ,  $M_0 \neq 0$  e  $B \neq 0$ . È il caso di molte applicazioni ingegneristiche come lo scarico dei reflui da impianti di trattamento delle acque ( $\Delta\rho < 0$ ), oppure da impianti di dissalazione ( $\Delta\rho > 0$ ).

### 11.3. Getto semplice

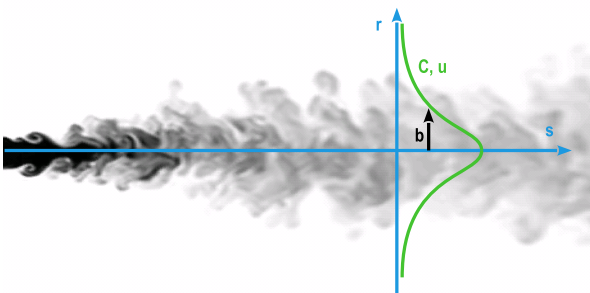


FIGURA 52 – GETTO SEMPLICE

Nei getti semplici effluente e recettore hanno circa la stessa densità e perciò assumiamo:  $Q_0 \neq 0$ ,  $M_0 \neq 0$  e  $B \approx 0$ . Poiché le forze di galleggiamento non svolgono alcun ruolo, lo sviluppo di questi flussi è indipendente dall'orientazione dello scarico rispetto all'orizzontale e sono assialsimmetrici. Appena fuori dallo scarico il forte gradiente di velocità tra effluente e recettore determina l'insorgere di strutture vorticosi di Kelvin-Helmholtz le quali, diventando a loro volta instabili, determinano il mescolamento turbolento tra fluido effluente e recettore portando alla diluizione del reflu. Miscelando fluido recettore (in quiete) con fluido effluente (in movimento), si ottiene una maggior quantità di fluido in movimento (sia pur con velocità inferiore). Per questo motivo, la massa coinvolta nel flusso aumenta gradualmente e il mescolamento ai bordi del getto porta alla progressiva diluizione del getto e alla diminuzione delle concentrazioni. Il tratto iniziale è influenzato principalmente dalle condizioni iniziali: il profilo di velocità e il livello di turbolenza allo scarico, la concentrazione iniziale, ecc. Questa zona si estende per 6-10 diametri dello scarico. Più lontano, dopo una transizione graduale nella quale l'instabilità di Kelvin-Helmholtz ha avuto modo di agire e sono passate molte scale integrali, il flusso perde memoria delle condizioni iniziali e vale il teorema del limite centrale. Per questo motivo il profilo di velocità media e di concentrazione assume forma gaussiana, cioè:

$$\begin{cases} \bar{u}(s, r) = u_m(s) \cdot e^{-\left(\frac{r}{b_u(s)}\right)^2} \\ \bar{C}(s, r) = u_m(s) \cdot e^{-\left(\frac{r}{b_c(s)}\right)^2} \end{cases}$$

In questa situazione l'intero campo di velocità o di concentrazione è noto se sono noti i parametri  $u_m(s)$  e  $b_u(s)$ , che sono, rispettivamente, la velocità massima (sull'asse del getto) e la larghezza del profilo di velocità, e i corrispondenti parametri  $c_m(s)$  e  $b_c(s)$  per la concentrazione. Tali parametri possono essere ottenuti attraverso ragionamenti basati sull'analisi dimensionale. A tal fine scegliamo come parametri che influenzano il fenomeno:  $\{Q_0; M_0; C_0; s\}$ . Avendo indicato con  $C_0$  la concentrazione iniziale. Si osservi che non è stata inclusa tra i parametri la viscosità del fluido,  $\nu$ , come appropriato per numeri di Reynolds abbastanza grandi (nel caso in esame  $Re > 4000$ ), quando le forze viscosive sono trascurabili rispetto a quelle inerziali. Utilizzando questi parametri è possibile costruire: una scala delle lunghezze:

$$L_q = \frac{Q_0}{\sqrt{M_0}} = \frac{Q_0}{\sqrt{Q_0 U}} = \sqrt{\frac{Q_0}{U}} = \sqrt{\frac{U \Omega}{U}} = \sqrt{\Omega} \underset{\text{per sezione circolare}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2} D \quad (102)$$

che quindi corrisponde al diametro dello scarico a meno di una costante, e una scala delle velocità, che coincide con la velocità media allo scarico:

$$U = \frac{M_0}{Q_0} \quad (103)$$

Con queste scale sarà possibile costruire relazioni funzionali adimensionali per le grandezze di interesse, le quali, in quanto adimensionali, sono indipendenti dalle particolari condizioni sperimentali ed hanno validità generale.

Per la velocità massima questa relazione funzionale adimensionale dovrà avere la forma:

$$\frac{u_m}{U} = u_m \frac{Q_0}{M_0} = f\left(\frac{s}{L_q}\right) \quad (104)$$

Questa funzione può essere valutata in condizioni asintotiche:

a) Per  $s/L_q \rightarrow 0$

avremo che  $f \rightarrow 1$  perché la velocità tenderà alla velocità iniziale  $U$ .

b) Per  $s/L_q \rightarrow \infty$

invece osserviamo che il limite  $\frac{s}{L_q} = s \frac{\sqrt{M_0}}{Q_0}$  può essere raggiunto in tre modi:

1.  $s \rightarrow \infty$  con  $Q_0$  ed  $M$  finiti;
2.  $M_0 \rightarrow \infty$  con  $Q_0$  ed  $s$  finiti;
3.  $Q_0 \rightarrow 0$  con  $s$  ed  $M$  finiti.

I primi due casi non presentano incongruenze perché corrispondono ad andare molto lontano dallo scarico (1.), oppure ad un getto con una quantità di moto iniziale molto grande (2.). Il terzo caso invece è un vero e proprio paradosso perché se la portata tende a zero il getto viene a mancare completamente, e il getto scompare. Per superare questa contraddizione, formuliamo la congettura che il fenomeno non dipenda dalla portata in modo che il terzo caso non si possa verificare. Utilizzando questa condizione otterremo l'andamento delle grandezze che caratterizzano il getto. Gli andamenti così ottenuti andranno verificati sperimentalmente per confermare che l'ipotesi formulata sia corretta.

Incominciamo dalla velocità sull'asse: nell'equazione (104), la portata iniziale compare a numeratore del termine che adimensionalizza  $u_m(s)$ , perciò, per eliminare la dipendenza da  $Q_0$  è sufficiente ipotizzare una dipendenza con l'inverso della distanza adimensionale:

$$f\left(\frac{s}{L_Q}\right) = a_1 \left(\frac{s}{L_Q}\right)^{-1}$$

In questo modo, la portata apparirà a numeratore anche a destra e, in ultima analisi, si semplificherà:

$$\frac{u_m(s)}{U} = a_1 \frac{L_q}{s} \rightarrow u_m \frac{Q_0}{M_0} = \frac{1}{s} \frac{Q_0}{\sqrt{M_0}}$$

L'evidenza sperimentale conferma che la velocità sull'asse di un getto semplice diminuisce in modo inversamente proporzionale alla distanza dallo scarico. Abbiamo perciò la prova della fondatezza fisica della nostra congettura e possiamo utilizzarla anche per ottenere gli andamenti delle altre grandezze. Inoltre, i risultati sperimentali ottenuti in laboratorio ci permettono di individuare una volta per tutte il valore della costante di proporzionalità,  $a_1 = 7.0 \pm 0.1$ <sup>19</sup>. Il valore del coefficiente così ottenuto, essendo adimensionale, non vale solo nelle specifiche condizioni dell'esperimento da cui proviene, ma ha valore generale.

Otteniamo l'andamento della larghezza del profilo di velocità con un ragionamento del tutto analogo. In generale, la larghezza del getto adimensionale sarà funzione (adimensionale) della distanza adimensionalizzata dallo scarico:

$$\frac{b_u}{L_q} = f\left(\frac{s}{L_Q}\right)$$

In questo caso, perché la portata si semplifichi dovremo ipotizzare una dipendenza lineare *diretta*. Infatti:

$$\frac{b_u(s)}{L_q} = a_2 \frac{s}{L_q} \rightarrow b_u \frac{Q_0}{\sqrt{M_0}} = s \frac{Q_0}{\sqrt{M_0}}$$

I dati di letteratura confermano la dipendenza lineare e permettono di ottenere il valore del coefficiente  $a_2 = 0.107 \pm 0.003$ .

Un altro parametro importante per caratterizzare il comportamento di uno scarico di reflui è la *diluizione*, ovvero il rapporto tra la portata calcolata ad una distanza,  $s$ , dallo scarico e la portata iniziale,  $Q_0$ . La portata  $Q(s)$  si ottiene integrando la velocità su di un piano ortogonale all'asse del getto (che in questo caso è assialsimmetrico):

$$Q(s) = \int_0^\infty u(s, r) \cdot 2\pi r dr$$

Quindi in generale, dovrà sussistere una relazione adimensionale del tipo:

$$\frac{Q(s)}{Q_0} = f\left(\frac{s}{L_Q}\right)$$

Per ottenere una formulazione indipendente da  $Q_0$ , anche in questo caso, dobbiamo ipotizzare che  $f$  rappresenti una dipendenza lineare diretta:

$$\frac{Q}{Q_0} = a_3 \frac{s}{L_q} \rightarrow \frac{Q}{Q_0} = a_3 s \frac{\sqrt{M_0}}{Q_0}$$

<sup>19</sup> Il valore di questo coefficiente, come degli altri qui presentati, corrisponde alla media  $\pm$  la deviazione standard di dati ricavati dalla letteratura scientifica. Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., & Brooks, N.H. (1979). "Mixing in Inland and Coastal Waters". Academic Press.

La letteratura indica che il coefficiente  $a_3 = 0.25$ .

Il flusso specifico di quantità di moto ad una distanza,  $s$ , dalla sorgente può essere definito in analogia con quanto fatto per la portata, tenendo conto della assialsimmetria del pennacchio:

$$M(s) = \int_0^{\infty} u^2(s, r) \cdot 2\pi r dr$$

Per esso dovrà valere una relazione adimensionale del tipo:

$$\frac{M(s)}{M_0} = f\left(\frac{s}{L_q}\right)$$

Poiché la portata iniziale non compare a sinistra, non c'è espressione che permetta di semplificarla come siamo riusciti a fare nei casi precedenti. Perciò, l'unico modo perché la funzione,  $f$ , risulti indipendente da  $Q_0$  è che sia essa stessa costante. Risulterà quindi:

$$\frac{M(s)}{M_0} = \text{costante} \rightarrow M(s) = M_0$$

Se ricordiamo che allo scarico deve essere  $M(0) = M_0$ , si evince che il valore della costante di proporzionalità deve essere unitario. Ne consegue che il flusso di quantità di moto rimane costante allontanandosi dallo scarico, in ossequio al principio di bilancio alla base della meccanica dei fluidi.

Per ricavare l'andamento del campo di concentrazione notiamo che essa può essere espressa come il rapporto tra il *flusso di massa del tracciante* rilasciato:

$$\Phi_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

(con  $\Delta m$  massa di tracciante rilasciata nell'unità di tempo) e la portata (il volume di fluido effluente per unità di tempo):

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Avremo infatti:

$$C(s) = \frac{\Phi_m}{Q(s)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m \Delta t}{\Delta t \Delta V}$$

Osservando che la massa del tracciante si conserva, e perciò  $\Phi_m$  non dipende da  $s$ , la concentrazione iniziale sarà  $C_0 = \Phi_m/Q_0$ . Ciò premesso, la relazione adimensionale per la concentrazione sull'asse sarà, in generale:

$$\frac{c_m(s)}{C_0} = f\left(\frac{s}{L_q}\right)$$

L'indipendenza da  $Q_0$ , si ottiene ipotizzando una dipendenza di linearità inversa con l'ascissa adimensionale:

$$\frac{c_m}{C_0} = a_4 \frac{L_q}{s} \rightarrow c_m \frac{Q_0}{\Phi_m} = a_4 \frac{1}{s} \frac{Q_0}{\sqrt{M_0}}$$

I risultati sperimentali riportati in letteratura forniscono un valore del coefficiente:  $a_4 = 0.127 \pm 0.004$ . per la larghezza del profilo di concentrazione  $b_c$ , è sufficiente ripetere il ragionamento dimensionale fatto per  $b_u$ . La dipendenza risulta quindi di proporzionalità diretta con la distanza dallo scarico:

$$\frac{b_c(s)}{L_q} = f\left(\frac{s}{L_Q}\right) = a_5 \frac{s}{L_q}$$

I dati sperimentali di letteratura riportano un profilo di concentrazione leggermente più ampio di quello di velocità, con un valore del coefficiente adimensionale  $a_5 = 1.19 a_2$ .

## 11.4. Pennacchio



FIGURA 53

I pennacchi sono un caso limite dei getti dotati di galleggiamento nei quali il flusso è governato dalle sole forze di galleggiamento, mentre il flusso di quantità di moto, e quello di massa, sono nulli o trascurabili.

Avremo perciò  $B \neq 0$  mentre  $Q_0 = M_0 = 0$ . Poiché la quantità di moto iniziale è assente, i pennacchi si sviluppano nella sola direzione in cui agiscono le forze di galleggiamento: quella verticale: verso l'alto se l'effluente è meno denso (per esempio più caldo) del recettore o, verso il basso se l'effluente è più denso (ad esempio più freddo). Essendo le direzioni orizzontali tutte equivalenti tra loro, lo sviluppo del flusso è, anche in questo caso, assialsimmetrico, e

l'asse di simmetria è l'asse  $z$  (Figura 53). Coerentemente con l'ipotesi di  $Q_0$  e  $M_0$  nulli, alla sorgente la velocità del fluido è nulla o trascurabile. Poi, gradualmente le forze di galleggiamento agiscono, imprimendo al fluido una velocità verticale via via crescente verso l'alto o verso il basso, a seconda del segno di  $\Delta\rho$ . Il flusso, inizialmente laminare, ad una certa distanza, a causa del gradiente di velocità ai suoi bordi, diventa instabile e, successivamente, turbolento, generando mescolamento con il fluido esterno per effetto dello sviluppo e poi rottura delle consuete strutture di Kelvin-Helmholtz.

Quando la transizione alla turbolenza è completa, e ci troviamo ad una distanza molto maggiore della scala integrale lagrangiana, il teorema del limite centrale di assicura una distribuzione gaussiana sia della velocità che della concentrazione (Figura 54).

In questo caso, le grandezze da cui dipende il fenomeno sono: il flusso specifico di galleggiamento,  $B$ , la distanza dallo scarico,  $s$ , e la viscosità  $\nu$ . Con queste tre grandezze è possibile costruire una scala delle velocità:

$$W = \sqrt[3]{\frac{B}{s}}$$

che possiamo definire *velocità convettiva*. Utilizzando  $W$  come scala delle velocità,  $s$  come scala delle lunghezze, e la viscosità, si può comporre un solo gruppo adimensionale che ha la struttura di un numero di Reynolds:

$$Re = \frac{Ws}{\nu} = \frac{\sqrt[3]{Bs^2}}{\nu}$$

perciò, analogamente al caso del getto semplice, tutte le grandezze adimensionali devono dipendere da questo gruppo adimensionale. Consideriamo quindi la velocità sull'asse,  $u_m$ : dovrà sussistere una relazione adimensionale del tipo:

$$\frac{u_m(s)}{W} = f(Re)$$

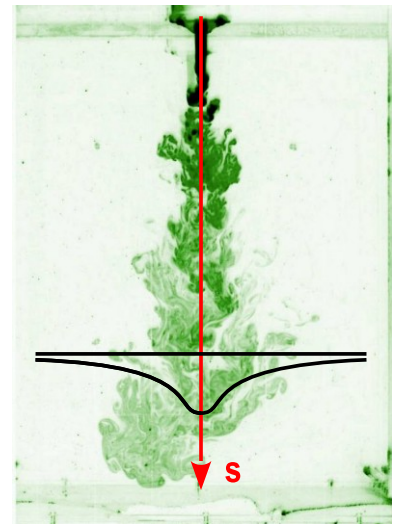


FIGURA 54

Il numero di Reynolds rappresenta il rapporto tra forze d'inerzia e forze viscosi:  $R_e = \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscosi}}$ . Allontanandosi dallo scarico, cioè all'aumentare di  $s$ , il numero di Reynolds cresce e, quando ha raggiunto un valore sufficientemente alto, le forze d'inerzia prevalgono ( $R_e \gg 1 \rightarrow \text{forze d'inerzia} \gg \text{forze viscosi}$ ) e il flusso diventa turbolento. Come nel caso di getto semplice, sulla base di queste considerazioni formuliamo una congettura, che avrà bisogno della verifica sperimentale: l'ipotesi è che, come per tutti i flussi, una volta che il numero di Reynolds è diventato così grande che le forze viscosi sono diventate completamente trascurabili, il rapporto tra i due tipi di forze non svolga più alcun ruolo e il flusso diventi indipendente da  $R_e$ . Siamo a questo punto nel regime di moto detto *completamente turbolento*.

Riprendiamo ora la relazione per la velocità sull'asse: quando  $R_e \rightarrow \infty$ , il fenomeno diventa indipendente da  $R_e$  e perciò  $f(R_e) = \text{costante}$ . Se diamo nome  $b_1$  a questa costante e ricaviamo  $u_m$  otteniamo:

$$u_m(s) = b_1 W = b_1 \sqrt[3]{B} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{s}}$$

Gli esperimenti hanno permesso di confermare la dipendenza delle velocità sull'asse rappresentata dall'espressione precedente e hanno permesso di determinare il valore della costante adimensionale che risulta  $b_1 = 4.7$ . Si osservi che, se si estrapola la relazione al limite per  $R_e \rightarrow 0$ , si trova il risultato, fisicamente incongruente, di una velocità sull'asse che tende all'infinito, in contraddizione con le ipotesi di pennacchio, che alla sorgente prevedono l'assenza di flusso volumetrico e di quantità di moto. Dobbiamo perciò ricordare che il ragionamento in base al quale abbiamo ottenuto la relazione vale solo per  $R_e$  abbastanza grandi, ovvero lontano dalla sorgente.

Svolgendo lo stesso ragionamento, possono essere ottenute le altre grandezze di interesse. Per il flusso specifico di quantità di moto, che ha le dimensioni di una velocità ( $W$ ) per una portata ( $Ws^2$ ), abbiamo:

$$\frac{M(s)}{W^2 s^2} = f(R_e) \underset{R_e \rightarrow \infty}{=} \text{costante}$$

Se indichiamo con  $b_2$  il valore della costante e ricaviamo  $M(s)$  risulta:

$$M(s) = b_2 W^2 s^2 = b_2 B^{\frac{2}{3}} s^{\frac{4}{3}}$$

La quale mette in evidenza che, nonostante la velocità sull'asse diminuisca, il flusso di quantità di moto aumenta con  $s$ . Per spiegare questa apparente contraddizione dobbiamo studiare l'andamento del flusso specifico di massa, ovvero la portata, che ha le dimensioni di una velocità ( $W$ ) per una lunghezza al quadrato ( $s^2$ ):

$$\frac{Q(s)}{W s^2} = f(R_e) \underset{R_e \rightarrow \infty}{=} \text{costante}$$

Indicando il valore costante con  $b_3$  e ricavando  $Q(s)$  si ha:

$$Q(s) = b_3 W s^2 = b_3 B^{\frac{1}{3}} s^{\frac{5}{3}}$$

Confrontando le precedenti relazioni, si comprende come il flusso di quantità di moto aumenti perché le minori velocità raggiunte allontanandosi dallo scarico ( $u_m \propto s^{-1/3}$ ) sono compensate dall'aumento della quantità di fluido coinvolto nel flusso ( $Q \propto s^{5/3}$ ). Va notato che, per un pennacchio, non è possibile valutare rigorosamente la diluizione,  $Q(s)/Q_0$ , poiché la portata iniziale è nulla. Rimane il fatto che la portata di fluido coinvolto nel pennacchio aumenta in modo poco meno che quadratico, quindi più velocemente che in un getto, nel quale la portata è linearmente proporzionale ad  $s$ . Si conclude che l'azione delle forze di galleggiamento, che guidano il pennacchio, rende più efficiente il mescolamento tra effluente e recettore. Di conseguenza anche la concentrazione di una sostanza disciolta, che abbiamo dimostrato essere inversamente proporzionale alla portata, diminuirà con una legge del tipo  $C(s) \propto s^{-5/3}$ , quindi più rapidamente che in un getto.

## 11.5. Getto dotato di galleggiamento

I due casi precedenti rappresentano condizioni asintotiche, il primo, quello del getto semplice, in cui sono la quantità di moto e la portata iniziale a dominare il fenomeno, mentre nel secondo queste sono trascurabili e il flusso è dominato dalle sole forze di galleggiamento. Nel caso di getto dotato di galleggiamento il fenomeno è influenzato sia da portata e flusso di quantità di moto sia dal flusso di galleggiamento. Sono molte le applicazioni ingegneristiche che rientrano in questa categoria, con effluenti che possono essere sia meno sia più densi del recettore. Nella prima categoria rientrano gli scarichi a mare da impianti di trattamento delle acque reflue. Infatti l'effluente è costituito prevalentemente da acqua dolce, a volte più calda del recettore: l'acqua di mare. Sono scarichi meno densi anche le acque di raffreddamento di impianti industriali (per esempio centrali termoelettriche), che sono più calde del recettore e spesso costituite da acqua dolce.

Tra i casi di scarichi più densi del recettore, rientrano invece quelli derivanti da impianti di dissalazione. Possiamo rappresentare infatti schematicamente la dissalazione come un trattamento nel quale l'acqua di mare prelevata viene separata in una frazione di acqua dolce, che viene raccolta per gli utilizzi finali, ed in una frazione reflua, detta *salamoia*, nella quale sono contenuti, ad alta concentrazione, i sali provenienti dall'acqua prelevata e dunque più densa dell'acqua di mare da cui origina.

Le grandezze che controllano il sistema in questo tipo di flussi sono:  $\{Q_0, M_0, B, s\}$ . Con quattro grandezze possiamo costruire due scale delle lunghezze:

$$\begin{cases} L_q = \frac{Q_0}{\sqrt{M_0}} \\ L_m = \frac{M_0^{(3/4)}}{\sqrt{B_0}} \end{cases}$$

In generale, il flusso è diviso in quattro fasi (Figura 50):

- i) *Zona di sviluppo iniziale*, che si estende per  $5 \div 7 L_q$  nel quale il getto è ancora controllato in modo diretto dalle condizioni iniziali, ovvero quelle di uscita dallo scarico. In questa fase il profilo di velocità rimane simile a quello presente allo scarico e la concentrazione dei traccianti è circa costante;
- ii) *Zona di sviluppo del getto*, nella quale gli effetti della quantità di moto iniziale, che è presente da subito, prevalgono rispetto a quelli del galleggiamento, che agisce progressivamente durante lo sviluppo del flusso. In questa fase il flusso si comporta fondamentalmente come un getto: il suo asse è rettilineo e i profili di velocità e concentrazione sono assialsimmetrici e gaussiani;
- iii) *Zona di transizione*, posta ad una distanza dallo scarico di ordine di grandezza  $L_m$ , nella quale il flusso ha una traiettoria curva, e deflette gradualmente dalla direzione della velocità che aveva nella fase *getto*, alla direzione verticale che assume nella quarta ed ultima fase di sviluppo. In questa fase il getto non è assialsimmetrico a causa delle diverse condizioni di stabilità che si verificano nella parte superiore ed inferiore del getto. Considerando l'esempio di Figura 50 in cui l'effluente è meno denso del recettore, si può notare che al bordo superiore la stratificazione è instabile perché l'effluente (leggero) si trova al di sotto del recettore. Al contrario, nella parte inferiore, l'effluente si trova al di sopra del recettore, che è più pesante, e la stratificazione risulta stabile (vedi lo schema di Figura 50). Questa differente stratificazione promuove l'instabilità delle strutture di Kelvin-Helmholtz che si sviluppano ai bordi del getto nella parte superiore, e tende a stabilizzarle, inibendo il mescolamento, nella parte inferiore. Per questo motivo i profili di concentrazione e velocità si allargano maggiormente nella parte superiore che in quella inferiore. L'andamento è sempre di tipo gaussiano, ma con una larghezza che dipende dall'orientamento rispetto alla verticale, maggiore superiormente e minore verso il basso;
- iv) *zona di sviluppo del pennacchio*: quando gli effetti della quantità di moto iniziale sono esauriti, prevalgono le forze di galleggiamento. In questa fase il flusso è nuovamente assialsimmetrico, i profili sono gaussiani, ed ha le caratteristiche tipiche di un pennacchio che si sviluppa verticalmente verso l'alto se lo scarico è leggero, come nell'esempio di figura, o verso il basso se lo scarico è pesante.

In sintesi,  $L_q$  indica la distanza fino alla quale il getto è dominato dalle condizioni iniziali, mentre  $L_m$  rappresenta (come ordine di grandezza), la distanza alla quale avviene la transizione dal comportamento tipo getto a quello tipo pennacchio. Per questo motivo, il ruolo relativo di quantità di moto e forze di galleggiamento

può essere descritto attraverso il rapporto tra le due scale delle lunghezze sopra definite che è il *numero di Richardson del flusso*:

$$R_i = \frac{L_q}{L_m} = \frac{Q_0 B^{\frac{1}{2}}}{M_0^{\frac{5}{4}}}$$

In effetti il numero di Richardson sopra definito può essere riarrangiato come l'inverso di un numero di Froude densimetrico utilizzando le definizioni (102) e (103) introdotte in precedenza, e ricordando che  $B = g\Delta\rho/\rho_0 Q_0$ :

$$R_i = \sqrt{\frac{B}{Q_0} \cdot \frac{Q_0}{M_0^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{Q_0^2}{M_0^2}} = \sqrt{g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \cdot L_q \cdot \frac{1}{U^2}} = \frac{1}{\frac{U}{\sqrt{g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} L_q}}} = \frac{1}{F_r}$$

Nella quale il numero di Froude densimetrico,  $F_r$ , è basato su  $U$  come scala delle velocità,  $L_q$  come scala delle lunghezze, e la differenza di densità relativa,  $\Delta\rho/\rho_0$ , tra effluente e recettore:

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g \frac{\Delta\rho}{\rho_0} L_q}}$$

Il numero di Richardson  $o$ , in alternativa (e più comune nella pratica), il numero di Froude densimetrico può essere utilizzato per descrivere la classificazione dei getti dotati di galleggiamento:

- Per  $R_i \rightarrow 0$  e  $F_r \rightarrow \infty$  avremo che  $L_m \gg L_q$ ; quindi, la distanza alla quale il flusso passa da getto a pennacchio ( $L_m$ ) è molto grande rispetto alla dimensione dello scarico ( $L_q$ ). Il getto si trasformerà in un pennacchio molto lontano, al limite all'infinito e quindi si comporterà come un *getto semplice*;
- Per  $R_i \rightarrow \infty$  e  $F_r \rightarrow 0$  avremo che  $L_m \ll L_q$ ; quindi, il getto si trasforma in un pennacchio ancor prima che sia finita l'influenza delle condizioni iniziali, senza quindi poter sviluppare il comportamento di getto semplice; perciò, si tratterà di un *pennacchio*;
- Nella zona intermedia, in cui  $R_i \approx 1$  e  $F_r \approx 1$ , avremo un *getto dotato di galleggiamento* con un comportamento tipo getto per  $s \ll L_m$  e tipo pennacchio per  $s \gg L_m$ . Nella zona in cui  $s \approx L_m$  si svilupperà un comportamento intermedio tra i due e sarà necessario usare una schematizzazione monodimensionale delle equazioni di continuità e bilancio della quantità di moto, simile a quella che si usa per le equazioni delle correnti, la cui trattazione esula dagli obiettivi di questa trattazione.

## 11.6. Criteri progettuali di massima

### 11.6.1. Effluenti leggeri

Quando l'effluente è meno denso del recettore lo scarico si dispone sul fondo, dove le sollecitazioni di correnti e moto ondoso sono ridotte e la struttura non interferisce con la navigazione e le altre eventuali attività marittime che normalmente si svolgono in superficie. Una condotta posata sul fondo, o interrata, porta il punto di scarico sufficientemente lontano dalla costa (ordine del Km) e ad una profondità di qualche decina di metri. La condotta può essere posata sul fondo o, per minimizzare l'impatto sull'ecosistema bentonico, interrata per mezzo della tecnica di trivellazione orizzontale controllata (TOC), che consente di posare il tubo direttamente durante lo scavo di un tunnel senza aprire e poi richiudere una trincea.

Per massimizzare la diluizione si adotta tipicamente la soluzione multiporta che consiste in una serie di diffusori distribuiti lungo la parte

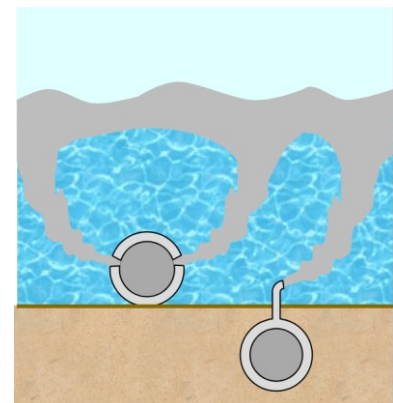


FIGURA 55

terminale della condotta. Quando è posata sul fondo i diffusori possono essere semplici fori in parete sottile distribuiti lateralmente lungo la sua parete laterale. Gli orifizi sono orientati leggermente verso l'alto in modo che il getto rimanga ben staccato dal fondo per evitare che, a causa dell'effetto Coanda, esso tenda ad aderire al fondo causando danni all'ecosistema bentonico e ritardando la diluizione.

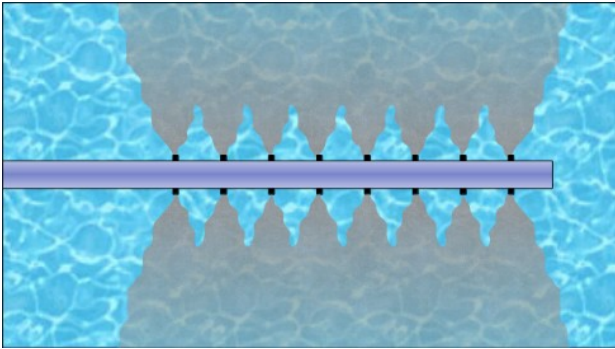


FIGURA 56

Attraverso tutta la parte della superficie del getto che aderisce al fondo, infatti, non può esserci mescolamento con il fluido recettore, ed essa non contribuisce alla diluizione. Se invece la condotta è interrata, si installano ugelli a gomito che si staccano dal fondo e rilasciano il getto verso l'alto analogamente al caso precedente (Figura 55). Quale che sia il tipo di diffusori, quando gli ugelli sono disposti in serie lungo il fianco della condotta, come tipico delle configurazioni multiporta, i diversi getti tendono a coalescere tra loro. La causa di questo fenomeno risiede nel progressivo aumento della portata del getto che avviene a spese del fluido recettore, con una conseguente diminuzione del fluido che separa i getti, e una fusione dei getti adiacenti. Ad una certa distanza dallo scarico, dopo la fusione tra loro, formano un singolo getto quasi 2D (Figura 56).

### 11.6.2. Effluenti pesanti

È il caso di acque più salate o più fredde del fluido recettore. Tipici esempi sono la già citata salamoia prodotta da un impianto di dissalazione, oppure le acque reflue da impianti di rigassificazione di Gas Naturale Liquefatto (GNL). In questi ultimi l'acqua di mare viene usata per aumentare la temperatura del gas liquido fino a portarlo allo stato gassoso attraverso opportuni scambiatori di calore e poi scaricata nuovamente a mare. Il refluo, che ha ceduto calore al gas, ha una temperatura inferiore al recettore di diversi gradi ed è tipicamente addizionato di biocidi (ad esempio a base di cloro) per evitare la contaminazione degli impianti.

Le scelte progettuali di questo tipo di scarichi sono guidate dalla fenomenologia, che è completamente diversa dalla precedente. In questo caso, infatti, dopo la fase iniziale di diluizione, se permane una differenza di densità significativa, l'effluente più denso tende a rimanere in prossimità del fondo e a scorrere verso le zone più profonde, guidato dalla forza di gravità, come un flusso stratificato stabilmente. La stratificazione stabile inibisce il mescolamento successivo e, sul fondo, sono ridotti al minimo tutti i determinanti che promuovono il mescolamento come il moto ondoso e le correnti. In mancanza di mescolamento il fluido scorre verso le zone più profonde e può accumularsi nel tempo in aree di depressione, generando veri e propri *laghi salati* di profondità, che diventano zone morte. Un fenomeno che può essere interrotto solo da mareggiate intense, che riescano a far giungere, anche in prossimità del fondo, sufficiente energia meccanica da rompere la stratificazione e determinare il mescolamento dello strato denso con il fluido superiore.

Si tratta di una situazione particolarmente delicata perché la zona bentonica è ben più cruciale per l'intero ecosistema marino di quella superficiale. Qui, ad esempio, si distendono le praterie di Posidonia Oceanica, fondamentali per la riproduzione ed il nutrimento di moltissime specie ittiche, e che svolgono un'importante funzione di stabilizzazione e protezione dall'erosione delle spiagge. E la posidonia è particolarmente sensibile non solo alla variazione della salinità media del mare, ma anche alle fluttuazioni stesse di salinità.

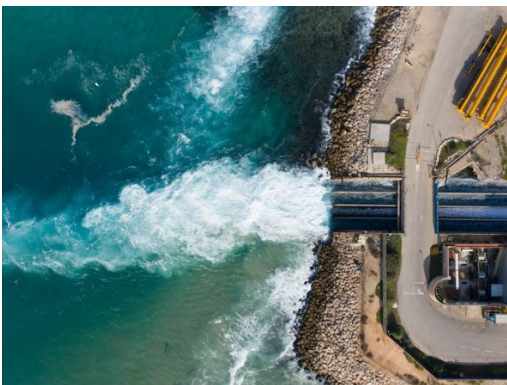


FIGURA 57

In sintesi, nel caso di effluente pesante, al contrario che nel caso di effluenti leggeri, la diluizione nel campo lontano non può essere data per garantita poiché affidata ad eventi saltuari come il verificarsi di mareggiate, o di correnti, sufficientemente intense da portare l'energia cinetica turbolenta fino al fondo. Rende ancor più delicata la situazione la possibilità del verificarsi di fenomeni di accumulo fluido pesante in depressioni che, pur molto gradualmente, nel tempo possono determinare anche danni ingenti. Per questo motivo, è importante garantire una diluizione elevata nella fase iniziale, che è controllata dal progetto del diffusore e non aleatoria, in modo da risolvere il problema alla radice. Infatti, non solo una maggiore diluizione comporta minor

impatto ambientale, ma garantisce una stratificazione stabile meno intensa e quindi maggiori probabilità di diluizione anche nelle fasi successive.

A questo scopo, nelle zone in cui è garantito un moto ondoso intenso e costante, per esempio in Oceano, la scelta più semplice ed efficace è quella di utilizzare scarichi a bocca piena posti in superficie e in zone di scogliera esposte al moto ondoso (Figura 57). La diluizione in questo caso è affidata interamente alla turbolenza generata dalla costante interazione tra onde e scogliera. Se invece nella zona interessata non è presente un moto ondoso intenso e costante, come accade tipicamente in Mediterraneo, la diluizione va affidata al progetto del diffusore.

Le configurazioni scelte in questo secondo caso sono analoghe alle precedenti: le condotte sono posate sul fondo per minimizzare l'impatto meccanico delle onde e l'interferenza con la navigazione e le altre attività antropiche che si svolgono in superficie; i diffusori possono essere multiporta con ugelli distribuiti sui fianchi della condotta, analoghi ai precedenti se non per l'orientazione dello scarico, che è puntata verso l'alto in modo che il getto percorra un arco più lungo possibile prima di raggiungere nuovamente il fondo. Indagini sperimentali dimostrano che l'angolo di rilascio ottimale si aggira intorno ai  $70^\circ$  rispetto all'orizzontale. La Figura 58 mostra un getto pesante nella tipica configurazione con ugello in parete sottile sul fianco di una condotta e il fluido recettore in quiete.



FIGURA 58 – GETTO PESANTE CON RECETTORE IN QUIETE

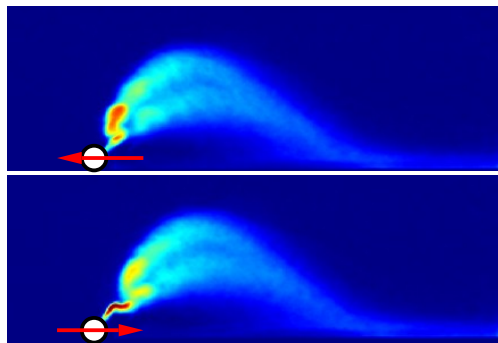


FIGURA 59 – GETTO IN PRESENZA DI ONDE.  
CAMPO DI CONCENTRAZIONE MEDIA IN DUE  
FASI DEL MOTO ONDOSO

Quando è presente un moto ondoso, questo si trasforma, in prossimità del fondo, in un moto orizzontale oscillante che ha l'effetto di deflettere alternativamente il getto in direzioni opposte. L'effetto è lo sviluppo di un getto a due corpi adiacenti ai quali corrisponde un significativo aumento della diluizione (Figura 59).