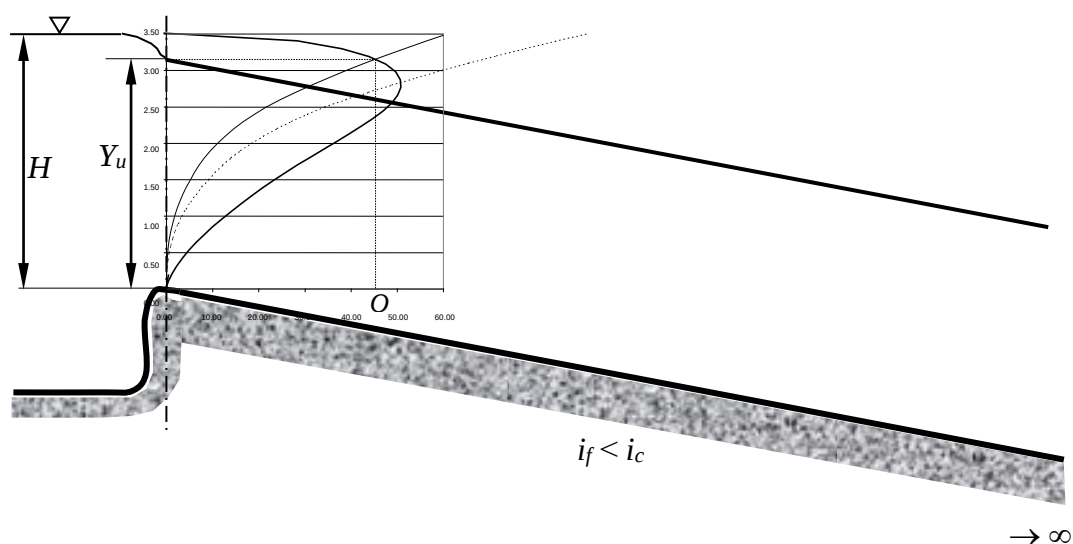


Andrea Balzano

Esercizi di Meccanica dei Fluidi



Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Ingegneria del Territorio

Marzo 2004

CAPITOLO 1
IDROSTATICA

Esercizio 1.1

La paratoia cilindrica AB di peso P , avente come direttrice il quarto di circonferenza di centro C e raggio R , è incernierata in B e semplicemente appoggiata in A . Dati il peso specifico del liquido, identico, contenuto nei due comparti, γ , ed il livello della superficie libera nel serbatoio 1, determinare la posizione della superficie libera nel comparto 2 in condizioni di equilibrio limite della paratoia (cioè tale che un ulteriore aumento di livello nel comparto 2 determini l'apertura della paratoia).

Dati:

- peso specifico del liquido, γ ;
- peso proprio della paratoia, $\bar{P}$;
- posizione della superficie libera nel comparto 1;
- dati geometrici.

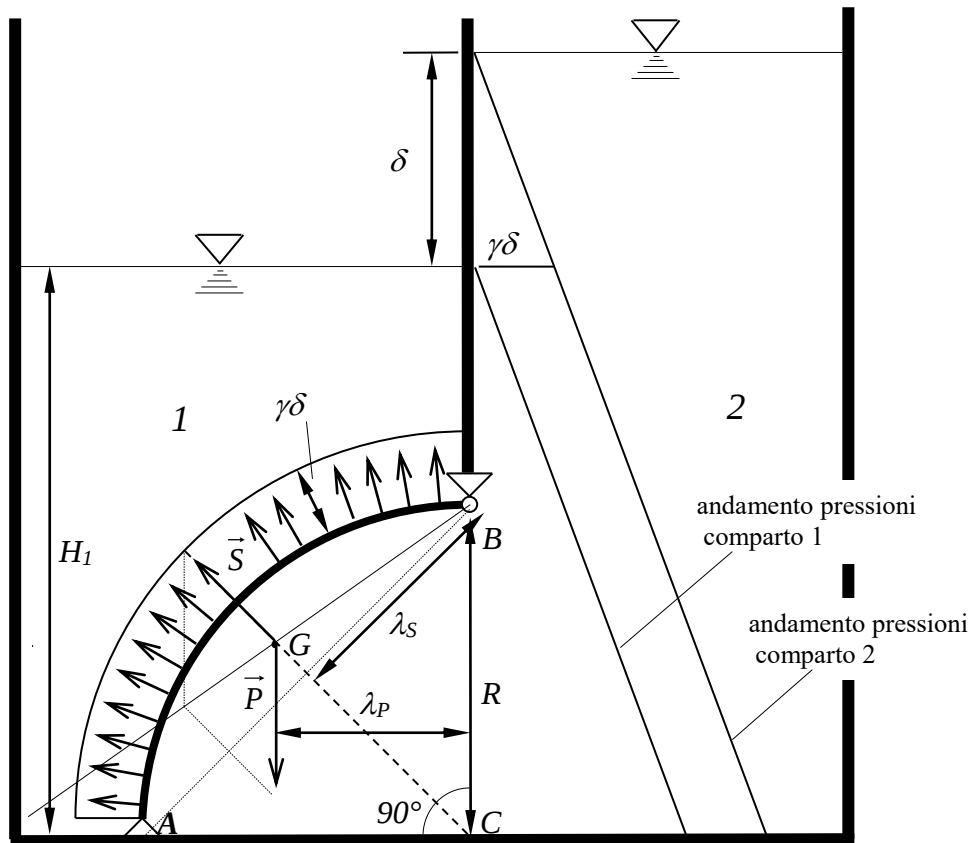


Figura 1.1

La condizione di apertura incipiente si realizza quando si annulla il momento risultante delle distribuzioni di pressione sulle due facce della paratoia e del suo peso proprio, col che è nulla la reazione vincolare del semplice appoggio in A .

Nel caso lo spessore della paratoia possa considerarsi trascurabile, e perciò le due superfici possano essere considerate come le due facce della stessa superficie geometrica, si verifica facilmente che la somma algebrica delle due distribuzioni di pressione sulle due facce è una distribuzione uniforme radiale di valore $\gamma\delta$, poiché, punto per punto, la differenza degli affondamenti del punto rispetto ai due piani dei carichi idrostatici è costante e pari al dislivello

incognito, δ , delle superfici libere nei due comparti del serbatoio. Per simmetria, la spinta idrostatica risultante sulla paratoia è data pertanto da un vettore $\vec{S}$ avente la bisettrice dell'angolo $\hat{ACB}$ come retta d'azione, rivolto come il vettore $\vec{CG}$, e di modulo per unità di lunghezza in profondità (direzione normale al piano del disegno) $|\vec{S}| = \gamma \delta \overline{AB}$, ossia pari alla spinta sulla superficie piana proiezione della paratoia cilindrica su un piano perpendicolare alla bisettrice di $\hat{ACB}$ (il ragionamento è analogo a quello mediante il quale si dimostra il metodo di determinazione delle spinte idrostatiche per componenti).

Assimilando la paratoia ad un arco di cerchio omogeneo, il suo baricentro, ove è applicato il peso proprio, è situato sulla bisettrice dell'angolo $\hat{ACB}$, a distanza $\overline{CG} = R \sin \alpha / \alpha$ dal centro C dell'arco di circonferenza sezione della paratoia cilindrica nel piano del disegno, ove si è posto $2\alpha = \hat{ACB}$. Per il caso riportato in Figura 1.1, si calcolano i bracci del peso $\vec{P}$ e della spinta $\vec{S}$ rispetto al polo B , dati rispettivamente da:

$$\lambda_p = \overline{CG} \cos \alpha = \overline{CG} \sqrt{2} / 2$$

$$\lambda_s = R \sin \alpha = R \sqrt{2} / 2 .$$

La condizione di equilibrio limite alla rotazione attorno al polo B è data da:

$$\lambda_p P = \lambda_s S \ell ,$$

in cui ℓ è la dimensione in profondità della paratoia, Sostituendo i dati del problema per il caso in Figura 1.1, si ha:

$$PR \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha = \gamma \delta \frac{R}{\cos \alpha} R \sin \alpha \ell ,$$

con l'angolo α espresso in radianti, da cui infine:

$$\delta = \frac{P(\cos \alpha)^2}{R \alpha \ell} = \frac{2P}{\pi \gamma R \ell} .$$

Sulla base di tale espressione, si può determinare il modulo della spinta del liquido:

$$|\vec{S}| = \frac{2P}{\pi \ell \cos \alpha} = \frac{4P}{\sqrt{2} \pi \ell} .$$

Si osservi che, in generale, la paratoia è soggetta a una forza risultante delle pressioni e del peso proprio non nulla, ma avente nullo soltanto il momento rispetto alla cerniera B . La reazione di quest'ultima, pertanto, è anch'essa non nulla e necessaria per l'equilibrio della paratoia.

Essendo nullo il momento della forza $\vec{P} + \vec{S}$ rispetto al punto B , essa deve passare per detto punto. Inoltre, essa passa anche per il baricentro dell'arco di cerchio direttrice della paratoia cilindrica, in quanto per tale punto passano sia $\vec{P}$ che $\vec{S}$. È pertanto possibile determinare la forza $\vec{S}$ con un metodo grafico, congiungendo con un segmento i punti B e G e determinando la forza agente sulla bisettrice dell'arco di cerchio che determina, sommata vettorialmente con il peso $\vec{P}$, una risultante parallela alla congiungente $\overline{BG}$.

Esercizio 1.2

Determinare le spinte che si scaricano sulle flange AA e BB delle testate del serbatoio in Figura 1.2.

Dati:

- peso specifico del liquido contenuto nel serbatoio, γ ;
- misura del manometro semplice, Δ ;
- peso specifico del liquido manometrico, γ_m ;
- dati geometrici (a , D , α).

La posizione del piano dei carichi idrostatici si determina imponendo l'uguaglianza dei valori della pressione determinati per il menisco m_1 in funzione degli affondamenti dello stesso rispetto ai piani dei carichi idrostatici del liquido contenuto nel serbatoio (incognito) e del liquido manometrico (posto alla quota del menisco m_2):

$$\gamma\delta = \gamma_m\Delta,$$

da cui si ricava l'affondamento δ . Il liquido contenuto nel serbatoio si trova in pressione in tutti i suoi punti. Conseguentemente le spinte agenti sulle due testate tendono a separare queste ultime dal corpo del serbatoio.

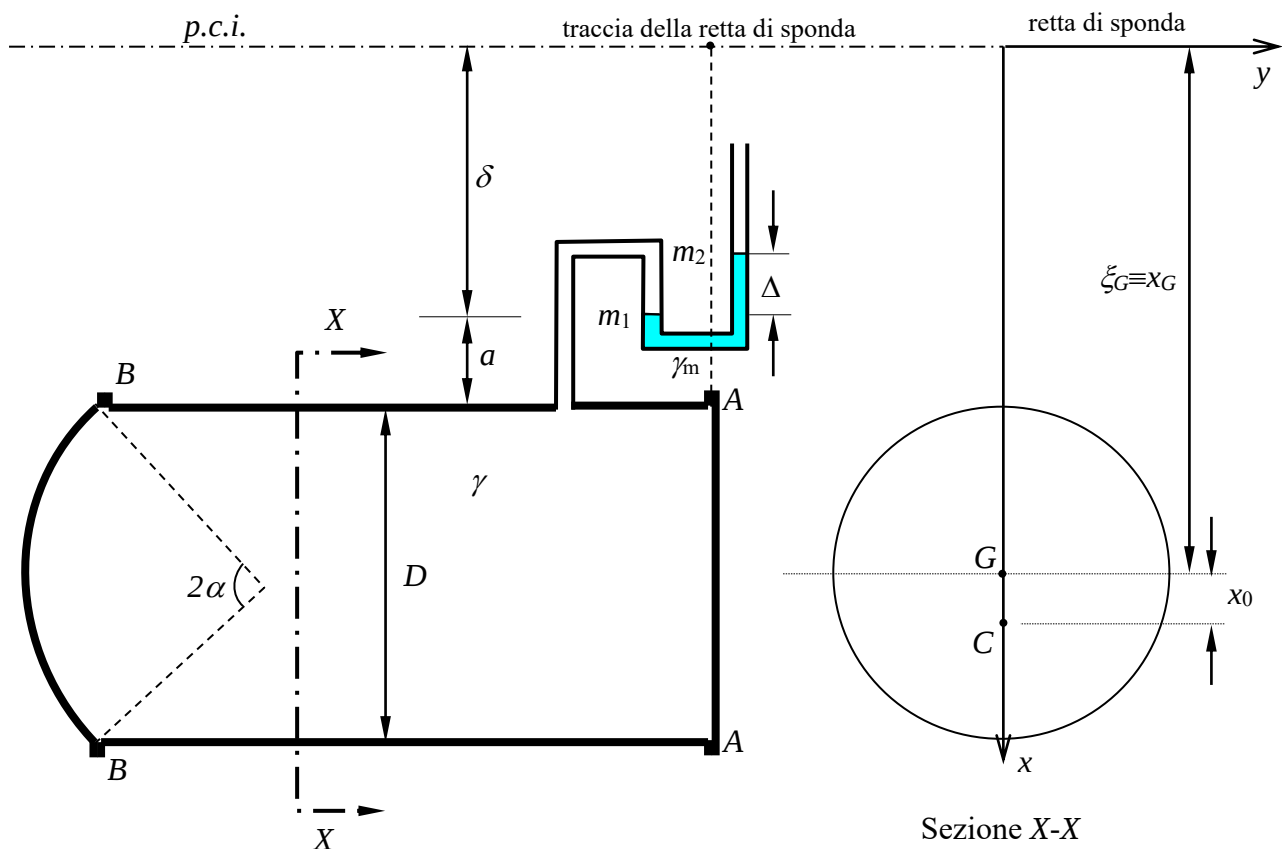


Figura 1.2

Il modulo della spinta sulla testata circolare piana AA si ottiene come prodotto della pressione nel baricentro della sezione per l'area della superficie circolare:

$$|\vec{S}_{AA}| = p_G \Omega_{AA} = \gamma \xi_G \frac{\pi D^2}{4}$$

La spinta $\vec{S}_{AA}$ è applicata al centro di spinta, posto, per simmetria, sull'asse x indicato in Figura 1.2 (è infatti nullo il momento centrifugo della sezione circolare rispetto a tale asse), al disotto del baricentro della sezione, a una distanza da questo pari al rapporto fra il momento d'inerzia della sezione circolare rispetto all'asse orizzontale baricentrico giacente sul piano della sezione ed il momento statico della sezione rispetto alla retta di sponda¹:

$$x_0 = \frac{I_0}{M_s} = \frac{\iint_{\Omega_{AA}} (x - x_G)^2 d\Omega}{\iint_{\Omega_{AA}} x d\Omega} = \frac{\pi r^4 / 4}{\pi r^2 x_G} = \frac{r^2}{4x_G}.$$

In tale espressione, in forza del teorema di Varignon, si è calcolato il momento statico come prodotto dell'area della superficie circolare moltiplicata per la distanza del baricentro della sezione dalla retta di sponda.

La spinta $\vec{S}_{BB}$ viene esercitata sulla calotta sferica dal liquido adiacente. Pertanto, per il principio di azione e reazione essa è l'uguale e contraria della forza che la calotta esercita sul liquido. Fatta questa osservazione, la spinta può determinarsi mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica ad un volume liquido avente una parte della superficie di contorno a contatto con la calotta. Il volume più semplice rispondente a questo requisito è il volume W_C avente come parte rimanente della superficie di contorno la superficie circolare verticale di diametro D (vedi Figura 1.3).

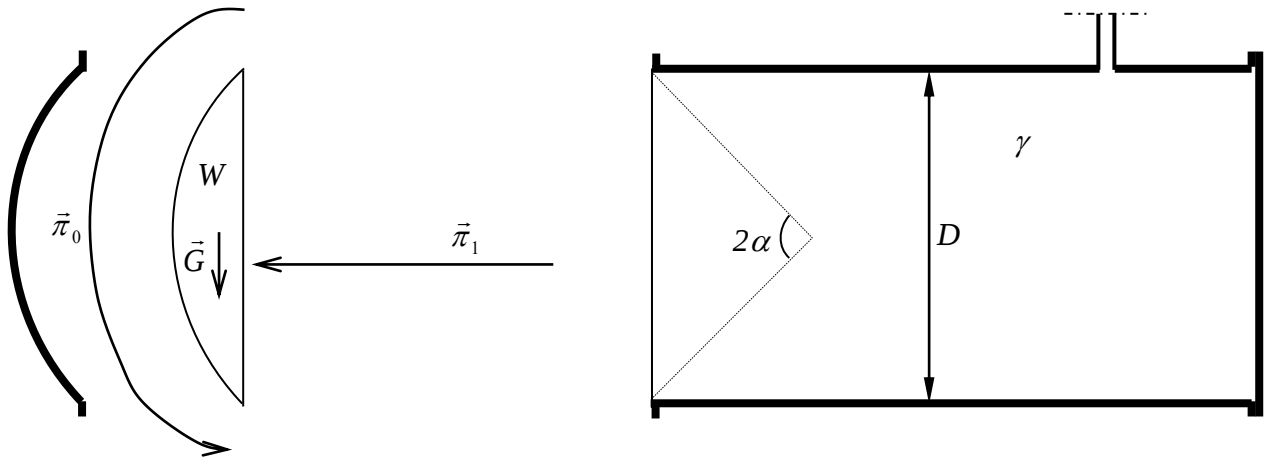


Figura 1.3

Tale volume liquido è in equilibrio idrostatico sotto l'azione della $\vec{\pi}_0$ esercitata dalla calotta, uguale e contraria alla spinta esercitata dal liquido sulla calotta, $\vec{S}_{BB_0} = -\vec{\pi}_0$, della $\vec{\pi}_1$ esercitata dal liquido adiacente e del peso proprio $\vec{G}$. (la rappresentazione grafica fatta della forza $\vec{\pi}_0$ vuole

¹ Con il simbolo ξ_G è stato indicato l'affondamento del baricentro della sezione rispetto al piano dei carichi idrostatici, misurato sempre lungo la verticale; con il simbolo x_G è stata indicata la coordinata del baricentro lungo l'asse giacente sul piano della sezione, normale alla retta di sponda. Essendo il piano in cui giace la sezione verticale, le due grandezze coincidono. In generale, per una superficie piana formante un angolo β rispetto all'orizzontale si avrà $\xi_G = x_G \sin \beta$.

soltanto evidenziare che essa agisce sulla superficie sferica: essa è ovviamente un vettore come tutte le altre forze. Di più, essendo essa la risultante di forze elementari tutte passanti per il centro della sfera, è applicabile nel centro della sfera o, per le condizioni di equivalenza dei sistemi di forze, in qualunque altro punto della sua retta d'azione, passante per il centro della sfera).

L'equazione globale per il volume liquido si scrive perciò:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_1 = 0 ,$$

da cui l'espressione della spinta cercata:

$$\vec{S}_{BB} = -\vec{\pi}_0 = \vec{G} + \vec{\pi}_1$$

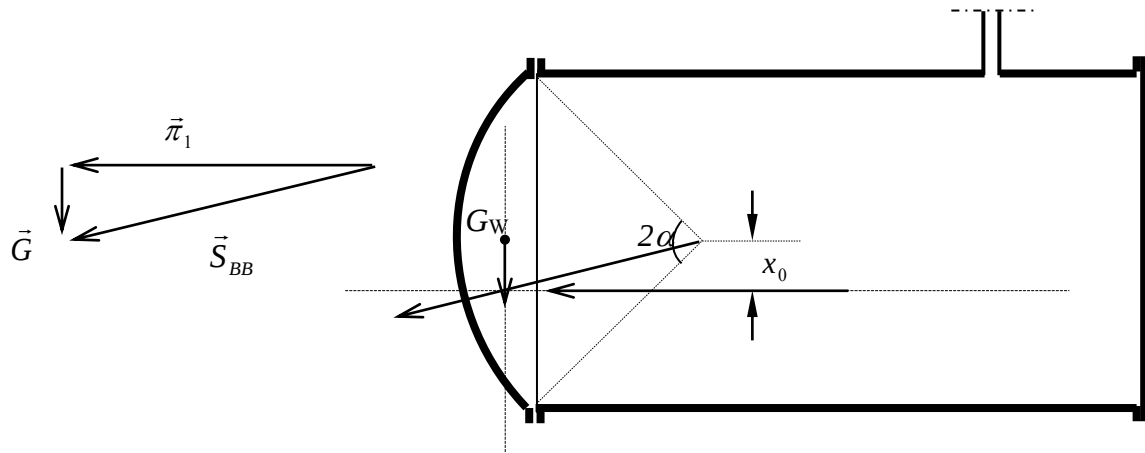


Figura 1.4

La forza peso è data dal prodotto del peso specifico del liquido, γ , per il volume di controllo, W_C . Essa è applicata nel baricentro del volume liquido, G_W . La $\vec{\pi}_1$ ha lo stesso modulo e lo stesso punto di applicazione della spinta sulla testata piana, $\vec{S}_{AA}$, in quanto le due spinte, aventi versi opposti, sono esercitate su una identica superficie geometrica aventi i baricentri alla stessa quota. Dovendo essere il sistema delle due forze, $\vec{G}$ e $\vec{\pi}_1$, equivalente alla loro risultante applicata nel centro della calotta sferica, il punto di intersezione delle rispettive rette d'azione deve appartenere alla retta d'azione della risultante $\vec{S}_{BB}$, come illustrato in Figura 1.4².

Essendo la superficie piana circolare la proiezione della superficie della calotta nella direzione dell'asse del serbatoio, lo stesso risultato si ottiene immediatamente mediante il metodo di calcolo per componenti.

² Tale osservazione può anche essere utilizzata per ricavare la posizione del baricentro G_W , note che siano le posizioni del centro della calotta e del centro di spinta della componente orizzontale.

Esercizio 1.3

Determinare in modulo, direzione e punto di applicazione, la spinta esercitata complessivamente sulla valvola sferica dai fluidi contenuti nei due comparti del serbatoio in pressione riportato in Figura 1.5. Verificare l'equilibrio della valvola sferica nella sua sede.

Dati:

- Peso specifico γ del liquido contenuto nel serbatoio e γ_m del liquido manometrico;
- misura fornita dal manometro differenziale, Δ ;
- peso proprio della valvola, P ;
- dati geometrici (dimensioni serbatoio e valvola, quote pelo libero e menischi manometro)

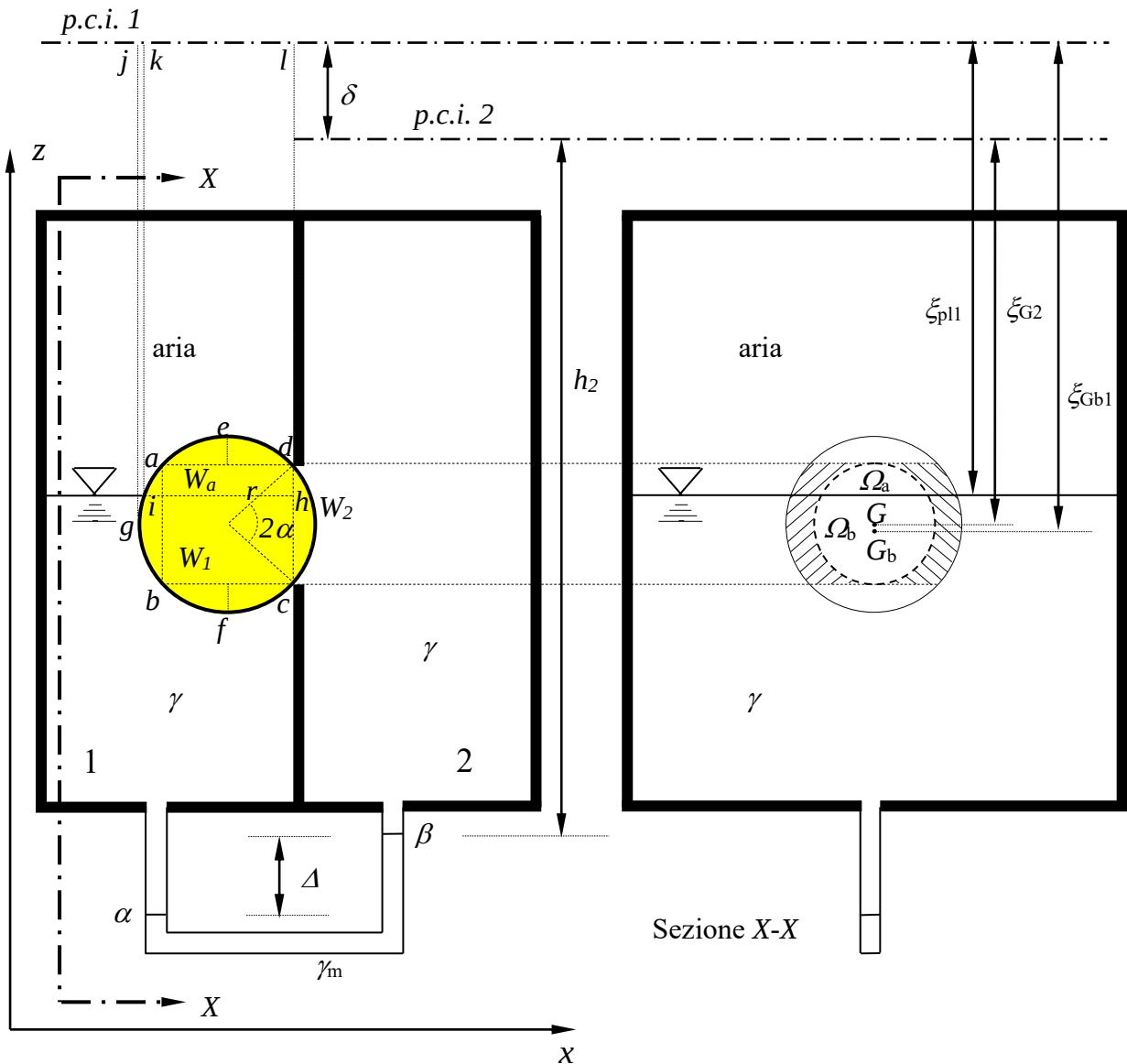


Figura 1.5

Calcolo della spinta per componenti

La componente orizzontale S_{01} della spinta esercitata dai fluidi nel comparto 1 si riduce alla spinta *fittizia* sulla sezione piana circolare dell'apertura praticata nel setto di separazione dei due comparti, $\Omega = \Omega_a + \Omega_b$, proiezione della calotta sferica ab in direzione normale al setto di separazione. Infatti, la parte rimanente di superficie laterale della sfera compresa nel comparto 1

può essere suddivisa in parti le cui proiezioni orizzontali piane sono uguali e le relative spinte orizzontali opposte in verso (semi-calotte *ae*, *ed* e *bf*, *fc* e volume la cui proiezione su un piano verticale è riportata, campita, nella sezione *X-X*). Assumendo una posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido nel comparto 1 come in Figura 1.5, e come verso positivo delle proiezioni orizzontali quello delle *x* crescenti, si ha pertanto:

$$S_{o1} = p_{aria} \Omega_a + p_{Gb1} \Omega_b = \gamma \xi_{pl1} \Omega_a + \gamma \xi_{Gb1} \Omega_b$$

in cui p_{aria} è la pressione dell'aria, pari alla pressione vigente sul pelo libero del liquido, p_{Gb1} è la pressione del liquido del comparto 1 alla quota del baricentro G_b della sezione Ω_b , ξ_{pl1} e ξ_{Gb1} sono gli affondamenti, rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido nel serbatoio 1, del pelo libero e del baricentro G_b rispettivamente.

La componente verticale della spinta esercitata dai fluidi nel comparto 1 è data dalla somma algebrica delle spinte verticali agenti sulle proiezioni ortogonali dei due volumi W_a e W_1 su un piano orizzontale. Assunto come verso positivo delle proiezioni verticali lo stesso dell'asse *z*, si ha:

$$\begin{aligned} S_{v1a} &= -p_{aria} \Omega_{hi} = -\gamma \xi_{pl} \Omega_{hi} = -\gamma V_{ijlh} \\ S_{v1i} &= \gamma V_{gildcfb} - \gamma V_{gjki} \end{aligned} ,$$

in cui $V_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$ rappresenta un volume individuato dai punti della sua sezione con un piano verticale, contenuti nel pedice del simbolo. Si osservi che, mentre le componenti verticali delle pressioni agenti sulla superficie di contorno del volume W_a sono sempre rivolte verso il basso, per il calcolo della componente verticale della spinta agente sul volume W_1 si è dovuta suddividere la relativa superficie di contorno in due parti, in ognuna delle quali le componenti verticali delle pressioni agenti avessero verso concorde. Si osservi anche che la S_{v1a} è pari al peso di un volume liquido *fittizio* compreso fra il piano dei carichi idrostatici 1 e la proiezione orizzontale, Ω_{hi} , della parte della superficie di contorno del volume W_a esposta all'aria. Complessivamente, per la componente verticale della spinta esercitata dai fluidi del comparto 1 si ha:

$$S_{v1} = S_{v1a} + S_{v1i} = -\gamma V_{ijlh} + \gamma V_{gildcfb} - \gamma V_{gjki} = \gamma V_{gihcfb} .$$

Essa è perciò data dal peso di una massa liquida *fittizia* di peso specifico γ e volume pari alla parte del volume della valvola sferica immersa nel liquido del comparto 1.

Per quanto concerne il comparto 2, con analoga analisi si determinano le componenti orizzontale e verticale della spinta esercitata sulla valvola dal liquido del comparto 2:

$$\begin{aligned} S_{o2} &= -p_{G_2} \Omega = -\gamma \xi_{G_2} \Omega \\ S_{v2} &= \gamma W_2 \end{aligned} .$$

La componente verticale della spinta esercitata complessivamente dai fluidi contenuti nei due comparti è pertanto pienamente determinata, ed uguale a una forza verticale rivolta verso l'alto, di modulo pari al peso di una massa liquida di volume pari al volume della parte della valvola effettivamente immersa nel liquido e peso specifico γ .

$$S_v = S_{v1} + S_{v2} = \gamma V_{gihcfb} + \gamma W_2 = \gamma V_{gihdcfb} = \gamma (W_1 + W_2) .$$

La componente orizzontale della spinta complessiva è data da:

$$S_o = S_{o1} + S_{o2} = \gamma \xi_{pl1} \Omega_a + \gamma \xi_{Gb1} \Omega_b - \gamma \xi_{G_2} \Omega ,$$

in cui risultano incogniti i tre affondamenti ξ . Assumendo per comodità come riferimento delle quote la superficie libera e ricordando che $\Omega = \Omega_a + \Omega_b$, l'espressione della componente orizzontale della spinta si può scrivere:

$$S_o = \gamma \xi_{pl1} \Omega_a + \gamma (\xi_{pl1} + z_{pl} - z_{G_b}) \Omega_b - \gamma (\xi_{pl1} - \delta + z_{pl} - z_G) \Omega = \\ \gamma (z_{pl} - z_{G_b}) \Omega_b - \gamma (-\delta + z_{pl} - z_G) \Omega$$

in cui le quote del pelo libero e dei baricentri delle figure piane sono noti, come tutti i dati geometrici. Il valore della differenza di quota fra i due piani dei carichi idrostatici, δ , si ricava in funzione della misura del manometro differenziale, Δ , dalla relazione:

$$\delta = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta ,$$

che, sostituita nella equazione precedente, consente di determinare il valore di S_o .

Calcolo della spinta mediante l'equazione globale dell'idrostatica

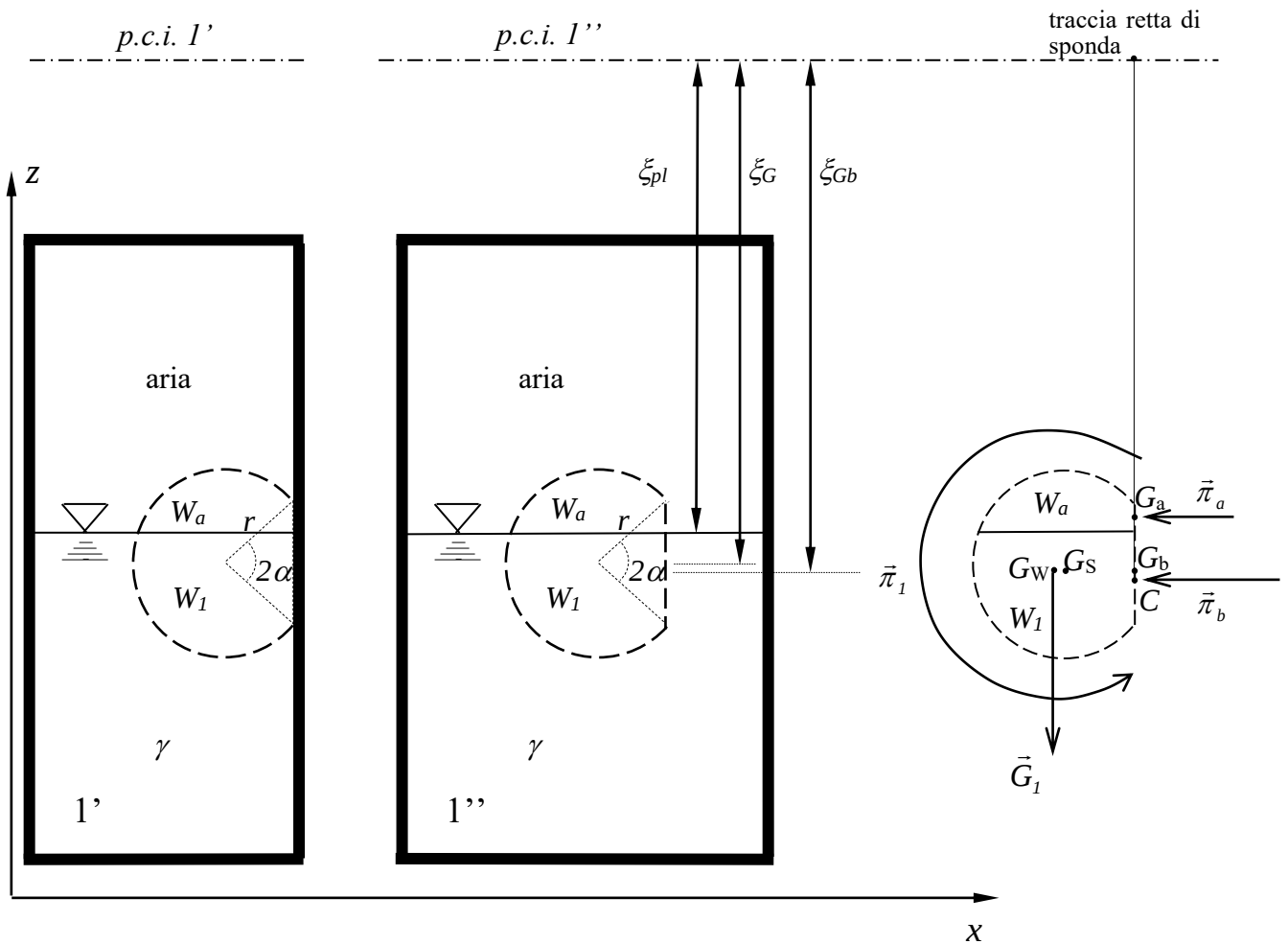


Figura 1.6

Come nel procedimento seguito in precedenza, la spinta totale esercitata dai fluidi sulla superficie della valvola sferica va determinata come somma delle spinte agenti sulle parti della superficie stessa che si trovano nei due compartimenti. Si illustra di seguito il procedimento per determinare la spinta esercitata dai fluidi nel comparto 1.

Il problema può essere risolto mediante l'applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica se è possibile definire una situazione fittizia in cui un volume fluido, anche disomogeneo:

1. ha tutta o parte della superficie di contorno uguale alla superficie reale sulla quale si vuole determinare la spinta;
2. è soggetto alla stessa distribuzione di pressioni del caso reale;
3. si trova in equilibrio idrostatico nel fluido circostante.

Rispondono a tali requisiti i volumi riportati in tratteggio nei serbatoi 1' e 1'' in Figura 1.6, entrambi costituiti da aria nella parte posta al di sopra del pelo libero del liquido e liquido di peso specifico γ nella parte sottostante. Nel primo caso il volume è materialmente a contatto della parete del serbatoio ove, nel serbatoio reale, si trovava l'apertura circolare fra i due compartimenti; nel secondo caso il volume è interamente circondato di fluido. Essendo il piano dei carichi idrostatici del liquido posto nella stessa posizione relativa al pelo libero, i due volumi sono soggetti punto per punto alla stessa pressione, uguale anche a quella agente in realtà sulla superficie della valvola: a ciascuno dei due può indifferentemente farsi riferimento per la determinazione della spinta cercata.

È poi evidente che i volumi fittizi si trovano in condizioni di equilibrio idrostatico con i fluidi circostanti. Lo stesso non avrebbe potuto dirsi di un uguale volume omogeneo di aria o di liquido, in quanto in tale caso le superfici di separazione aria-liquido non sarebbero state costituite da piani orizzontali (più in generale: da superfici equipotenziali), condizione necessaria per l'equilibrio idrostatico.

Con riferimento allo schema statico di Figura 1.6, l'equazione globale per il volume di controllo si scrive:

$$\vec{G}_1 + \vec{\pi}_1 + \vec{\pi}_a + \vec{\pi}_b = 0$$

in cui $\vec{G}_1$ è la forza peso agente sul volume di controllo, assunta pari, in buona approssimazione, al peso della sola parte liquida del volume ($|\vec{G}_1| = \gamma W_1$; nel caso dell'acqua $\gamma \approx 10^3 \gamma_{\text{aria}}$), mentre la forza di superficie è stata scomposta nelle tre forze:

- $\vec{\pi}_1 = \vec{S}_1$, agente sulla superficie sferica, uguale alla spinta cercata (la rappresentazione grafica fatta della forza vuole soltanto evidenziare che essa agisce sulla superficie sferica: essa è ovviamente un vettore come tutte le altre forze. Di più, essendo essa la risultante di forze elementari tutte passanti per il centro della sfera, è applicabile nel centro della sfera o in qualunque altro punto della sua retta d'azione, passante per il centro della sfera);
- $\vec{\pi}_a$, agente sulla parte di superficie piana circolare, Ω_a , posta al di sopra del pelo libero;
- $\vec{\pi}_b$, agente sulla parte di superficie piana circolare, Ω_b , posta al di sotto del pelo libero;

Si ottiene pertanto la spinta esercitata dal liquido nel comparto 1:

$$\vec{S}_1 = \vec{\pi}_1 = -\vec{G}_1 - \vec{\pi}_a - \vec{\pi}_b,$$

la cui componente verticale, di modulo $G_1 = \gamma W_1$, si riconosce essere uguale alla S_{v1} determinata con il metodo di calcolo per componenti.

Con ragionamento del tutto analogo si determina la spinta agente sulla parte della superficie della valvola posta nel comparto 2, analizzando l'equilibrio idrostatico di un volume identico alla parte del volume della valvola contenuta nel comparto 2, costituito interamente di liquido, posto nella stessa posizione relativa rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido del comparto 2, come illustrato in Figura 1.7.

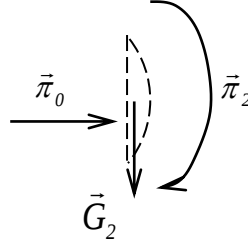


Figura 1.7

Si ha pertanto:

$$\vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_2 + \vec{G}_2 = 0 ,$$

in cui $\vec{\pi}_2 = \vec{S}_2$ è la spinta esercitata sulla valvola dal liquido del comparto 2 e $|\vec{G}_2| = \gamma W_2$ è pari alla componente verticale della spinta S_{v2} determinata con il metodo per componenti. Si ottiene perciò:

$$\vec{S} = \vec{\pi}_2 = -\vec{\pi}_0 - \vec{G}_2 ,$$

da cui l'espressione della spinta totale:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = -\vec{G}_1 - \vec{G}_2 - \vec{\pi}_a - \vec{\pi}_b - \vec{\pi}_0 ,$$

la cui componente verticale si è riconosciuto essere uguale alla $S_v = \gamma(W_1 + W_2)$ determinata con il metodo di calcolo per componenti.

Il vettore $-(\vec{\pi}_a + \vec{\pi}_b + \vec{\pi}_0)$ ha direzione orizzontale e modulo:

$$\pi_x = |\gamma \xi_{pl1} \Omega_a + \gamma \xi_{Gb1} \Omega_b - \gamma \xi_{G2} \Omega| ,$$

pari al valore assoluto della componente orizzontale S_o determinata con il metodo per componenti. Introducendo le relazioni fra gli affondamenti ξ_{pl1} , ξ_{Gb1} e ξ_{G2} e la formula del manometro differenziale come già fatto nel caso precedente, si determina il valore di $\pi_x = S_o$.

La rappresentazione grafica qualitativa della spinta $\vec{S}$ e delle forze componenti evidenziate nell'analisi statica è riportata nella Figura 1.8.

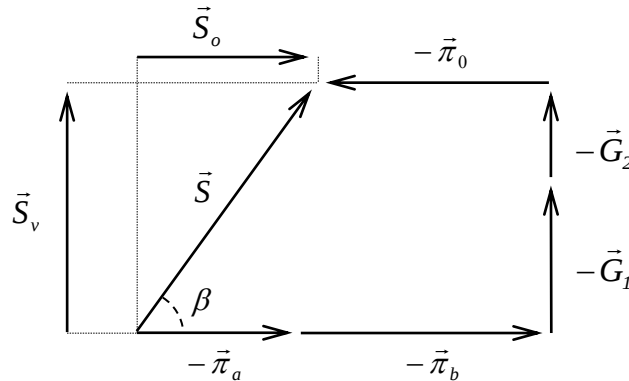


Figura 1.8

La risultante $\vec{S}$ forma con l'orizzontale un angolo $\beta = \arctg(|\vec{S}_v| / |\vec{S}_o|)$ ed ha modulo $|\vec{S}| = \sqrt{|\vec{S}_v|^2 + |\vec{S}_o|^2}$. Essendo la risultante di forze elementari di pressione puntualmente perpendicolari alla superficie sferica e perciò passanti tutte per il centro della sfera, la spinta $\vec{S}$ è applicata essa stessa nel centro della sfera. Per le condizioni di equivalenza dei sistemi di forze, è infatti consentito fare scorrere tali componenti infinitesime lungo le rispettive rette d'azione fino al centro della sfera e ivi effettuarne la composizione per ottenere la spinta risultante, $\vec{S}$.

- ✓ Le posizioni ipotizzate per i singoli piani dei carichi idrostatici sono assolutamente arbitrarie e non verificabili, in mancanza di ulteriori informazioni, anche successivamente alla determinazione della spinta complessiva. Alle stesse conclusioni sulla determinazione della spinta si sarebbe potuti giungere nel caso in cui entrambi i serbatoi fossero stati ipotizzati in depressione, ovvero aventi i piani dei carichi idrostatici sezionanti il volume della valvola, purché con il p.c.i. 1 al di sopra del p.c.i. 2 della quantità δ , come imposto dalla posizione dei menischi del manometro differenziale.

Condizione di equilibrio della valvola nella sua sede

La valvola è soggetta, oltre che alla spinta dei fluidi, al peso proprio ed alla reazione vincolare esercitata dal contorno circolare dell'apertura praticata nel setto di separazione dei due comparti. Quest'ultima è una reazione di semplice appoggio distribuita su tale contorno (la cui rappresentazione in Figura 1.9 è del tutto qualitativa quanto all'effettivo andamento degli sforzi resistenti), equivalente ad una forza orizzontale diretta nel verso negativo dell'asse delle x come precedentemente definito, applicata in un punto intermedio fra i punti Q e T , rispettivamente di massima e di minima quota del contorno circolare. Essa è pertanto in grado di produrre unicamente un momento M_{VQ} avente verso di rotazione orario rispetto al punto Q ed uno M_{VT} di verso antiorario rispetto al punto T . Nel caso la valvola sia omogenea o, comunque, abbia una distribuzione di massa a simmetria sferica (p.es. una sfera cava avente spessore della parete sferica costante e densità del materiale costituente uniforme), anche il peso proprio della valvola è applicato nel centro della sfera, costituente il baricentro della valvola, e per tale punto passa perciò anche la risultante $\vec{R}$.

Pertanto, dovendosi la forza totale agente sulla valvola e le reazioni vincolari equilibrarsi (quanto a risultante e momento risultante), si ha che le situazioni di equilibrio possibili per la valvola sono quelle per le quali la retta d'azione della risultante $\vec{R} = \vec{S} + \vec{P}$ della spinta dei fluidi e del peso proprio interseca la sezione circolare dell'apertura³.

Le condizioni limite di equilibrio della valvola consistono nel passaggio della retta d'azione della risultante $\vec{R}$ per il punto Q o per il punto T , con rotazione incipiente della valvola rispetto allo stesso punto. Nella parte destra della Figura 1.9 sono riportate le due condizioni di equilibrio limite e due condizioni di disequilibrio a parità di spinta dei fluidi, ossia, per vari valori del peso proprio della valvola. In particolare, la rotazione della valvola rispetto al punto Q avverrà qualora essa abbia peso proprio inferiore alla componente verticale della spinta dei fluidi, ossia, al peso del volume sferico costituito dai fluidi che esercitano la pressione sulla superficie della valvola, di modulo $\gamma(W_1 + W_2)$, come determinati nell'analisi statica del sistema; avverrà attorno al punto T se invece il peso della valvola è maggiore di detto volume fluido. Il problema della determinazione dei valori critici corrispondenti del peso della valvola si risolve semplicemente imponendo che la retta d'azione della risultante $\vec{R}$ formi con l'orizzontale un angolo $\pm \alpha$:

³ Naturalmente, la conseguente condizione di sforzo sul bordo della circonferenza determinerà l'effettiva possibilità del vincolo di esercitare la reazione o, in alternativa, il collasso del vincolo.

$$\frac{|\vec{S}_v| - |\vec{P}|}{|\vec{S}_o|} = \frac{|\vec{S}| \sin \beta - |\vec{P}|}{|\vec{S}| \cos \beta} = \pm \tan \alpha$$

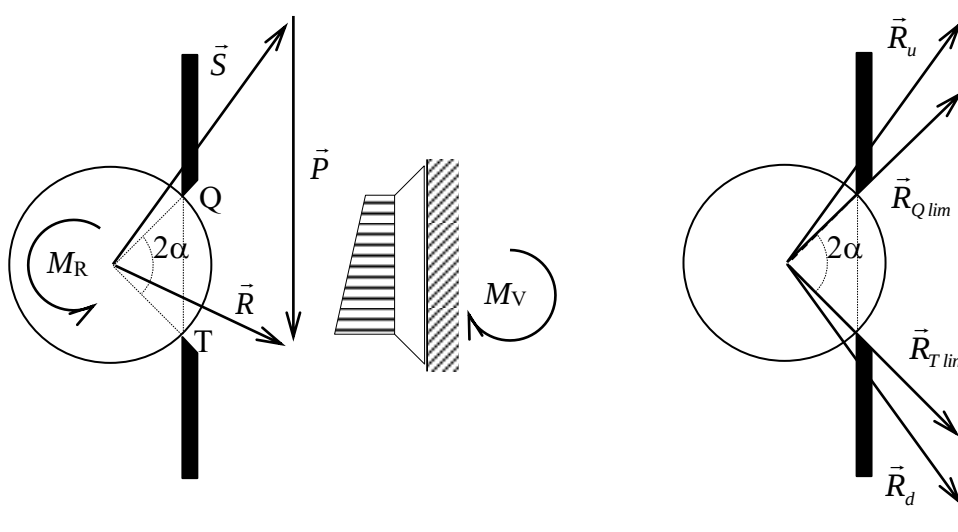


Figura 1.9

In modo del tutto analogo, per un fissato valore del peso proprio della valvola si può invece determinare un valore limite della misura del manometro differenziale al di sotto della quale l'equilibrio non è più possibile. Si utilizza ancora la relazione su riportata, in cui $|\vec{S}_o|$ dipende dalla misura Δ secondo quanto esposto in precedenza nella soluzione del primo problema. In tale caso, il segno da assumere a secondo membro è unico e dipende dal verso della componente verticale della risultante $\vec{R}$.

Esercizio 1.4

Determinare il modulo della forza assiale $\vec{F}$ che occorre applicare al pistone a testata sferica perché questo rimanga in equilibrio sotto la spinta del liquido all'interno del comparto B del serbatoio. Entrambi i pistoni sono supposti vincolati alle pareti del serbatoio mediante manicotti ideali privi di attrito, a tenuta stagna.

Dati:

- pesi specifici γ_1 e γ_2 dei liquidi contenuti nel serbatoio;
- misura del manometro semplice, Δ ;
- peso specifico γ_m del liquido manometrico;
- pesi propri dei pistoni;
- dati geometrici (dimensioni pistoni, posizione piano di separazione liquidi 1 e 2, angolo di inclinazione pistone comparto B, etc.)

La posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido 1 posto nel comparto A del serbatoio si determina imponendo l'equilibrio delle pressioni sul menisco interno del manometro semplice:

$$\gamma_m \Delta = \gamma_1 \xi_1$$

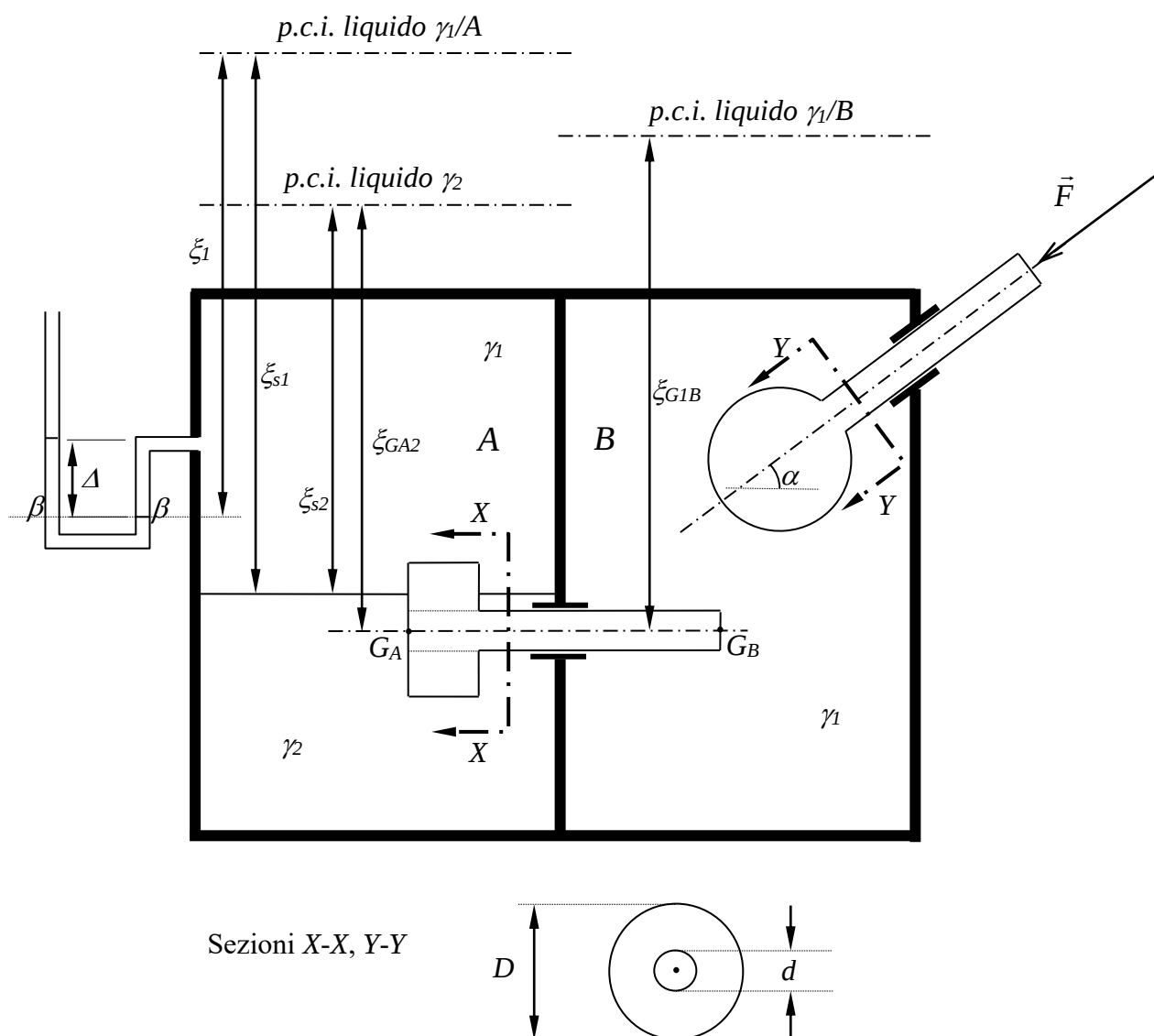


Figura 1.10

da cui si calcola l'affondamento del menisco interno dal piano dei carichi idrostatici del liquido 1 nel comparto A:

$$\xi_1 = \frac{\gamma_m}{\gamma_1} \Delta$$

In modo analogo, la posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido 2 si ottiene imponendo l'equilibrio delle pressioni sulla superficie piana di separazione fra il liquido 1 ed il liquido 2:

$$\gamma_2 \xi_{s2} = \gamma_1 \xi_{s1} \quad \Rightarrow \quad \xi_{s2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \xi_{s1}$$

La posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido 1 contenuto nel comparto B si determina imponendo l'equilibrio del pistone interposto fra i due comparti, sotto l'azione delle forze:

- peso proprio $\vec{P}$, noto;

- spinta dei liquidi 1 e 2 nel comparto A, determinabile dalla posizione, ora nota, dei piani dei carichi idrostatici dei liquidi 1 e 2 nel comparto A;
- spinta del liquido 1 nel comparto B, incognita;
- reazione vincolare del manicotto ideale (equivalente ad una forza trasversale $\vec{R}$, giacente nel piano del setto di separazione dei due comparti, più una coppia di momento $\vec{M}$), incognita.

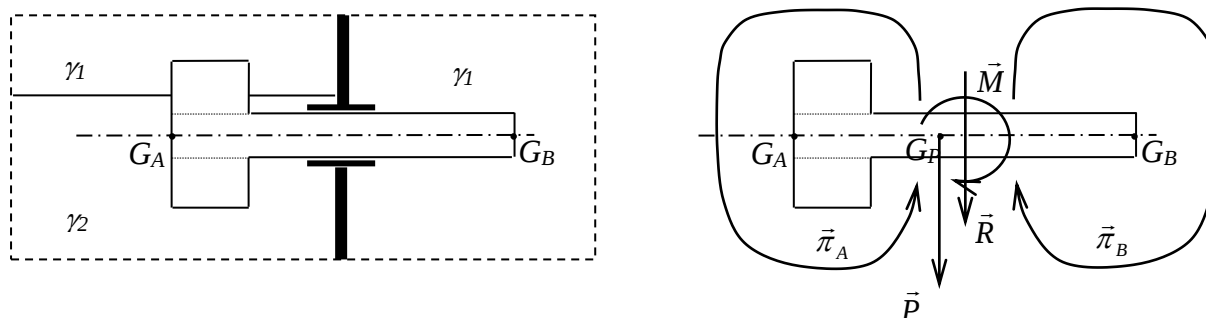


Figura 1.11

A tale scopo è sufficiente imporre l'equilibrio alla traslazione, espresso dalla prima equazione cardinale della statica, esprimente l'annullamento della risultante delle forze esterne applicate al pistone⁴:

$$\vec{P} + \vec{\pi}_A + \vec{\pi}_B + \vec{R} = 0 .$$

Proiettando l'equazione vettoriale lungo la direzione dell'asse del pistone (perpendicolare alla direzione della forza $\vec{R}$), vengono eliminati i contributi della reazione del vincolare e, nel caso specifico, del peso proprio del pistone, avendo quest'ultimo asse orizzontale. In funzione dei moduli delle componenti assiali delle spinte dei liquidi si scrive:

$$\pi_{Aa} - \pi_{Ba} = 0 .$$

Dall'analisi delle distribuzioni di pressione sulle parti della superficie laterale del pistone ricadenti nei due comparti, è facile convincersi che tali componenti assiali sono date dalle spinte sulle superfici piane circolari date: per il comparto A, dalla proiezione della sezione retta dello stelo del pistone sulla superficie della testata dello stesso (indicata in Figura 1.11 dalle linee di proiezione tratteggiate); per il comparto B, dalla stessa sezione retta dello stelo. È infatti evidente che nel comparto B tale parte della superficie di contorno del pistone è l'unica ad avere normale con componente non nulla lungo l'asse. Nel comparto A, oltre a parti di superficie di contorno aventi anch'esse normale ortogonale all'asse, i contributi delle due corone circolari identiche poste sulle due facce della testata sono uguali e contrari, essendo tali facce poste nella stessa posizione relativa ai piani dei carichi idrostatici dei due liquidi.

Avendo tali superfici uguale area, la condizione di equilibrio alla traslazione assiale del pistone si traduce nella uguaglianza delle pressioni agenti sui relativi baricentri, da cui infine si ricava la posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido del comparto B:

$$\gamma_2 \xi_{G2A} = \gamma_1 \xi_{G1B} \quad \Rightarrow \quad \xi_{G1B} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \xi_{G2A}$$

⁴ La risultante della coppia è nulla per definizione.

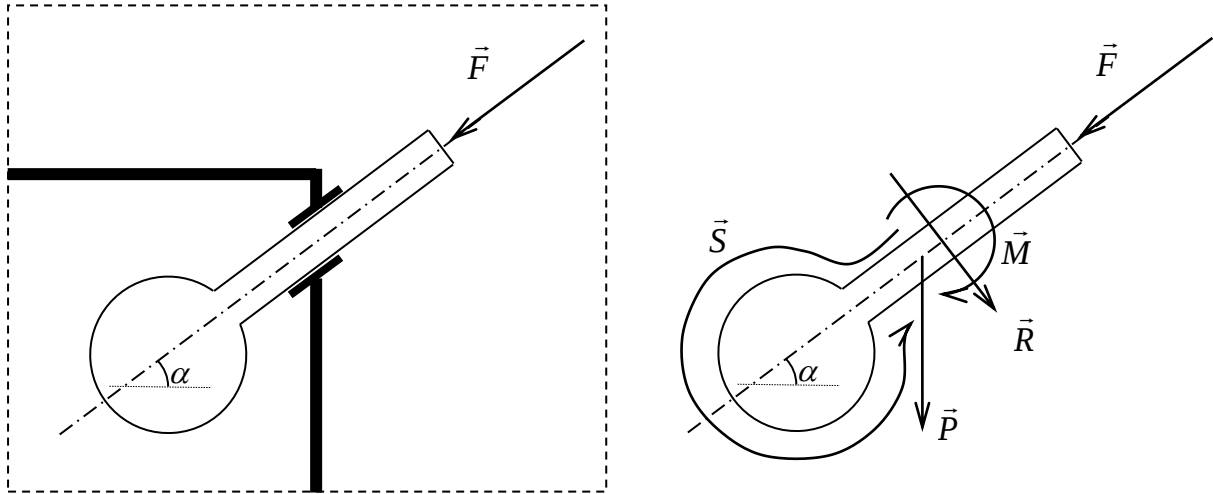


Figura 1.12

Il modulo della forza assiale $\vec{F}$ che tiene in equilibrio il pistone si può determinare, come nel caso precedente, imponendo l'equilibrio alla traslazione del pistone:

$$\vec{S} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = 0 ,$$

in cui $\vec{S}$ è la spinta che il liquido 1 esercita sul pistone, risultante della distribuzione di pressioni agenti sulla parte della superficie laterale del pistone interna al serbatoio. Proiettando l'equazione cardinale della statica lungo l'asse, assumendo come verso positivo delle proiezioni il verso opposto a quello ipotizzato per la forza $\vec{F}$ e assumendo che la componente assiale della spinta $\vec{S}$ abbia verso positivo, si scrive:

$$S_a - P \sin \alpha - F = 0 ,$$

dove, ancora, le reazioni vincolari sono state eliminate dall'operazione di proiezione.

La spinta $\vec{S}$ può determinarsi mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica ad un volume liquido fittizio, uguale geometricamente al volume della parte del pistone interna al serbatoio, costituito dal liquido 1 (o da altro liquido di uguale peso specifico, γ_1), posto nella stessa posizione relativa rispetto al piano dei carichi idrostatici. Tale volume fittizio è quello indicato in Figura 1.13 con V_{abcde} . Per come è stato scelto, evidentemente il volume fittizio subisce dal liquido all'interno del serbatoio una spinta uguale ad $\vec{S}$.

Essendo in realtà interessati alla proiezione di tale spinta lungo l'asse, S_a , osservando che sulla superficie laterale dello stelo del pistone le pressioni sono ovunque normali all'asse, si può anche considerare, in luogo della spinta complessiva – risultante della distribuzione di pressioni agente sulla intera superficie di contorno del pistone interna al serbatoio – la componente assiale della spinta agente sul volume V_{bcd} , che, per quanto detto, è identica alla S_a .

L'equazione globale dell'idrostatica applicata al volume liquido V_{bcd} si scrive:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_1 = 0 ,$$

dove $\vec{G}$ è il peso del volume liquido, $\vec{\pi}_0$ è la spinta agente sulla superficie sferica della testata del

pistone, la cui componente assiale è uguale alla S_a e $\vec{\pi}_1$ è la forza di superficie agente sulla parte residua della superficie di contorno del volume, costituita dalla sezione retta, circolare, dello stelo del pistone.

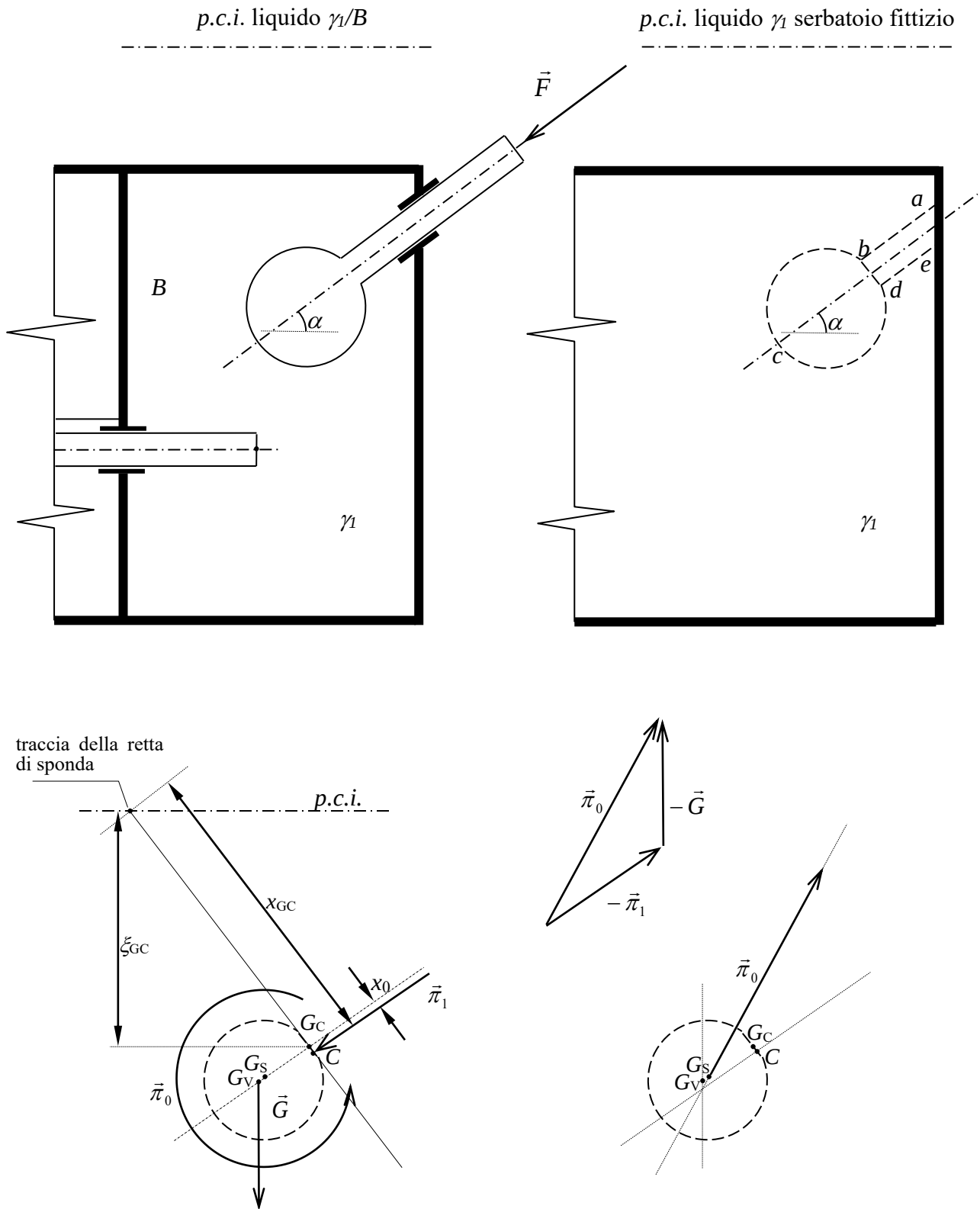


Figura 1.13

Il modulo della forza $\vec{G}$ è dato dal prodotto del volume per la densità del liquido: $|\vec{G}| = \gamma V_{bcd}$. La forza è applicata nel baricentro del volume liquido G_V , il quale giace sull'asse del pistone, spostato da parte opposta dello stelo del pistone rispetto al centro della sfera G_S .

Il modulo della $\vec{\pi}_1$ è dato dal prodotto della pressione nel baricentro della superficie piana circolare, G_C , per l'area della sezione:

$$|\vec{\pi}_1| = p_{G_C} \Omega_C = \gamma_1 \xi_{GC} \frac{\pi d^2}{4},$$

in cui ξ_{GC} è l'affondamento del baricentro della sezione circolare rispetto al piano dei carichi idrostatici e d è il diametro della sezione circolare. Il vettore $\vec{\pi}_1$ è applicato nel centro di spinta della sezione circolare C , posto sulla retta di massima pendenza del piano della sezione, passante per il centro del cerchio, da parte opposta della retta di sponda rispetto al centro della circonferenza, ad una distanza da quest'ultimo pari a:

$$x_0 = \frac{I_0}{M_s} = \frac{I_0}{x_{G_C} \Omega_C} = \frac{I_0}{x_{G_C} \frac{\pi d^2}{4}},$$

dove I_0 è il momento di inerzia della sezione circolare calcolato rispetto all'asse baricentrico orizzontale giacente sul piano della sezione e M_s il momento statico della sezione rispetto alla retta di sponda⁵.

La spinta incognita è data da:

$$\vec{\pi}_0 = -\vec{G} - \vec{\pi}_1,$$

rappresentata graficamente nella Figura 1.13. Essendo la risultante di una distribuzione di pressioni dirette verso il centro della sfera (normalmente alla sua superficie), la spinta $\vec{\pi}_0$ è essa stessa applicata nel centro della sfera. Dovendosi tale punto di applicazione potersi ottenere anche traslando le forze $-\vec{G}$ e $-\vec{\pi}_1$ lungo le rispettive rette d'azione e componendole nel punto di intersezione di tali rette, deve aversi che la retta d'azione della spinta $\vec{\pi}_0$, passante per il centro della sfera, deve passare anche in tale punto di intersezione, come mostrato nella Figura 1.13.

La componente assiale della spinta trovata è data da:

$$\pi_{0a} = S_a = |\vec{\pi}_1| + |\vec{G}| \sin \alpha,$$

per cui la condizione di equilibrio alla traslazione assiale del pistone si riscrive:

$$|\vec{\pi}_1| + |\vec{G}| \sin \alpha - P \sin \alpha - F = 0,$$

dalla quale si ricava, infine, il valore del modulo della forza $\vec{F}$ richiesto:

$$F = |\vec{F}| = |\vec{\pi}_1| + |\vec{G}| \sin \alpha - P \sin \alpha = \gamma_1 \xi_{GC} \frac{\pi d^2}{4} + \gamma_1 V_{bcd} \sin \alpha - P \sin \alpha$$

⁵ calcolato, per il teorema di Varignon, come prodotto dell'area della sezione per la distanza del baricentro della sezione dalla retta di sponda.

1) Assegnate tutte le dimensioni geometriche, i pesi specifici γ e γ_m , la forza verticale F agente sul pistone (comprendente anche il peso proprio del pistone), l'indicazione Δ del manometro differenziale, determinare la spinta che trattiene nella propria sede la valvola conica

2) Assegnati la misura del manometro metallico n in kp/cm^2 , i pesi specifici γ e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la misura del manometro semplice a liquido, Δ .

3) Assegnati la misura Δ del manometro differenziale, i pesi specifici γ_1 , γ_2 , γ_3 e γ_m (con $\gamma_m \gg \gamma_1$ e $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$) e tutti i dati geometrici, determinare la spinta che trattiene nella propria sede la valvola conica.

4) Assegnati la misura Δ del manometro semplice a liquido, il peso proprio del pistone P , i pesi specifici γ e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la spinta sul fondello sferico.

5) Assegnati i pesi specifici γ_1 , γ_2 e γ_m , le profondità h_1 ed h_2 e tutti i dati geometrici, determinare la misura del manometro differenziale e la spinta sulla paratoia a settore.

6) Assegnati la misura del manometro metallico p_M in bar, i pesi specifici γ_1 , γ_2 e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la spinta che si scarica sui bulloni che fissano il manometro semplice a liquido al serbatoio.

7) Assegnate le quote h ed h_1 , i pesi specifici γ e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare l'indicazione del manometro differenziale nei casi (a) e (b).

8) Assegnati il peso specifico γ , la posizione del piano di separazione fra il liquido e l'aria soprastante e tutti gli altri dati geometrici, determinare il peso proprio del secchio capovolto, in equilibrio nelle condizioni indicate in figura

9) Assegnati il peso specifico γ , le dimensioni del pistone e della campana, la posizione del piano di separazione fra il liquido e l'aria soprastante e tutti gli altri dati geometrici, determinare la forza da applicare al pistone e la forza da applicare alla campana per mantenere il sistema in equilibrio.

10) Assegnati il peso specifico γ ed i dati geometrici, determinare la spinta sul fondo conico del recipiente cilindrico indicato in figura.

11) Assegnati la misura Δ del manometro semplice a liquido, il peso proprio P del coperchio semisferico, la posizione del piano di separazione fra l'aria ed il liquido sottostante, i pesi specifici γ_1 , γ_2 e γ_m e tutti i dati geometrici, determinare la forza F necessaria a sollevare il coperchio.

12) Assegnati le altezze h_1 ed h_2 , il peso specifico γ e tutti gli altri dati geometrici, determinare la spinta sul recipiente tronco-conico con setto indicato in figura e l'indicazione del manometro differenziale, il cui liquido manometrico possieda peso specifico γ .

CAPITOLO 2
CORRENTI IN PRESSIONE

Esercizio 2.1

Determinare la portata fluente dal serbatoio A in condizioni di moto permanente. Calcolare la spinta che si scarica sulla flangia di collegamento del convergente alla condotta.

Dati:

- dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livello del liquido nel serbatoio, quota dell'asse della condotta, coefficiente di contrazione);
- peso specifico del liquido convogliato, γ .

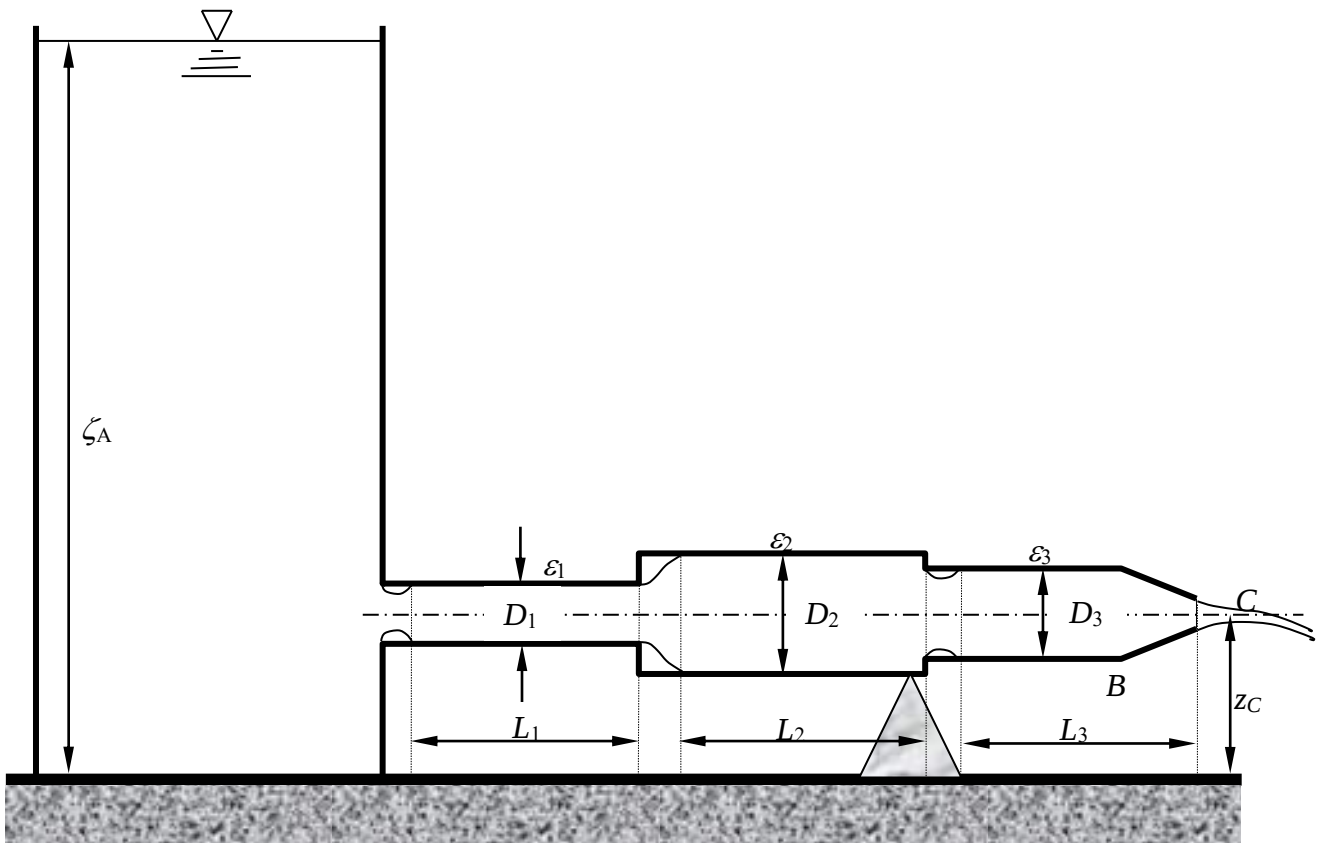


Figura 2.1

In generale una corrente può essere suddivisa in tratti nei quali essa può considerarsi *gradualmente variata*, in cui le traiettorie hanno curvatura trascurabile e lo stato di tensione in una sezione normale al moto è dato in buona approssimazione da una pressione variabile con legge idrostatica, e da tratti in cui ciò non si verifica neanche approssimativamente, avendo le traiettorie curvatura apprezzabile.

In una corrente gradualmente variata la distribuzione di pressione in una sezione normale (che in tal caso si dice *regolare*, essendo essa piana e le velocità normali in ogni punto) obbedisce pertanto alla relazione:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

che esprime la costanza della quota piezometrica in tutti i punti della sezione.

Essendo unico il valore di tale grandezza per tutti i punti di una stessa sezione – individuata da un valore dell'ascissa curvilinea definita sulla linea luogo dei baricentri delle sezioni (asse della corrente) – l'andamento del carico piezometrico lungo l'asse della corrente può essere rappresentato da una unica linea detta *linea piezometrica*. In una data sezione, il calcolo delle pressioni agenti nei vari punti viene pertanto eseguito con riferimento al piano orizzontale posto ad una quota pari alla quota piezometrica locale, sul quale dette pressioni sono nulle. Tale piano è evidentemente l'analogo del piano dei carichi idrostatici introdotto in idrostatica – al quale, tuttavia, tale denominazione è riservata.

Essendo l'andamento dei carichi piezometrici delle correnti gradualmente variate (in *tutti* i suoi punti) rappresentabili per mezzo di un'unica linea, tali correnti vengono anche denominate *lineari*.

Il carico (energia per unità di peso) totale in un punto della sezione di una corrente gradualmente variata è dato dalla somma del carico piezometrico – uguale per tutti i punti della sezione, come detto – e dell'altezza cinetica locale, variabile da punto a punto. Il carico totale medio nella sezione è dato da:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} ,$$

in cui $U = Q / \Omega$ è la velocità media della corrente nella sezione, Q è la portata e Ω l'area della sezione, e α è il *coefficiente di ragguaglio dell'altezza cinetica*, dato da:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega} ,$$

che nel caso di moto turbolento è molto prossimo all'unità.

Il carico totale medio in una sezione è pertanto rappresentabile da una seconda curva caratteristica, detta *linea dei carichi totali*, avente quota superiore alla quota piezometrica della altezza cinetica calcolata con la velocità media della corrente, eventualmente corretta con il coefficiente di ragguaglio.

Il moto di una corrente gradualmente variata è descritto dalla equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{\tau_0}{\gamma R_i} ,$$

in cui τ_0 è lo sforzo resistente alla parete e R_i è il raggio idraulico, definito come rapporto fra l'area della sezione ed il perimetro bagnato. La cadente dei carichi totali rappresenta pertanto la perdita di energia specifica (per unità di peso) della corrente per effetto delle resistenze al moto, per unità di lunghezza lungo l'asse. Le corrispondenti perdite di carico si dicono perciò *distribuite*.

Nel caso di moto permanente, o stazionario, l'equazione si scrive:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -J ,$$

in cui J è detta *cadente dei carichi totali*, che, integrata fra due sezioni a e b , fornisce:

$$H_b - H_a = - \int_a^b J(s) ds .$$

Inoltre, l'equazione di continuità, la cui espressione generale per un fluido comprimibile è:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0 ,$$

trascurando la comprimibilità del liquido, si riduce per il moto stazionario alla:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 ,$$

per cui la portata si mantiene costante sezione per sezione:

$$Q = U\Omega = \text{cost} .$$

Tale conclusione è di carattere generale per un fluido incompressibile in moto stazionario. Nel caso specifico, supponendo la condotta realizzata di materiale praticamente indeformabile (acciaio, ghisa, PVC, polietilene ad alta densità, etc..) essa è valida anche per il moto vario⁶ di un fluido incompressibile, essendo comunque in tal caso nulla la derivata temporale locale dell'area della sezione per l'indeformabilità del materiale.

Nei tratti nei quali la corrente non può considerarsi gradualmente variata non è definibile una equazione della corrente di tipo differenziale. Il moto, eventualmente comprendente fenomeni di distacco con relative elevate dissipazioni di energia, deve in tal caso essere studiato mediante l'equazione globale del bilancio della quantità di moto. Tipicamente, per tratti di questo tipo, generalmente di sviluppo limitato, interposti fra due tratti sedi di correnti gradualmente variate, ciò che interessa in pratica è determinare la variazione del carico totale fra le due sezioni regolari che li comprendono, del tipo:

$$\Delta H = H_m - H_v = \eta \frac{U_v^2}{2g} .$$

Si badi che, per quanto detto, in tratti del dominio liquido di questo tipo non ha senso, a rigore, il tracciamento delle linee piezometrica e dei carichi totali. Tuttavia, ciò si suole fare, convenzionalmente, nella rappresentazione grafica, avendo però chiara in mente la differenza sostanziale con le correnti gradualmente variate, per le quali, sole, le due curve sono definibili rigorosamente.

Per il fatto che tali tratti sono generalmente di sviluppo limitato, le relative perdite di carico vengono dette *localizzate*. Nelle rappresentazioni del profilo longitudinale di una condotta a scale distorte, tali zone possono essere anche rappresentate, in pratica, come una discontinuità delle linee piezometrica e dei carichi totali.

Come di frequente accade nelle applicazioni tecniche, nella corrente che ha sede nella condotta riportata in Figura 2.1, nei tratti nei quali la corrente è gradualmente variata si ha, più specificamente, il moto uniforme, nel quale le traiettorie sono rettilinee e parallele, mentre tutti i tratti rimanenti sono interessati da distacchi di vena con intense dissipazioni localizzate di energia.

Diamo di seguito un sommario delle formule utilizzate per il calcolo delle perdite di carico distribuite e localizzate.

- Perdite di carico distribuite

- Formula di Darcy-Weisbach:

⁶ Purché non rapidamente variato; a esclusione, cioè, dei cosiddetti fenomeni di *colpo d'ariete*, determinati da brusche manovre di regolazione delle condotte e caratterizzati dalla propagazione di onde elastiche all'interno del liquido.

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD} ,$$

in cui λ è il numero indice di resistenza (detto anche coefficiente di resistenza, coefficiente di perdita distribuita o fattore d'attrito – *friction factor* nei testi in lingua inglese, indicato sovente con il simbolo f), dato da:

➤ $\lambda = \frac{64}{Re}$ regime laminare ($Re < \sim 2000$)

➤ $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} Re} + \frac{1}{3,71} \frac{\varepsilon}{D} \right)$ regime turbolento ($Re > \sim 2000$), Colebrook-White,

in cui $Re = UD/\nu$ è il numero di Reynolds, ε è la scabrezza equivalente della parete interna del tubo e ν la viscosità cinematica del liquido.

La natura implicita della equazione nell'incognita λ richiede un procedimento iterativo per la sua soluzione. Essendo l'equazione del tipo $x = f(x)$, dove $x = (1/\lambda)^{1/2}$, le iterazioni possono eseguirsi (anche se in modo non molto efficiente) calcolando successivamente:

$$x_k = f(x_{k-1}) = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re} x_{k-1} + \frac{1}{3,71} \frac{\varepsilon}{D} \right) ,$$

assumendo come valore iniziale $x_0 = 0$, ossia, le condizioni di moto turbolento pienamente sviluppato ($Re = \infty$), finché due valori successivi differiscono di una prefissata tolleranza.

La determinazione di λ può anche eseguirsi con il solutore automatico di un foglio elettronico, o, per via grafica, mediante l'abaco di Moody, riportato in Figura 2.2.

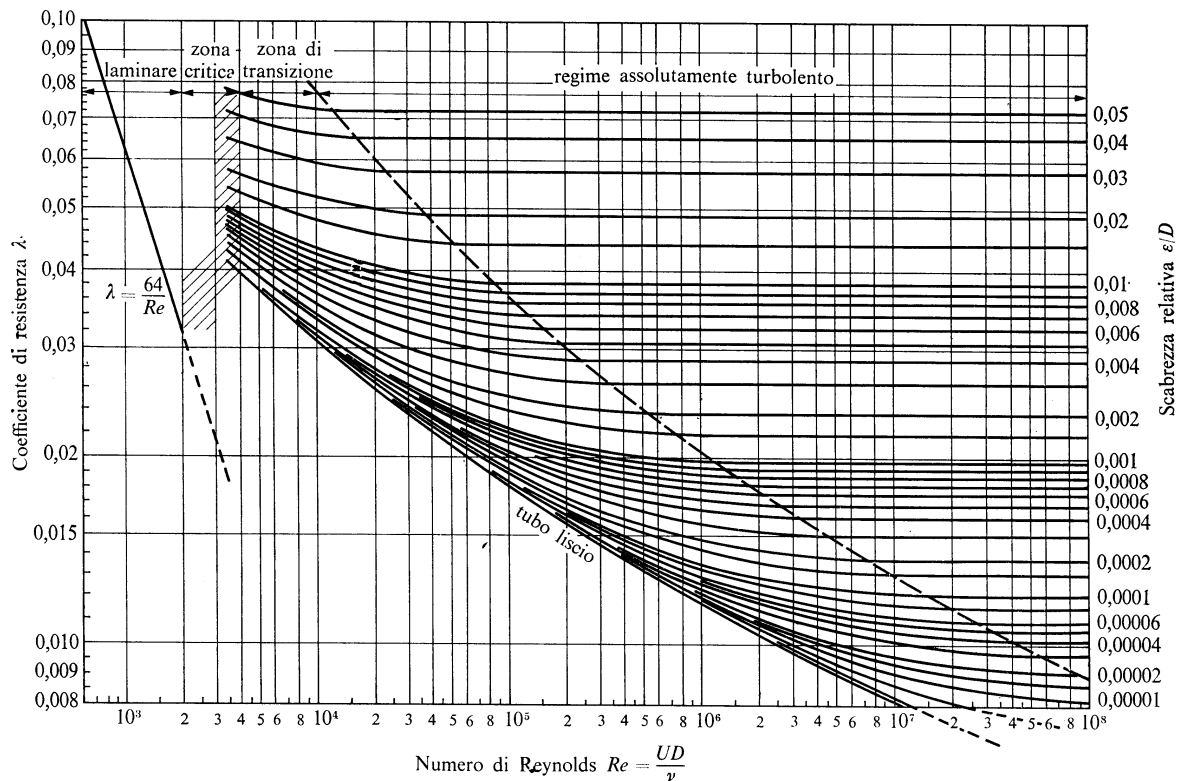


Figura 2.2. Abaco di Moody.

- Formula di Chezy:

$$J = \frac{U^2}{\chi^2 R_i},$$

in cui χ (usualmente indicato anche con il simbolo C) è il coefficiente di Chezy, calcolabile mediante varie formule:

- $\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_i}}}$ Bazin;
- $\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_i}}}$ Kutter;
- $\chi = k_s R_i^{1/6}$ Gauckler-Strickler;
- $\chi = \frac{1}{n} R_i^{1/6}$ Manning.

La formula di Chezy, particolarizzata con una delle formule elencate per il coefficiente χ , è applicabile *unicamente nei casi di moto turbolento pienamente sviluppato*, poiché non vi compare il numero di Reynolds. Confrontando le formule di Darcy-Weisbach e di Chezy è tuttavia possibile stabilire un legame fra numero indice di resistenza e coefficiente di Chezy:

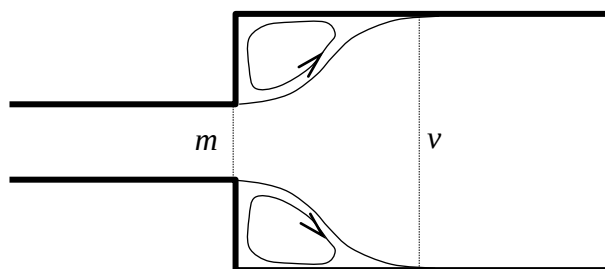
$$\chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}.$$

ε (m), γ (m^{1/2}), m (m^{1/2}), n (m^{-1/3}s) sono *coefficienti di scabrezza* crescenti all'aumentare della scabrezza, o rugosità, della parete interna del tubo. $k_s = 1/n$ (m^{1/3}s⁻¹) è invece decrescente all'aumentare della scabrezza della parete. I valori dei coefficienti di scabrezza si trovano tabellati nei manuali in funzione delle caratteristiche della parete del tubo.

Esistono poi numerose formule di origine empirica, di carattere meno generale delle due su esposte, stabilite sperimentalmente, e perciò valide, soltanto nell'intervallo dei parametri per i quali sono state determinate. Si tratta prevalentemente di formule ormai di raro utilizzo.

- Perdite di carico localizzate

- Perdita di Borda o per brusco allargamento



$$\Delta H = \frac{(U_m - U_v)^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_v}{\Omega_m} - 1 \right)^2 \frac{U_v^2}{2g}$$

Figura 2.3

– Perdita di imbocco

All'imbocco di una condotta si verifica una perdita localizzata composta di una parte dovuta alla viscosità e, se si verifica un distacco della vena liquida, di una parte relativa al brusco allargamento che la vena subisce fra la sezione ove si ha la massima contrazione (sezione contratta) e la sezione in cui la vena occupa nuovamente l'intera condotta. L'entità della contrazione dipende dalla variazione della direzione delle traiettorie delle particelle prossime alla parete.

Tipicamente si considerano tre casi notevoli:

- Imbocco a spigolo vivo (non raccordato), deviazione di 90°

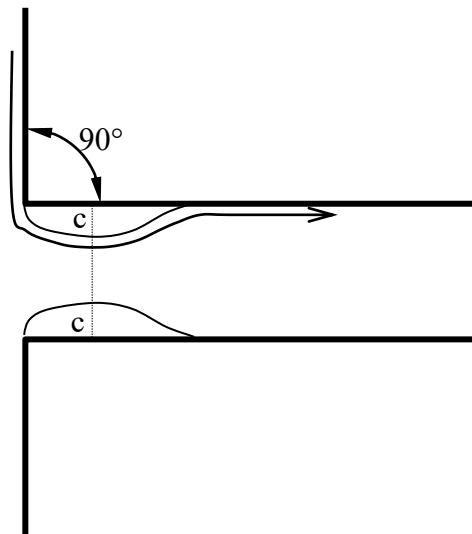


Figura 2.4

Le perdite dovute alla viscosità possono essere valutate come perdita di energia cinetica, calcolabile sulla base della corrispondente correzione del valore della velocità torricelliana nella sezione contratta, effettuata mediante il coefficiente di velocità $C_v \cong 0.98$:

$$\Delta H_1 = (1 - C_v^2) \frac{U_c^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(Q / \Omega_c)^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(\Omega U / \Omega_c)^2}{2g} = \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g}$$

avendo indicato con $C_c = \Omega_c / \Omega$ il coefficiente di contrazione che, per deviazione di 90° delle traiettorie, vale $C_c \cong 0.61$. Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\Delta H_1 = \frac{1 - (0.98)^2}{(0.61)^2} \frac{U^2}{2g} = 0.106 \frac{U^2}{2g} \cong 0.1 \frac{U^2}{2g} .$$

La perdita dovuta al brusco allargamento è data da:

$$\Delta H_2 = \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{0.61} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 0.409 \frac{U^2}{2g} \cong 0.4 \frac{U^2}{2g}$$

Complessivamente si ha pertanto una perdita di imbocco pari a:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 0,5 \frac{U^2}{2g}$$

- Imbocco con tubo addizionale interno, deviazione di 180° ,

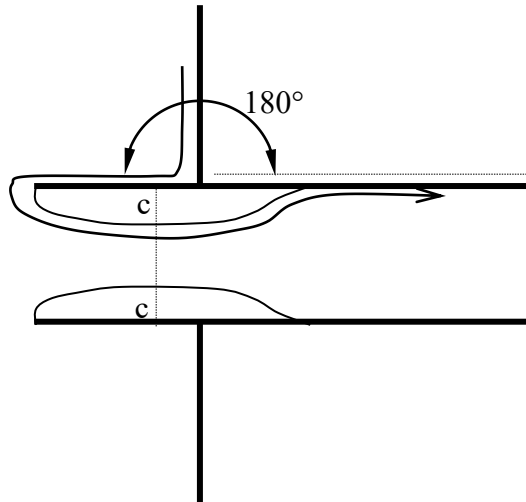


Figura 2.5

Il coefficiente di contrazione vale, in questo caso, $C_c = 0,5$. Sostituendo tale valore nelle espressioni precedentemente ottenute per le perdite viscose e per brusco allargamento, si ottiene:

$$\Delta H_1 = \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g} = \frac{1 - (0,98)^2}{(0,5)^2} \frac{U^2}{2g} = 0,158 \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H_2 = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{1}{0,5} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 1,00 \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 1,16 \frac{U^2}{2g}$$

- Imbocco ben raccordato

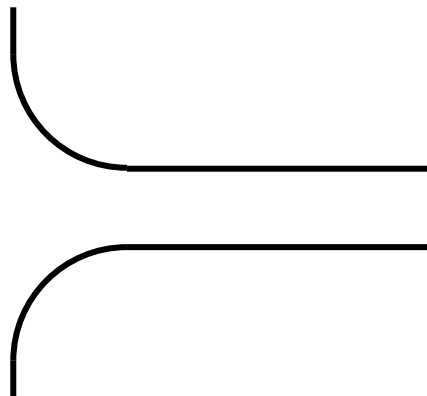


Figura 2.6

$$\Delta H = 0,05 \div 0,10 \frac{U^2}{2g}$$

- Perdita per brusco restringimento

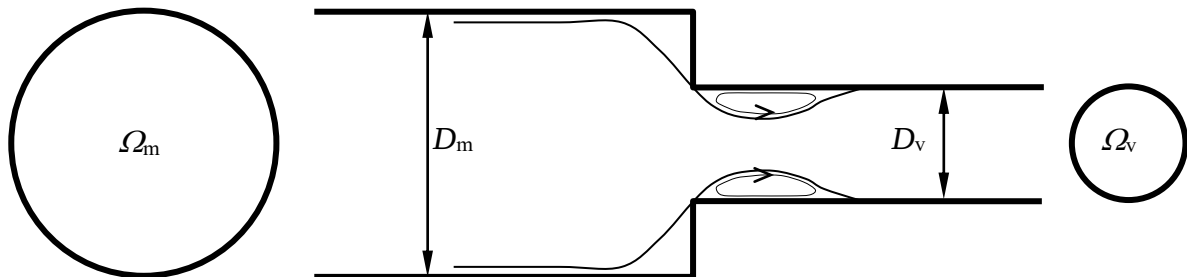


Figura 2.7

In corrispondenza di un brusco restringimento di sezione, a valle del cambio di diametro si verifica un distacco di vena, con una contrazione di entità dipendente dal rapporto dei due diametri. Conseguentemente si produce una perdita localizzata dovuta prevalentemente al successivo brusco allargamento che la vena subisce a valle della sezione contratta.

La perdita di carico è espressa come frazione dell'altezza cinetica della corrente a valle:

$$\Delta H = \eta_r \frac{U_v^2}{2g},$$

dipendente dal rapporto dei diametri come riportato nella tabella seguente (v. Manuale di Ingegneria Civile Cremonese, edizione 1981, Parte Prima, pag. 208):

Tabella 2.1.

Ω_v/Ω_m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
C_c	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,813	1,0
η_r	0,47	0,44	0,40	0,35	0,28	0,21	0,10	0

Come si può vedere dalla Tabella 2.1, per $\Omega_v/\Omega_m \ll 1$ si ricade nel caso limite della perdita di imbocco.

- Perdite in tronchi divergenti

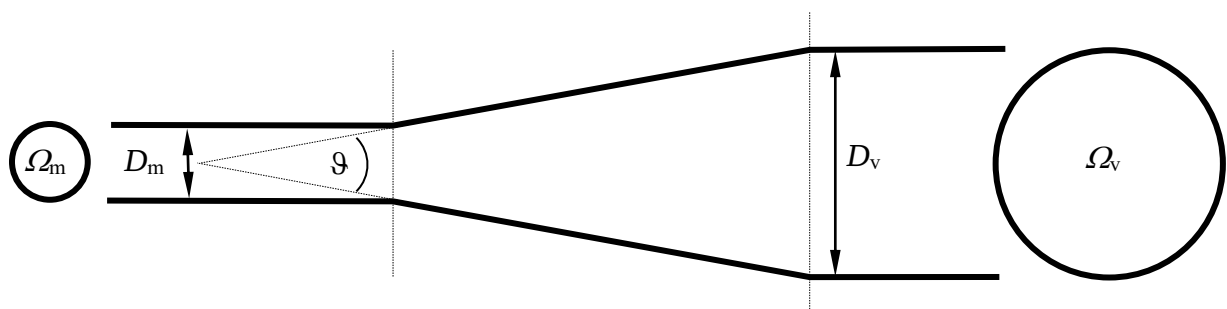


Figura 2.8

Le perdite in tronchi divergenti vengono espresse in forma simile alle perdite di brusco allargamento (Gibson):

$$\Delta H = K_g \frac{(U_m - U_v)^2}{2g} = K_g \left(\frac{\Omega_v}{\Omega_m} - 1 \right)^2 \frac{U_v^2}{2g},$$

in cui il coefficiente K_g dipende dal valore dell'angolo di apertura del divergente, g , e dal rapporto delle aree delle sezioni, come illustrato nella tabella seguente (Marchi e Rubatta – Meccanica dei Fluidi, p. 452).

Tabella 2.2

g	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	120°	180°	Ω_m/Ω_v
K_g	0,20	0,40	0,70	0,95	1,10	1,20	1,20	1,16	1,12	1,05	1,00	1/2
			0,65	0,80	0,95	1,00	1,05	1,05	1,05	1,05	1,00	1/10

Come si può vedere dalla Tabella 2.2, per fissati valori delle aree delle sezioni il coefficiente K_g ha un massimo di valore maggiore dell'unità. Il motivo di ciò risiede nel fatto che le formule di Gibson esprimono le perdite di carico che si misurano *complessivamente* nel divergente, e contengono perciò, oltre alle perdite dovute alla turbolenza associata al distacco della vena liquida, le perdite continue dovute alla resistenza della parete del tubo. Queste ultime, evidentemente, per fissati valori delle aree delle sezioni, diminuiscono all'aumentare dell'angolo di apertura, diminuendo in tal modo lo sviluppo dell'elemento. Viceversa, al tendere a zero dell'angolo di apertura, le perdite complessive aumentano indefinitamente per il fatto che, pur tendendo a zero le perdite per distacco di vena, lo sviluppo dell'elemento cresce indefinitamente. Il valore minimo del coefficiente K_g si ha per $g = 6^\circ \div 7^\circ$ e vale 0,13.

– Perdite nelle curve

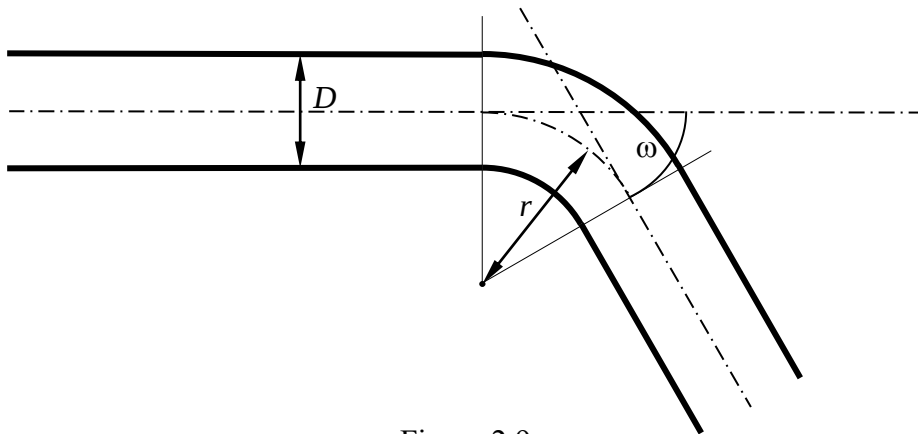


Figura 2.9

Le perdite localizzate nelle curve sono proporzionali all'altezza cinetica della corrente, secondo un coefficiente di proporzionalità dipendente dall'angolo di deviazione, ω , e dal rapporto fra il raggio di curvatura dell'asse della condotta ed il diametro del tubo:

$$\Delta H = \eta_c \frac{U^2}{2g}, \quad \eta_c = \eta_c(\omega, r/D).$$

Determinazione della portata

- $H_A - H_{1'} = 0,5 \frac{U_1^2}{2g}$ perdita di imbocco;
- $H_{1'} - H_{1''} = \int_{1'}^{1''} J(s) ds = \int_{1'}^{1''} \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} ds = \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1$ perdita distribuita tratto 1;
- $H_{1''} - H_{2'} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g}$ perdita per brusco allargamento;
- $H_{2'} - H_{2''} = \int_{2'}^{2''} J(s) ds = \int_{2'}^{2''} \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} ds = \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2$ perdita distribuita tratto 2;

- $H_{2''} - H_{3'} = \eta_r (\Omega_2 / \Omega_3) \frac{U_3^2}{2g}$ perdita per brusco restringimento;
- $H_{3'} - H_{3''} = \int_{3'}^{3''} J(s) ds = \int_{3'}^{3''} \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} ds = \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3$ perdita distribuita tratto 3;
- $H_c - H_{3''} \cong 0$ percorso in aria a valle convergente,

in cui per le perdite distribuite è stata utilizzata la formula di Darcy-Weisbach, dove, in termini generali, $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$. Inoltre, la costanza dei diametri dei vari tratti della condotta fa sì che, essendo le velocità medie pure costanti, la cadente abbia valori costanti all'interno di ciascun tratto. Ovviamente, alla stessa conclusione si perverrebbe se venisse utilizzata per il calcolo delle perdite distribuite la formula di Chezy.

Sommando membro a membro le espressioni delle perdite di carico nei vari tratti, si ottiene la forma finita dell'equazione di conservazione della quantità di moto per la corrente (detta anche espressione del teorema di Bernoulli generalizzato ai fluidi viscosi):

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3, \quad (2.1)$$

in cui:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \zeta_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong z_c + \frac{U_c^2}{2g},$$

avendo considerato punti del serbatoio A abbastanza lontani dall'imbocco della condotta per poterne trascurare l'altezza cinetica. Detti punti si trovano pertanto all'interno di un campo di pressioni idrostatico, in cui la quota piezometrica si mantiene costante e pari alla quota della superficie libera del liquido contenuto nel serbatoio.

Nella sezione contratta a valle del convergente si hanno ovunque condizioni di pressione nulla. Si badi che tale sezione *non* è una sezione regolare. Si può infatti mostrare facilmente che una distribuzione di pressione uniforme su una sezione verticale, quale è la sezione c, deriva dall'avere tutte le traiettorie passanti per tale sezione curvatura non trascurabile, causata dalla accelerazione di gravità cui le particelle sono sottoposte, muovendosi, da tale sezione in poi, come un grave in aria.

Sostituendo nella equazione (2.1) le espressioni dei carichi totali agli estremi della corrente, si ha:

$$\zeta_A - z_c = \frac{U_c^2}{2g} + 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3. \quad (2.2)$$

Utilizzando l'equazione di continuità nella forma $U\Omega = Q = \text{cost}$, l'equazione (2.2) può scriversi:

$$\zeta_A - z_c = \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} + 0,5 \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 Q^2 L_1}{2gD_1 \Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{Q^2}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 Q^2 L_2}{2gD_2 \Omega_2^2} + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 Q^2 L_3}{2gD_3 \Omega_3^2},$$

riconducibile, mettendo in evidenza i quadrati delle portate che compaiono nei termini di perdita di carico e nell'altezza cinetica nella sezione contratta, a una forma del tipo:

$$\zeta_A - z_c = KQ^2,$$

in cui:

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1 \Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2 \Omega_2^2} + \frac{\eta_r}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3 \Omega_3^2} \quad (2.3)$$

Nel caso il regime di moto sia del tipo turbolento pienamente sviluppato, il coefficiente K è pienamente determinato, essendo in tal caso $\lambda = \lambda(\varepsilon/D)$, potendosi trascurare il termine $2,51/(\lambda Re)$ nella formula di Colebrook-White. In tal caso si ricava il valore della portata dalla:

$$Q = \sqrt{\frac{\zeta_A - z_c}{K}}. \quad (2.4)$$

Per verificare l'accettabilità dell'approssimazione occorrerà, in pratica, controllare i valori del numero di Reynolds, Re , che si ottengono, per i vari tratti, in corrispondenza del valore di portata determinato. Il controllo può essere effettuato graficamente sull'abaco di Moody, oppure, analiticamente, facendo riferimento alla curva separatrice delle zone del diagramma relative a moto turbolento di transizione e moto turbolento pienamente sviluppato, la cui espressione è:

$$Re^* = \frac{u^* \varepsilon}{\nu} = 70,$$

in cui u^* è la velocità d'attrito, definita come $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. Ricordando che $\tau_0 = \gamma R_i J$ e utilizzando la formula di Darcy-Weisbach, con semplici passaggi si ottiene l'espressione di Re^* in funzione delle grandezze utilizzate nei calcoli pratici, data da:

$$Re^* = \frac{U \varepsilon \sqrt{\lambda/2}}{2\nu}.$$

Qualora la verifica indicasse valori di Re^* propri del regime di transizione, il calcolo mediante la equazione (2.4) andrà reiterato, utilizzando in ciascuna iterazione, per il calcolo del coefficiente K , i valori degli indici di resistenza e dei numeri di Reynolds determinati nella iterazione precedente. Come già accennato, per il calcolo di primo tentativo si potrà convenientemente adottare l'ipotesi di moto turbolento pienamente sviluppato.

L'applicazione della formula di Chezy in luogo delle formule di Darcy-Weisbach – Colebrook, essendo di validità limitata al moto turbolento pienamente sviluppato, non comporta iterazioni. Naturalmente, in linea di principio occorre sempre verificare le condizioni di turbolenza pienamente sviluppata controllando Re^* o mediante l'abaco di Moody. Nel caso in cui il moto non risultasse turbolento pienamente sviluppato, la formula di Chezy sarà insufficiente e risulterà necessario effettuare il calcolo iterativo con le formule di Darcy-Weisbach – Colebrook.

Calcolo della spinta sul convergente

Il calcolo della spinta che il liquido esercita sul convergente si effettua mediante applicazione dell'equazione globale di bilancio della quantità di moto al volume di controllo V_c compreso fra la sezione maggiore del convergente (sezione B) e la sezione contratta, ove, come già detto la pressione è ovunque nulla.

Adottando come verso positivo della normale alle superfici di contorno del volume di controllo quello della normale esterna, l'equazione globale si scrive:

$$\vec{G} + \vec{I\vec{T}} = \vec{I} + \vec{M} ,$$

dove:

$$\vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f} dV_c = \int_{V_c} \rho \vec{g} dV_c = - \int_{V_c} \rho g \nabla z dV_c$$

è la risultante delle forze di massa, date in questo caso dalla forza peso;

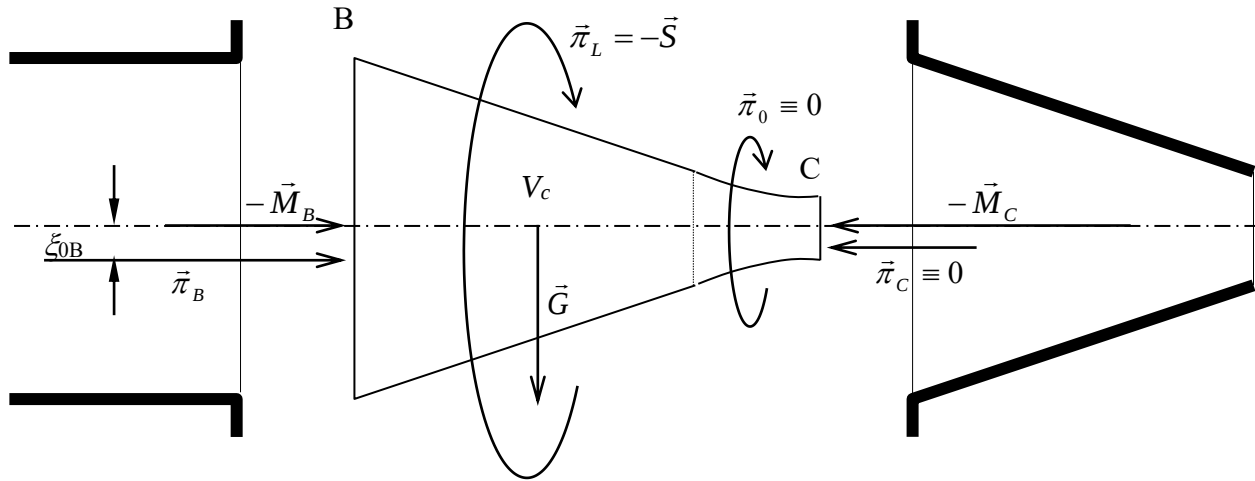


Figura 2.11

$$\vec{I\vec{T}} = \int_{S_c} \vec{t}_n dS = \int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau_R}}) \vec{n} dS = \int_{S_c} \left\{ -p \underline{\underline{I}} + 2\mu [\underline{\underline{e}} - 1/3 (\nabla \cdot \vec{u}) \underline{\underline{I}}] + \underline{\underline{\tau_R}} \right\} \vec{n} dS$$

è la risultante delle forze agenti sulla superficie di contorno del volume di controllo, comprendenti gli effetti dello stato tensionale complessivo, dovuto al tensore degli sforzi viscosi per un fluido comprimibile, $\underline{\underline{\tau}}$, ed al tensore degli sforzi turbolenti, dato da $(\tau_R)_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$;

$$\vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV$$

è il termine di inerzia locale, e

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

è il flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo. Quest'ultima può essere suddivisa nelle seguenti quattro superfici:

- la sezione regolare corrispondente alla sezione di area massima del convergente, sezione B;
- la sezione contratta, sezione C;
- la superficie laterale del tronco di cono a contatto con le pareti del convergente;
- la parte di superficie laterale del volume di controllo compresa fra l'ugello del convergente e la sezione contratta, esposta alla pressione atmosferica.

Con riferimento alla Figura 2.11, indichiamo le forze di superficie agenti sulle quattro parti della superficie di contorno rispettivamente con $\vec{\pi}_B$, $\vec{\pi}_C$, $\vec{\pi}_L$ e $\vec{\pi}_0$.

Per quanto riguarda lo stato di sforzo, si ha, in pratica, per una corrente quale quella in considerazione, unidimensionale e di liquido incompressibile, che gli sforzi turbolenti e gli sforzi viscosi risultano generalmente trascurabili rispetto ai termini del tensore sferico delle pressioni, il quale solo può pertanto essere assunto, in buona approssimazione, per descrivere lo stato di tensione nel liquido. Essendo la sezione contratta e la superficie laterale a contatto con l'aria esposte alla pressione atmosferica, ossia, alla pressione relativa nulla, si ha conseguentemente:

$$\vec{\pi}_C = \vec{\pi}_0 = 0 .$$

La $\vec{\pi}_B$, agendo su una sezione regolare, è la risultante di forze di pressione distribuite idrostaticamente, e la sua determinazione segue perciò le regole per la valutazione delle spinte idrostatiche su superfici piane. Essa è parallela all'asse della condotta e rivolta (v. Figura 2.11) da sinistra verso destra essendo la piezometrica in tale sezione soprastante il baricentro della sezione. Il suo modulo è dato da (v. Figura 2.10):

$$|\vec{\pi}_B| = p_{G_B} \Omega_3 = \gamma \xi_{G_B} \Omega_3$$

ed è applicata lungo l'asse verticale della sezione, ad una distanza ξ_{B0} dal centro della sezione stessa.

Infine, $\vec{\pi}_L$, essendo la forza che, materialmente, la parete interna del convergente esercita sul volume di controllo, rappresenta, per il principio di azione e reazione, l'uguale e contraria della spinta $\vec{S}$ cercata, che il liquido contenuto nel volume di controllo esercita sul convergente.

Per quanto riguarda i flussi di quantità di moto, le superfici laterali a contatto con la parete del convergente ed esposta all'aria costituiscono dei tubi di flusso e per essi è pertanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 ,$$

col che risultano nulli i relativi flussi di quantità di moto.

Nelle sezioni B e C le velocità risultano di verso rispettivamente opposto e concorde con la normale esterna e normali alle sezioni stesse, per cui i relativi flussi di quantità di moto sono dati rispettivamente da:

$$\vec{M}_B = - \int_{S_B} \rho |\vec{u}| \vec{u} dS$$

e

$$\vec{M}_C = \int_{S_C} \rho |\vec{u}| \vec{u} dS .$$

Introducendo il coefficiente di ragguaglio delle quantità di moto per una sezione Ω :

$$\beta = \frac{\int u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} ,$$

i moduli possono esprimersi come:

$$|\vec{M}_B| = \beta \rho U_B^2 \Omega_3$$

e

$$|\vec{M}_C| = \beta \rho U_C^2 \Omega_C ,$$

nelle quali il coefficiente di ragguglio può porsi uguale ad 1 se il moto è turbolento.

Considerando che in condizioni di moto permanente si annulla il termine di inerzia locale, l'equazione vettoriale del bilancio della quantità di moto può risciversi:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_B - \vec{S} = \vec{M}_B + \vec{M}_C ,$$

da cui si ottiene l'espressione della spinta cercata:

$$\vec{S} = \vec{G} + \vec{\pi}_B - \vec{M}_B - \vec{M}_C , \quad (2.5)$$

della quale è riportata la composizione grafica:

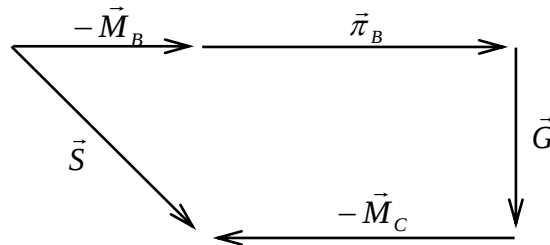


Figura 2.12

Per definire compiutamente il sistema di forze la cui risultante è data da $\vec{S}$, occorre determinare il punto di applicazione di quest'ultima – ovvero, per maggiore precisione, la posizione della retta d'azione – di modo che il momento della spinta $\vec{S}$ rispetto ad un qualunque punto dello spazio sia uguale al momento risultante delle distribuzioni di forze reali rispetto allo stesso punto.

- Metodo grafico.

Il metodo grafico per la determinazione del punto di applicazione di una forza si basa sulle condizioni di equivalenza dei sistemi di forze, che riassumiamo brevemente:

- due sistemi di forze si dicono equivalenti se possiedono uguali risultante e momento risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio;
- due sistemi equivalenti hanno momenti risultanti uguali rispetto a qualunque punto dello spazio (cambiando il punto cambiano i valori del momento risultante per i due sistemi, che si mantengono però sempre uguali fra loro);

- se ad un sistema di forze applicate ad un corpo rigido si sostituisce un sistema equivalente, non si altera lo stato di quiete o di moto del corpo;
- ogni sistema di forze nello spazio equivale sempre a una forza e una coppia;
- un sistema di forze giacenti su un piano con vettore risultante non nullo è equivalente ad una sola forza (applicata in un punto opportuno); se il vettore risultante è nullo, il sistema equivale ad una coppia.

Da tali proposizioni consegue che: dato un sistema di forze, facendo scorrere una delle forze del sistema lungo la propria retta d'azione si ottiene sempre un sistema equivalente. Infatti, in tal modo rimangono invariati il vettore risultante ed il momento risultante del sistema. Un sistema equivalente si ottiene poi anche eseguendo la somma di due forze del sistema applicate nel medesimo punto, dal momento che, anche in questo caso, non variano né il vettore risultante né, per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma di vettori, il momento risultante.

Nel caso del convergente, in cui tutte le forze appartengono ad uno stesso piano (il piano verticale contenente l'asse della condotta) si potrà procedere, per esempio, nel seguente modo per ridurre il sistema di forze ad una unica forza (risultante) applicata in un punto opportuno (v. Figura 2.13):

1. si fanno scorrere le forze $-\vec{M}_B$ e $-\vec{M}_C$, giacenti sull'asse della condotta, fino al baricentro del volume di controllo;
2. si sommano le due forze;
3. il vettore risultante dalla somma di $-\vec{M}_B$ e $-\vec{M}_C$ viene sommato alla forza peso $\vec{G}$, applicata nello stesso punto;
4. il vettore risultante dalla somma di cui al punto 3 e la forza $\vec{\pi}_B$ vengono fatte scorrere lungo le rispettive rette d'azione fino al punto di intersezione delle stesse;
5. le due forze vengono sommate.

In un caso tridimensionale generale, il sistema di forze equivarrà ad una coppia di momento pari al momento risultante del sistema di forze rispetto ad un qualunque punto dello spazio e da un vettore uguale al vettore risultante del sistema, applicato nel punto utilizzato per il calcolo del momento risultante.

In questo modo è stata determinata sia la risultante (in modulo, direzione e verso) che il suo punto di applicazione (per meglio dire: uno dei possibili punti di applicazione lungo la propria retta d'azione). Da un punto di vista pratico, tuttavia, avendo costruito il poligono delle forze di Figura 2.12, la sola determinazione della retta d'azione della risultante può effettuarsi imponendo che il momento della risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio sia uguale al momento dei vettori componenti rispetto allo stesso punto.

Per l'arbitrarietà della scelta del punto rispetto al quale calcolare i momenti, lo si potrà scegliere nel modo più conveniente. In pratica, nel caso sotto esame, sarà conveniente scegliere come polo per il calcolo dei momenti il baricentro del volume di controllo. Rispetto a tale punto risultano infatti nulli i momenti dei due flussi di quantità di moto e della forza peso. Il momento risultante del sistema di forze ha pertanto modulo pari a:

$$M_r = |\vec{\pi}_B| \xi_{0B}$$

e verso di rotazione antiorario. La retta d'azione della risultante $\vec{S}$, di direzione individuata dalla costruzione del poligono delle forze, dovrà pertanto trovarsi ad una distanza δ dal baricentro del volume di controllo, tale che risulti:

$$|\vec{\pi}_B| \xi_{0B} = \delta |\vec{S}| \quad (2.6)$$

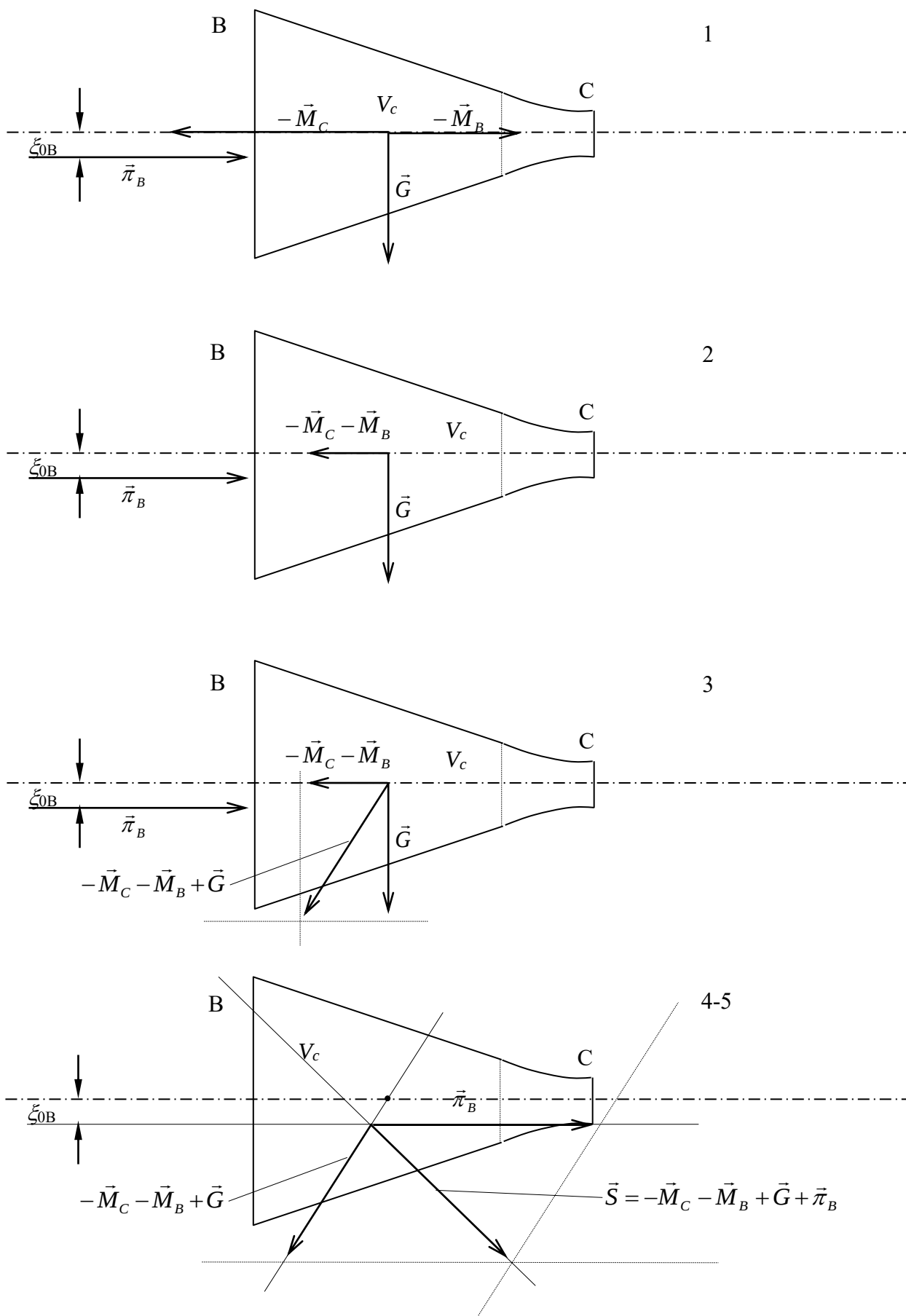


Figura 2.13.

e il verso di rotazione antiorario, come mostrato in Figura 2.14. Dalla equazione (2.5) si ricava il valore del braccio δ .

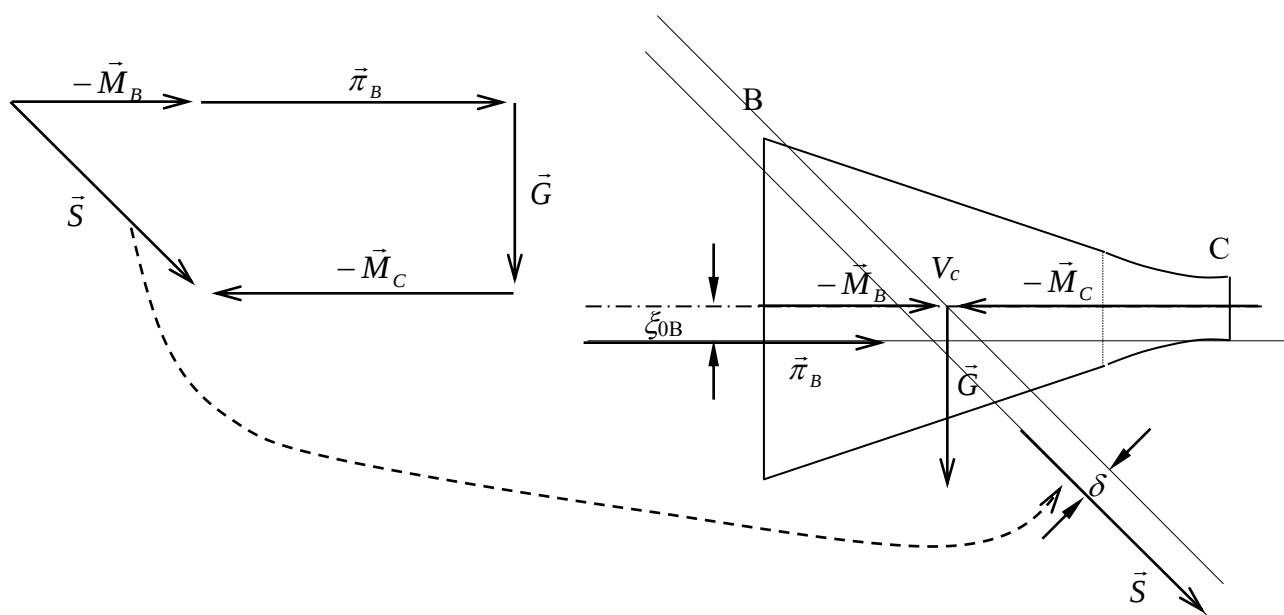


Figura 2.14

- Metodo analitico.

Utilizzando strumenti di calcolo automatico (codici di calcolo, fogli elettronici, etc..) può tornare comodo disporre di un metodo che non richieda operazioni manuali.

A parte la possibilità di implementare i procedimenti grafici illustrati mediante le equazioni della Geometria Analitica, un modo più semplice per determinare uno dei possibili punti di applicazione della risultante di un sistema di forze piano evitando qualunque operazione grafica consiste nell'imporre separatamente le uguaglianze dei momenti dei singoli componenti nelle due direzioni degli assi coordinati (nel caso in questione: orizzontale e verticale), del sistema di forze e della risultante rispetto ad un qualunque punto.

Chiamati $\vec{S}_o$ e $\vec{S}_v$ i componenti, rispettivamente, orizzontale e verticale della risultante, determinati dal poligono delle forze, scegliendo ancora il baricentro, di coordinate x_G e y_G , come polo per il calcolo dei momenti si impone:

$$|\vec{S}_o|(y_G - y_P) = |\vec{\pi}_B|\xi_{0B}$$

e

$$|\vec{S}_v|(x_G - x_P) = 0$$

da cui si determinano le coordinate x_P, y_P di un punto di applicazione (v. Figura 2.15):

$$\begin{cases} x_P = x_G \\ y_P = y_G - \frac{|\vec{\pi}_B|\xi_{0B}}{|\vec{S}_o|} \end{cases}$$

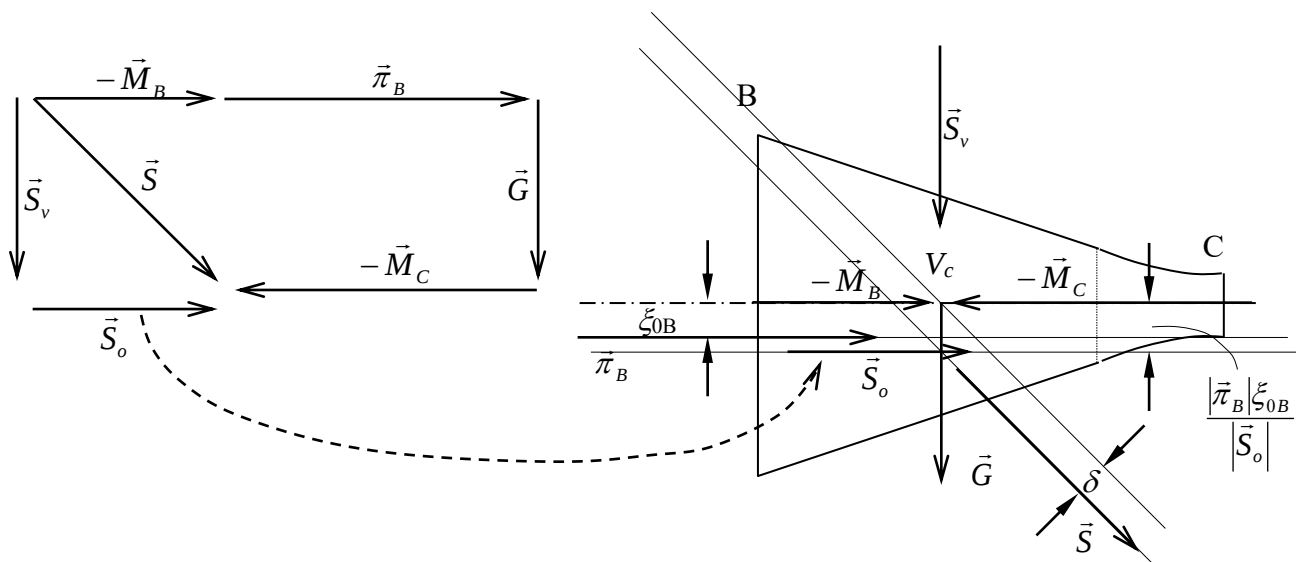


Figura 2.15

Ovviamente, il punto di applicazione così determinato dovrà appartenere alla retta d'azione della risultante determinata precedentemente con il metodo grafico.

Esercizio 2.2

Determinare la portata fluente dal serbatoio A nel serbatoio B in condizioni di moto permanente (Figura 2.16). Calcolare la spinta che si scarica sulla flangia di collegamento del convergente alla condotta.

Dati:

- dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livelli del liquido nei serbatoi);
- peso specifico del liquido convogliato, γ .

Determinazione della portata

La determinazione della portata si esegue in modo del tutto analogo al caso dell'Esercizio 2.1⁷, salvo che, nell'equazione:

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3, \quad (2.7)$$

identica a quella determinata in precedenza, si ha ora:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \zeta_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong \zeta_B + \frac{U_c^2}{2g},$$

⁷ Si trascura la piccola perdita di carico distribuita che interviene fra lo sbocco del convergente e la sezione contratta.

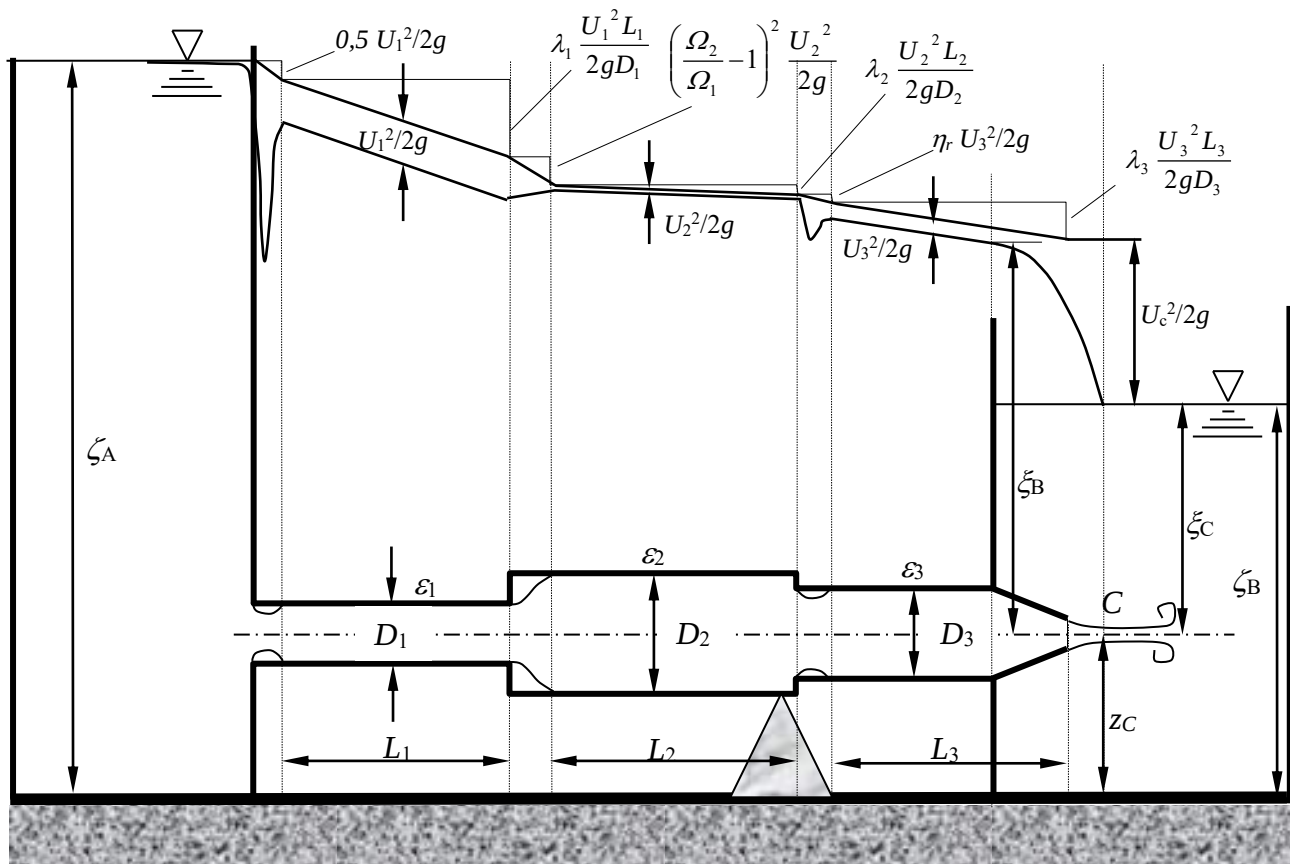


Figura 2.16

essendo, questa volta, la corrente allo sbocco nel serbatoio gradualmente variata, e perciò dotata dello stesso carico piezometrico del liquido circostante in quiete, pari al livello del serbatoio di valle⁸. Eseguito l'operazione di sostituzione delle velocità in funzione della portata e delle aree delle sezioni, si perviene ad una equazione nella forma:

$$\zeta_A - \zeta_B = KQ^2,$$

in cui il coefficiente K è dato ancora dalla espressione (2.3):

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\eta_r}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2}.$$

Calcolo della spinta sul convergente

In questo caso il convergente è sottoposto all'azione di una spinta interna, di tipo dinamico, e di una spinta esterna, esercitata dal liquido circostante in quiete, valutabile pertanto con i metodi utilizzati in idrostatica.

Adottando anche in questo caso un volume di controllo compreso fra la sezione B e la sezione contratta, l'equazione globale si scrive ancora:

⁸ Se come sezione terminale della corrente se ne fosse presa una a valle della sezione contratta, in cui la velocità della corrente fosse stata integralmente dissipata, il termine esprimente l'altezza cinetica della sezione contratta avrebbe figurato come ultima della serie di perdite di carico a secondo membro nella equazione (2.1), assumendo il nome di *perdita di sbocco*.

$$\vec{G} + \vec{I\vec{T}} = \vec{I} + \vec{M} .$$

Considerando la stessa suddivisione della superficie di contorno del volume effettuata nel caso dello sbocco in aria (Esercizio 2.1), in cui ora le spinte sulla sezione B e sulla sezione laterale a contatto con il divergente sono contraddistinte dal pedice i, si ha ora che le spinte $\vec{\pi}_0$ e $\vec{\pi}_c$ sono non nulle. Conformemente all'ipotesi utilizzata per il calcolo della quota piezometrica nella sezione contratta, si suppone che esse siano spinte di tipo idrostatico.

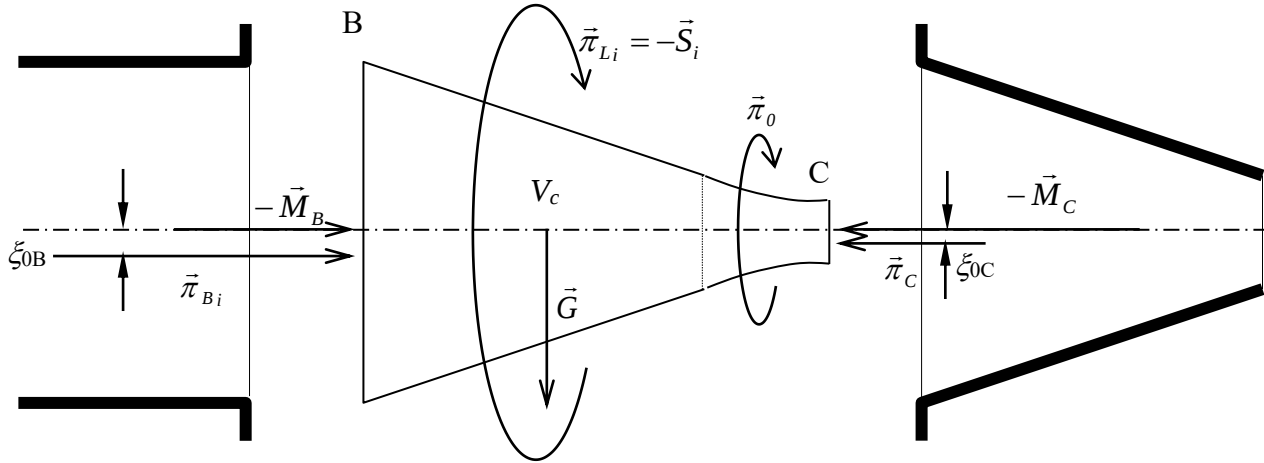


Figura 2.17

Riconoscendo, come nel caso precedente, che la spinta interna $\vec{S}_i$ incognita è l'uguale e contraria della spinta $\vec{\pi}_{L_i}$, l'espressione della spinta interna è data ora da :

$$\vec{S}_i = \vec{G} + \vec{\pi}_{B_i} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c - \vec{M}_B - \vec{M}_C ,$$

in cui:

$$|\vec{\pi}_{b_i}| = \gamma \xi_B \Omega_3$$

e

$$|\vec{\pi}_c| = \gamma \xi_C \Omega_c .$$

Per il calcolo della spinta esercitata sulla superficie esterna del convergente si considera lo stesso volume di controllo⁹, in equilibrio in un campo di pressioni idrostatico (quale è ragionevole supporre, come già detto, il campo di pressioni nel serbatoio B agente sul convergente reale).

L'equazione globale dell'idrostatica, data da:

$$\vec{G} + \vec{I\vec{T}} = 0 ,$$

⁹ Trascurando lo spessore del convergente. A rigore il volume di controllo considerato per il calcolo della spinta interna è delimitato dalla parete interna del convergente; quello considerato per il calcolo della spinta esterna è delimitato dalla superficie esterna.

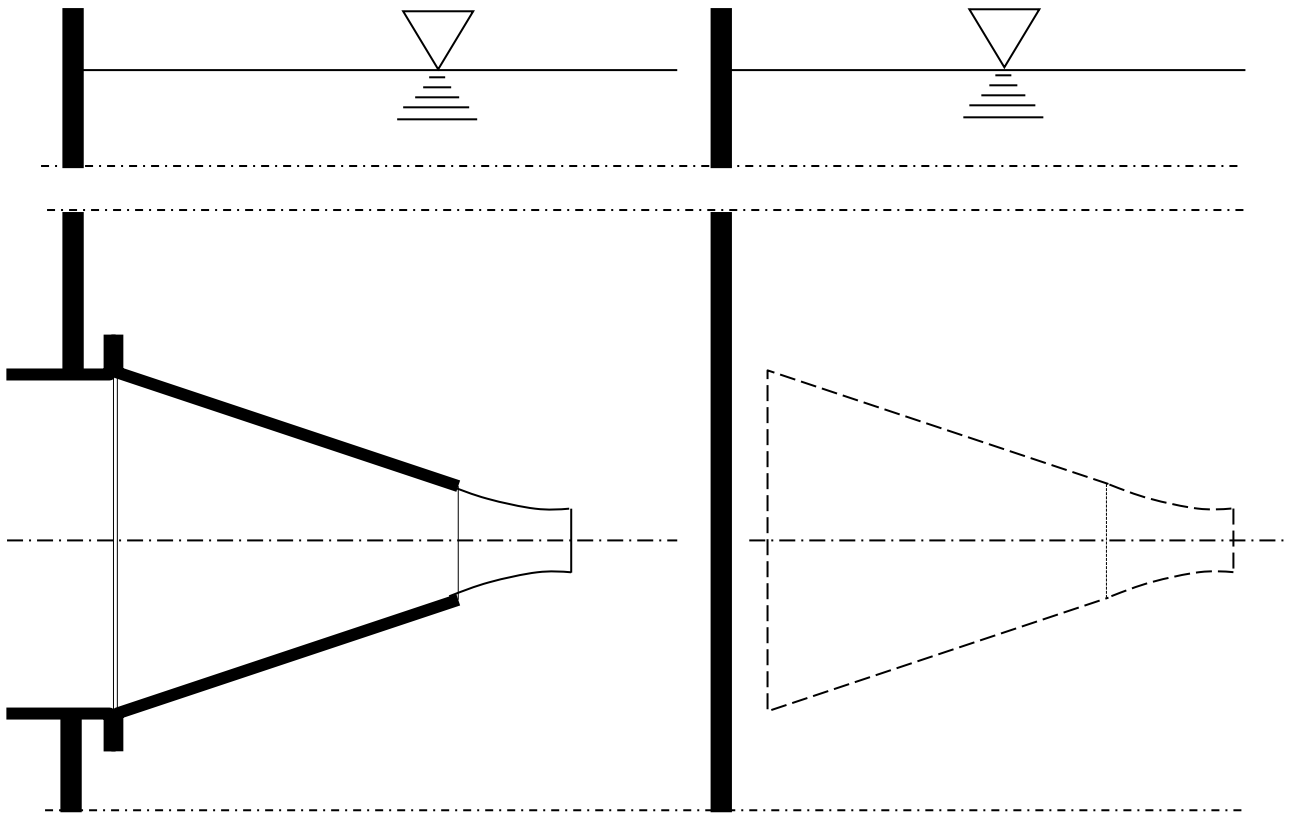


Figura 2.18

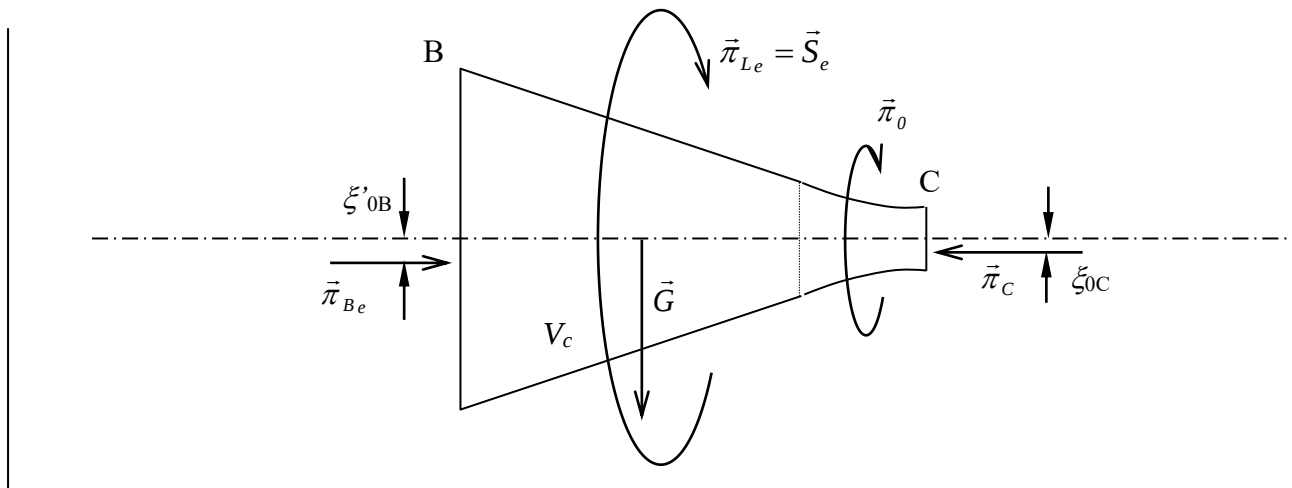


Figura 2.19

si scrive, evidenziando la decomposizione delle forze di superficie:

$$\vec{G} + \vec{\pi}_{Be} + \vec{\pi}_{Le} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c = 0 .$$

La spinta esterna cercata è uguale alla spinta esercitata sulla parte di superficie laterale del volume di controllo coincidente, nella realtà, con la superficie esterna del convergente:

$$\vec{S}_e = \vec{\pi}_{L_c} .$$

La spinta esterna è data perciò da:

$$\vec{S}_e = -\vec{G} - \vec{\pi}_{B_e} - \vec{\pi}_0 - \vec{\pi}_c ,$$

e la spinta totale, somma delle spinte interna ed esterna, da:

$$\vec{S}_{tot} = \vec{S}_e + \vec{S}_i = (\vec{G} + \vec{\pi}_{B_i} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c - \vec{M}_B - \vec{M}_C) - (\vec{G} + \vec{\pi}_{B_{ie}} + \vec{\pi}_0 + \vec{\pi}_c) = \vec{\pi}_{B_i} - \vec{M}_B - \vec{M}_C - \vec{\pi}_{B_{ie}} ,$$

in cui (vedi Figura 2.16):

$$|\vec{\pi}_{B_i}| = \gamma \xi_B \Omega_3$$

$$|\vec{\pi}_{B_e}| = \gamma \xi_C \Omega_3 .$$

La spinta totale agente sul convergente è pertanto una forza orizzontale, riportata nella composizione vettoriale di Figura 2.20, avente per retta d'azione l'asse della condotta.

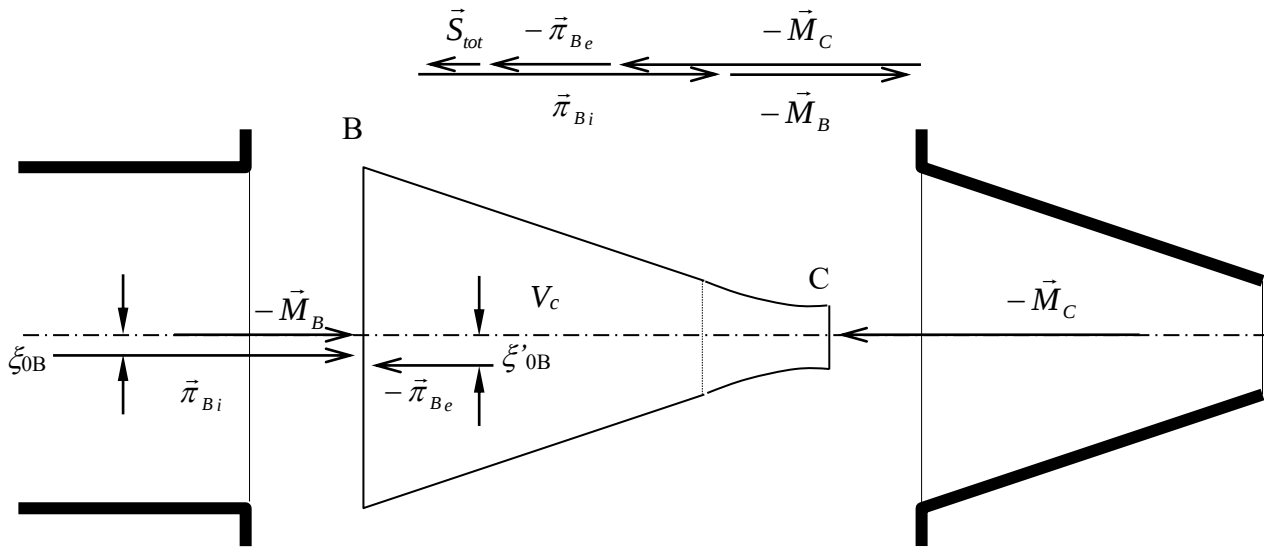


Figura 2.20

Infatti, calcolando il momento risultante del sistema di forze rispetto ad un punto dell'asse, si ha:

$$M_a = \vec{\pi}_{B_i} \xi_{oB} - \vec{\pi}_{B_{ie}} \xi'_{oB} = \gamma \xi_B \Omega_3 \xi_{oB} - \gamma \xi_C \Omega_3 \xi'_{oB} = \gamma \Omega_3 \left(\xi_B \frac{I_o}{M_{s_B}} - \xi_C \frac{I_o}{M_{s_{B'}}} \right) =$$

$$\gamma \Omega_3 \left(\xi_B \frac{I_o}{\Omega_3 \xi_B} - \xi_C \frac{I_o}{\Omega_3 \xi_C} \right) = 0$$

per cui anche la risultante $\vec{S}_{tot}$ deve avere per retta d'azione l'asse della condotta.

Esercizio 2.3

Determinare la portata che in regime permanente fluisce fra i due serbatoi di Figura 2.21. Calcolare la potenza installata a servizio della pompa e la massima portata che può fluire nella condotta.

Dati:

- dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livelli del liquido nei serbatoi);
- peso specifico del liquido convogliato, γ ;
- curva caratteristica della pompa;
- curva del rendimento della pompa, η , a numero di giri fissato.

Essendo il livello energetico totale nel serbatoio B maggiore che nel serbatoio A, perché si possa stabilire il flusso stazionario diretto dal serbatoio A al serbatoio B occorre fornire energia alla corrente per mezzo di una pompa (macchina operatrice).

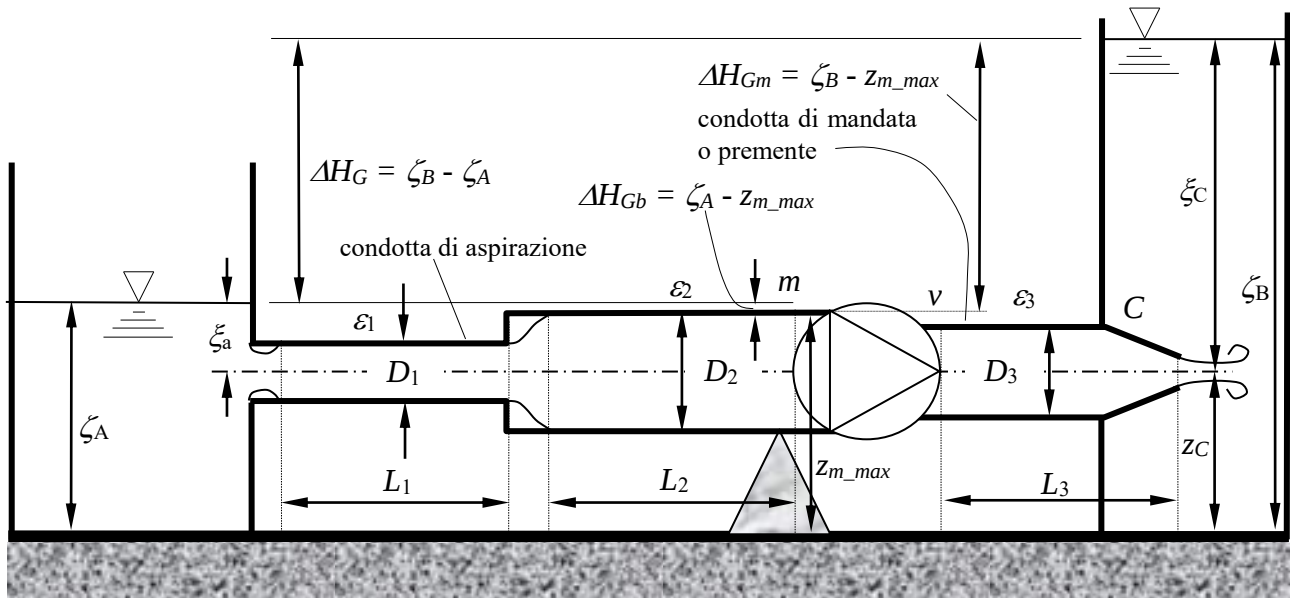


Figura 2.21. Schema della condotta di pompaggio.

Contrariamente al caso del funzionamento a gravità visto negli Esercizi 2.1 e 2.2, in questo caso l'andamento della linea dei carichi totali, invece che essere sempre decrescente, presenta un aumento nel senso del moto, con discontinuità, fra le sezioni a monte ed a valle della pompa. Qualitativamente l'andamento della linea dei carichi totali si può analizzare come per i casi precedenti, avendo cura di rispettare le condizioni al contorno del problema, rappresentate dalle quote dei peli liberi nei due serbatoi, ζ_A e ζ_B . Si parte pertanto dal serbatoio A con la sequenza di perdite localizzate e distribuite esaminate in precedenza, fino alla sezione immediatamente a monte della pompa. Analogamente, si procede dal serbatoio B, a ritroso, fino alla sezione immediatamente a valle della pompa, con carichi totali crescenti.

In corrispondenza della pompa si deve produrre pertanto un differenziale di carico totale fra monte e valle detto *prevalenza totale* della pompa, indicato con il simbolo ΔH . Il corrispondente differenziale di quota piezometrica:

$$\Delta H_m = \left(H_v - \frac{U_3^2}{2g} \right) - \left(H_m - \frac{U_2^2}{2g} \right) = \left(z_v + \frac{p_v}{\gamma} \right) - \left(z_m + \frac{p_m}{\gamma} \right) = \Delta H - \left(\frac{U_3^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \right) \quad (2.8)$$

prende il nome di *prevalenza manometrica*. Nella pratica conviene determinare la prevalenza totale di una pompa in funzionamento indirettamente, misurando la prevalenza manometrica mediante manometri e sommandovi la differenza delle altezze cinetiche fra valle e monte della pompa,, secondo la equazione (2.8).

Introducendo la prevalenza totale nella equazione del moto, quest'ultima, ulteriormente generalizzata per estensione ai moti con immissioni di energia localizzate, si scrive:

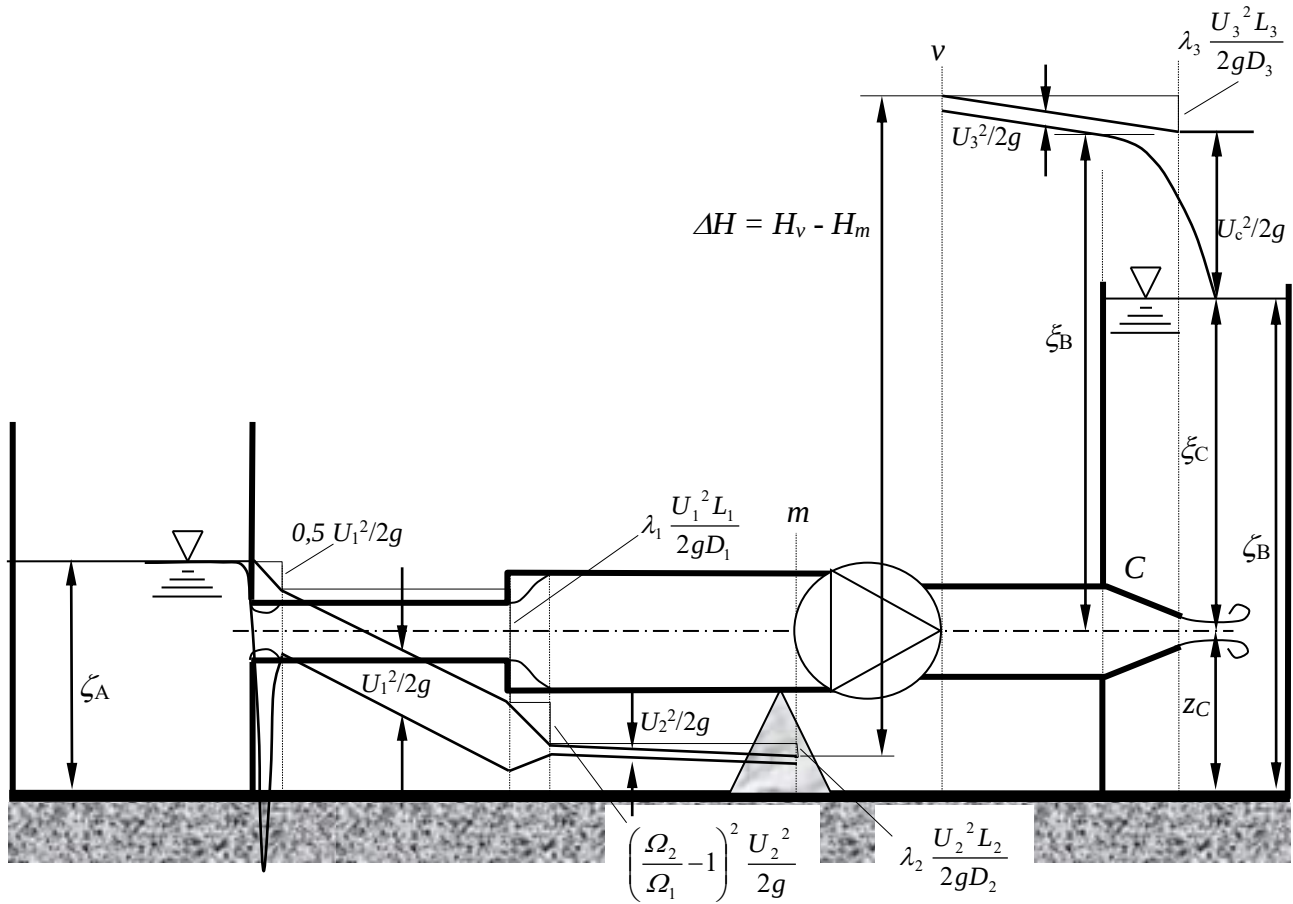


Figura 2.22

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2g D_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2g D_2} L_2 - \Delta H + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2g D_3} L_3$$

con:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \zeta_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong \zeta_B + \frac{U_c^2}{2g} .$$

Eseguendo la ormai familiare operazione di riduzione dei termini cinetici e della perdite di carico in funzione del quadrato della portata, si ottiene una equazione che lega i valori di prevalenza totale richiesti in funzione delle portate circolanti corrispondenti, detta *equazione caratteristica della condotta*:

$$\Delta H = \zeta_B - \zeta_A + KQ^2 ,$$

in cui il coefficiente K è dato dalla espressione:

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2}$$

e che, si badi, prescinde dalle modalità di funzionamento della pompa. La prevalenza totale è quindi somma di un termine:

$$\Delta H_g = \zeta_B - \zeta_A$$

detto *prevalenza geodetica*, che rappresenta il minimo valore possibile della prevalenza totale in assenza di perdite di carico, con il termine esprimente le perdite di carico. Evidentemente, quest'ultimo termine tende a zero al tendere all'infinito dei diametri di tutti i tratti della condotta, tendendo in tal caso a zero il coefficiente K . Nel caso di sbocco in aria, la quota ζ_B di riferimento per il calcolo della prevalenza geodetica ΔH_g è quella dell'asse della condotta allo sbocco.

Si definiscono, inoltre:

- *altezza geodetica di aspirazione* (H_{ga}): differenza di quota fra l'intradosso della sezione immediatamente a monte della pompa ed il pelo libero della vasca di monte (quando l'intradosso della sezione a monte della pompa si trova a quota superiore al pelo libero):
- *battente geodetica* (H_{gb}): differenza di quota fra il pelo libero della vasca di monte e l'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa (quando questa si trova a quota inferiore al pelo libero, vedi Figura 2.21, dove $H_{gb} = \xi_a - D_2/2$):
- *altezza geodetica di mandata* (H_{gm}): differenza di quota fra il pelo libero della vasca di valle e l'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa (Figura 2.21):

Il funzionamento della pompa è descritto da una equazione del tipo $\Delta H = f(Q)$, detta *curva caratteristica della pompa*, di cui è riportato un esempio in Figura 2.23 (ove la prevalenza viene però indicata con il simbolo H). Nella stessa figura sono anche riportate, sempre per la stessa pompa, in funzione della portata: le curve della potenza assorbita all'asse (N_a), del rendimento (η), del cosiddetto NPSH (*Net Positive Suction Head*, letteralmente: carico positivo netto di aspirazione) e della differenza delle altezze cinetiche fra la bocca di mandata ($V_2^2/2g$) e la bocca di aspirazione ($V_1^2/2g$). Questo ultimo è il termine che, sommato alla prevalenza manometrica, fornisce la prevalenza totale (equazione 2.8).

Essendo $P = \gamma Q H$ la potenza di una corrente di portata Q di un liquido di peso specifico γ in una sezione in cui il carico totale è pari ad H , la potenza che la pompa fornisce alla corrente (incremento di potenza della corrente fra monte e valle della pompa), detta *potenza utile*, è data da:

$$N_u = \gamma Q \Delta H$$

e la potenza assorbita all'asse:

$$N_a = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta} .$$

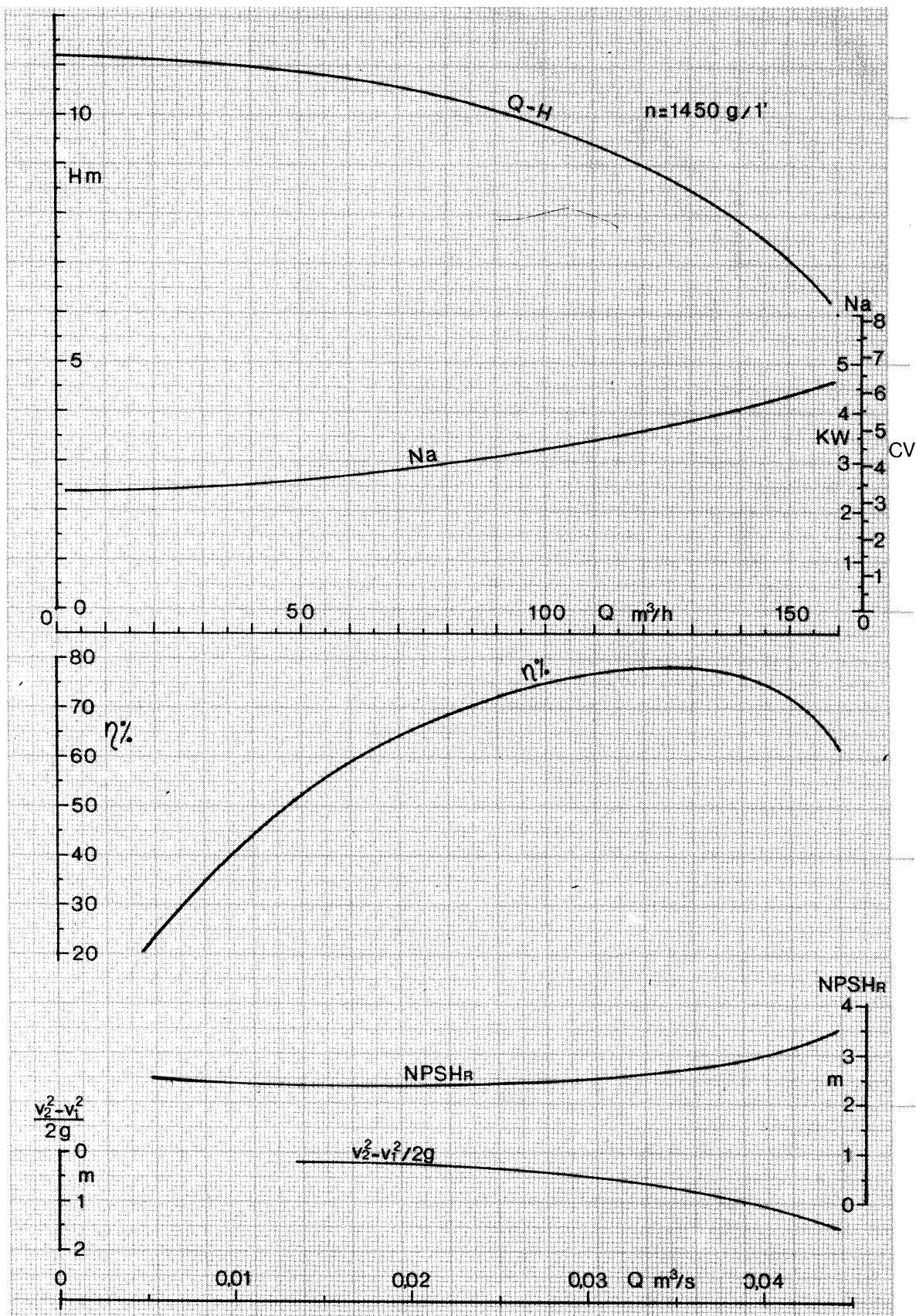


Figura 2.23. Curve caratteristica, della potenza assorbita, del rendimento, dell' $NPSH_R$ e del differenziale delle altezze cinetiche mandata-aspirazione per una pompa centrifuga in funzione della portata, a numero di giri costante ($n = 1450 \text{ g/min}$).

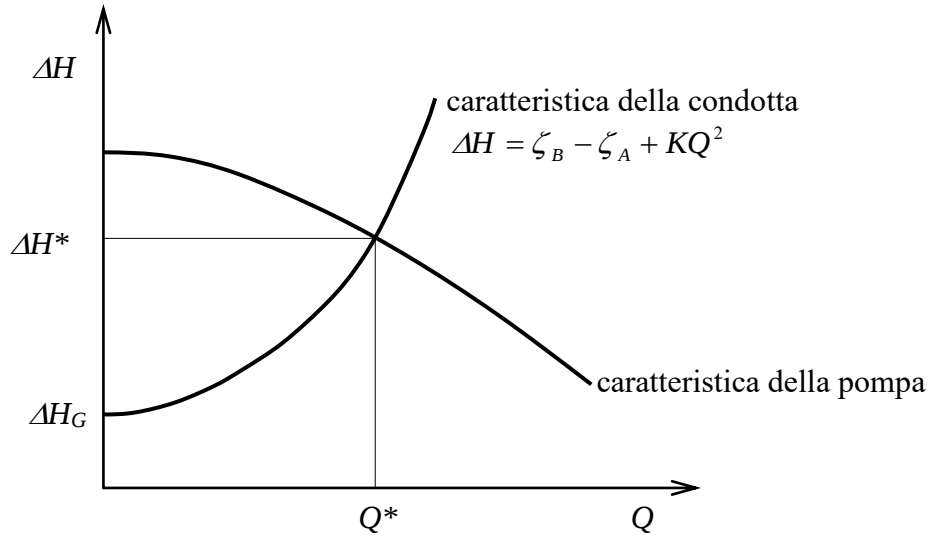


Figura 2.24. Determinazione del punto di funzionamento di un sistema pompa - condotta

Le due equazioni caratteristiche, della condotta e della pompa, devono essere verificate simultaneamente, per cui il punto di funzionamento del sistema condotta + pompa è rappresentato dal punto di intersezione delle due curve (ovviamente, tracciate utilizzando *le stesse unità di misura*), come mostrato in Figura 2.24.

L'effettiva possibilità di realizzare il passaggio di una data portata dipende dal regime delle pressioni che si stabiliscono nelle varie sezioni della condotta. Come può vedersi dalla Figura 2.22, la condotta a monte della pompa (*condotta di aspirazione*) è soggetta in vari punti a condizioni di depressione. In particolare, le sezioni critiche sotto questo profilo sono la sezione contratta in prossimità dell'imbocco e la sezione immediatamente a monte della pompa. All'interno delle singole sezioni, il punto a pressione minima sarà quello posto alla quota massima: il punto di intradosso della condotta.

Detto ξ_a l'affondamento dell'asse della condotta rispetto alla superficie libera del serbatoio A, e ricordato che la prima parte della perdita di imbocco che si osserva nella sezione contratta è data, per l'imbocco a spigolo vivo, da $0,1 U_1^2/2g$, la massima depressione nella sezione contratta si calcola dalla relazione (vedi Figura 2.25):

$$0,1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{U_c^2}{2g} = \xi_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{c_{min}}}{\gamma},$$

ottenuta da semplici considerazioni geometriche sul dislivello fra il pelo libero nel serbatoio ed il punto di minimo della piezometrica. La pressione $p_{c_{min}}$ è presa col proprio segno ed è pertanto, nel caso in questione, negativa. Il corrispondente valore dell'altezza piezometrica è dato da:

$$\frac{p_{c_{min}}}{\gamma} = \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g}.$$

La corrispondente pressione assoluta all'intradosso è data pertanto da:

$$p_{c_{min}}^* = p_{atm}^* + p_{c_{min}}.$$

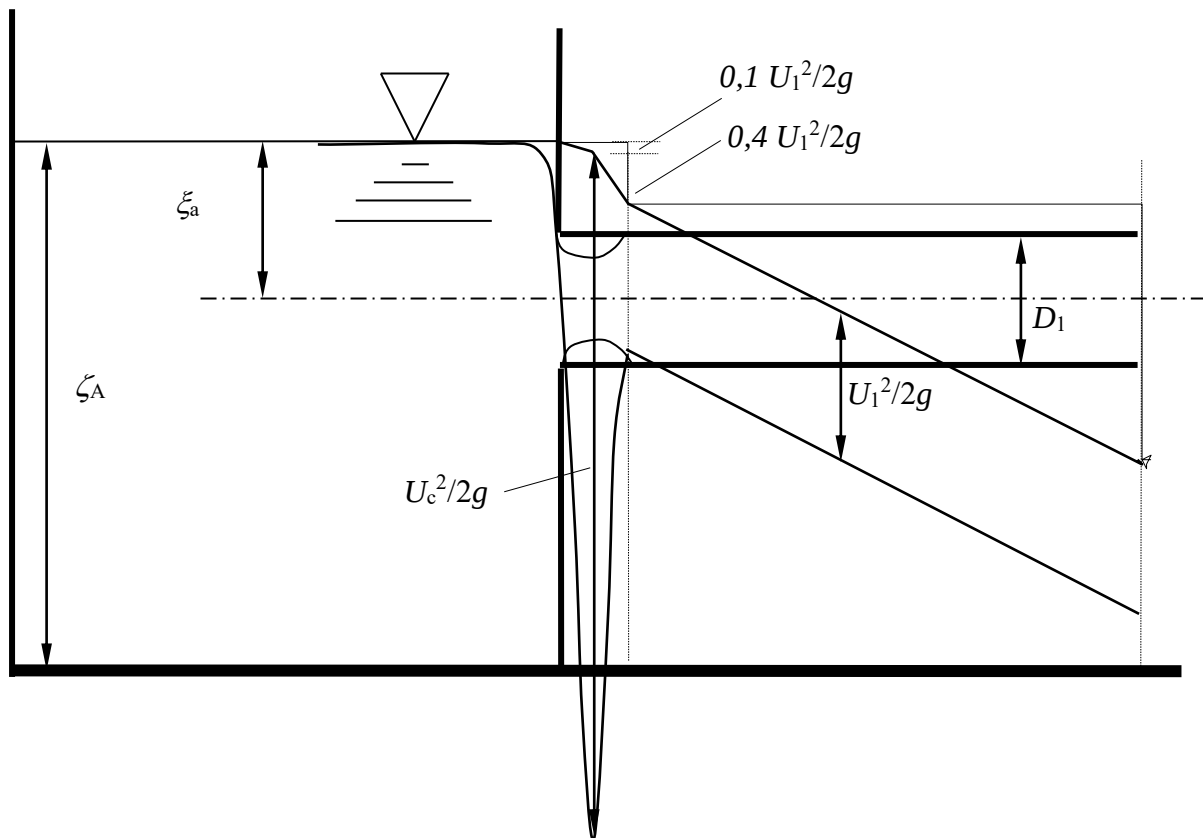


Figura 2.25. Dettaglio della linea piezometrica nella sezione contratta dell'imbocco.

Il limite massimo al quale si può spingere la depressione corrisponde al raggiungimento di una pressione assoluta pari alla *tensione di vapore* (o pressione di vapor saturo) p_v^* del liquido convogliato nelle particolari condizioni di funzionamento¹⁰.

Deve essere perciò verificata la condizione:

$$p_{c_{\min}} + p_{atm} > p_v^*$$

In caso contrario, il liquido tende a passare massivamente in fase gassosa attraverso la formazione di bolle di vapore al suo interno (*cavitazione*). Tale fenomeno comporta innanzitutto un generale irregolare e rumoroso funzionamento della condotta, per effetto della eterogeneità del fluido convogliato, esaltata dalla continua formazione e successiva chiusura delle cavità gassose. Inoltre, gli urti che il liquido esercita in tal modo sulle pareti della condotta e sugli organi mobili della pompa (girante) risultano particolarmente nocivi nei confronti di questi ultimi e sono in grado di mettere fuori uso la macchina in breve tempo. A tale risultato contribuisce ulteriormente l'azione ossidante sulle parti metalliche della pompa legata alla maggiore disponibilità di ossigeno libero, per effetto della diminuzione della solubilità dei gas nei liquidi al diminuire della pressione. In tali

¹⁰ La tensione di vapore rappresenta una misura quantitativa della tendenza di un liquido a passare in fase gassosa per effetto dell'energia cinetica delle molecole che lo costituiscono. Se si pone un liquido a occupare solo parte del volume di un contenitore chiuso nel quale venga realizzato il vuoto, la pressione assoluta, inizialmente nulla, aumenta al passare del tempo: ciò accade perché il numero di molecole che, nell'unità di tempo, passano dal liquido alla fase gassosa è maggiore del numero di molecole che, dalla fase gassosa, rientrano nel liquido. La pressione raggiunge, dopo un certo tempo, un valore massimo che si mantiene costante nel tempo: si è raggiunto un equilibrio dinamico per cui il numero di molecole che, nell'unità di tempo, passano dal liquido alla fase gassosa è uguale al numero di molecole che, dalla fase gassosa, rientrano nel liquido. Il valore della pressione che si misura a regime è pari, numericamente, al valore della tensione di vapore della sostanza liquida.

condizioni, infatti, parte dell'aria che si trovava in soluzione nel liquido nella vasca di presa tende anch'essa a passare allo stato gassoso, seppure in misura meno eclatante rispetto al fenomeno della cavitazione (tale fenomeno è il medesimo che si osserva nei punti di massima quota di una normale condotta e che richiede l'installazione di opportuni organi di sfiato per l'eliminazione delle bolle).

In funzione dei dati del problema in questione deve pertanto aversi:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} > \frac{p_v^*}{\gamma} . \quad (2.9)$$

Lo stesso tipo di verifica occorre fare, come detto, anche alla sezione di entrata della pompa. Più precisamente, ai fini di tale verifica bisogna tenere conto del fatto che i minimi valori di pressione si riscontrano all'interno della macchina, all'imbocco della girante, per effetto sia di perdite di carico totale – sia distribuite che, soprattutto, localizzate all'imbocco della girante – che della velocità all'ingresso nella girante, U_g . La verifica della massima depressione va fatta pertanto tenendo conto di tale perdita di carico aggiuntiva, Δh , e dell'altezza cinetica all'ingresso della girante, $U_g^2/2g$, i cui andamenti in funzione della portata sono determinati dal costruttore, che li fornisce sotto forma di una grandezza ad essi legata: l' $NPSH_R$ di cui alla Figura 2.23.

Introducendo il battente geodetico:

$$H_{gb} = \xi_a - \frac{D_2}{2}$$

e raccogliendo tutte le perdite di carico in un termine:

$$\Delta y = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 ,$$

un'analisi simile a quella condotta per la sezione contratta all'imbocco consente di esprimere la pressione relativa minima (massima depressione) all'interno della macchina:

$$H_{gb} - \frac{p_{min}}{\gamma} = \Delta y + \frac{U_g^2}{2g} + \Delta h ,$$

da cui si ottiene la condizione per il funzionamento regolare della pompa:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{U_2^2}{2g} - \Delta h > \frac{p_v^*}{\gamma}$$

esprimibile nella forma:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma} > \frac{U_2^2}{2g} + \Delta h ,$$

nella quale

$$NPSH_R = \frac{U_2^2}{2g} + \Delta h$$

è il valore di $NPSH$ minimo richiesto, caratteristico della singola pompa, il cui andamento in funzione della portata è riportato in Figura 2.23, e:

$$NPSH_a = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma}$$

è il valore di $NPSH$ disponibile (*available* in lingua inglese) all'imbocco della pompa. In sostanza la verifica viene fatta calcolando un $NPSH$ disponibile che dipende soltanto da termini noti ($p_{atm}^*/\gamma, p_v^*/\gamma$) o calcolabili sulla base della conformazione della condotta ($H_{gb}, \Delta y$) e confrontandolo con il valore minimo ammissibile fornito dal costruttore.

Nel caso si abbia a che fare con una pompa la cui sezione di ingresso stia a quota superiore del pelo libero di monte, dovrà considerarsi una prevalenza di aspirazione H_{ga} ; tutte le formule scritte sono ancora valide purché si sostituisca $-H_{ga}$ ad H_{gb} .

In pratica, particolarmente per quanto riguarda la pompa, è buona norma adottare criteri più cautelativi di quello esposto in precedenza, limitando la depressione massima ad un valore inferiore al limite corrispondente al raggiungimento di pressioni assolute pari alla tensione di vapore. Una congrua maggiorazione della pressione assoluta minima di riferimento rispetto al valore della tensione di vapore può essere indicato nell'ordine di 0,5 m di colonna di liquido.

L'esito negativo della verifica *impone necessariamente il ridimensionamento della condotta*.

Calcolo della portata massima convogliabile

Per ciascuna delle due sezioni di controllo si possono definire le condizioni critiche relative al raggiungimento di un valore della pressione minima pari alla tensione di vapore (o eventualmente ad una pressione maggiore, più cautelativa). Dipendendo il raggiungimento di tali condizioni dalla presenza delle perdite di carico, esse definiscono un valore massimo della portata che può essere convogliata dalla condotta in oggetto *indipendentemente dalla potenza della pompa*. Tale valore sarà dato dal minore dei due valori di portata che si ottengono, per ciascuna delle sezioni di controllo, imponendo sulla sezione la pressione assoluta minima (depressione massima) che si è disposti ad accettare in condotta, p_{acc}^* , comunque non inferiore alla tensione di vapore del liquido.

Per la sezione contratta all'imbocco il valore della portata critica si ottiene imponendo il segno di uguaglianza nella equazione (2.9):

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma}$$

da cui, nel caso il liquido sia acqua:

$$10,33 + \xi_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2} - \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2 C_c^2} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma},$$

nella quale sono stati introdotti il valore di colonna d'acqua corrispondente alla pressione atmosferica standard (10,33 m) e il coefficiente di contrazione all'imbocco, C_c .

Si ottiene quindi il valore della portata critica per la sezione di imbocco:

$$Q_{cr_i} = \sqrt{\frac{10,33 + \xi_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{acc}^*}{\gamma}}{0,1 \frac{1}{2g\Omega_1^2} + \frac{1}{2g\Omega_1^2 C_c^2}}}$$

Analogamente, per la sezione di controllo all'aspirazione della pompa si avrà, in condizioni critiche:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y(Q_{cr_a}) - \frac{p_{acc}^*}{\gamma} = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta h = NPSH_R(Q_{cr_a}) \quad (2.10)$$

da cui si può dedurre – per via grafica, dal momento che l'andamento di $NPSH_R$ è fornito in tale forma – il valore della portata critica corrispondente. In pratica ciò si realizza tracciando, sul grafico del $NPSH_R$ fornito dal costruttore (Figura 2.23) la curva dei valori del primo membro della (2.10) in funzione di Q , che è una parabola avente concavità rivolta verso il basso. Il valore di portata del punto di intersezione delle due curve rappresenta il valore critico per l'aspirazione della pompa. Si rimarca come valori di portata maggiori *richiedano necessariamente il ridimensionamento della condotta*, non essendo realizzabili con l'installazione di una pompa di maggiore potenza.

Esercizio 2.4

Si vuole sopperire al fabbisogno idrico q_3' di un centro abitato E con le acque delle sorgenti A e B , le cui portate q_1' e q_2' stanno nel rapporto assegnato. Si vuole allacciare le sorgenti mediante condotte in acciaio AC e BC , che in C si collegano con un tubo di ghisa usato, già in opera, del diametro D_3 .

Calcolare i diametri commerciali da assegnare alle condotte AB ed AC e le rispettive lunghezze, e tracciare le piezometriche. Nell'ipotesi che le condotte AC e BC siano formate da tubi nuovi, calcolare:

- le portate convogliate nei tre tronchi;
- il valore della perdita di carico da produrre con una valvola di riduzione posta lungo la condotta CE perché a tubi nuovi arrivi in E ancora la portata iniziale q_3' , e l'area della luce libera che la valvola deve possedere.

Dati:

- fabbisogno idrico del centro E , q_3' ;
- rapporto fra le portate q_1' e q_2' , $\kappa = q_1'/q_2' = 0.6$;
- lunghezze L_1 , L_2 e L_3 dei tratti AC , BC e CE rispettivamente;
- diametro D_3 ;
- quote dei serbatoi ζ_A , ζ_B ed ζ_E ;
- scabrezza di Strickler della tubazione di ghisa esistente nel tratto CE , c_{gu} ;
- scabrezze dei tubi di acciaio in condizioni di tubi nuovi ed usurati, c_{an} e c_{au} .

Le condotte di adduzione per usi idropotabili possono generalmente essere comprese nella categoria delle cosiddette *lunghe condotte*. Si dice lunga condotta una condotta nella quale le altezze cinetiche, e quindi anche i termini ad esse proporzionali costituiti dalle perdite localizzate, possano considerarsi trascurabili al confronto delle perdite distribuite. Con riferimento alla formula di Darcy-Weisbach per il calcolo di queste ultime, tale condizione si esprime come segue:

$$\frac{U^2}{2g} \ll \lambda \frac{U^2}{2gD} L \quad (2.11)$$

A titolo di esempio, si consideri una tubazione di diametro interno $D = 200$ mm con rivestimento interno cementizio centrifugato, per la quale può adottarsi un valore di scabrezza assoluta equivalente $\varepsilon = 0,10$ mm. Per tale tubazione si calcola una scabrezza relativa $\varepsilon/D = 0,0005$ e, dall'abaco di Moody (Figura 2.2), per il moto turbolento pienamente sviluppato, il valore del coefficiente di resistenza $\lambda \cong 0,017$.

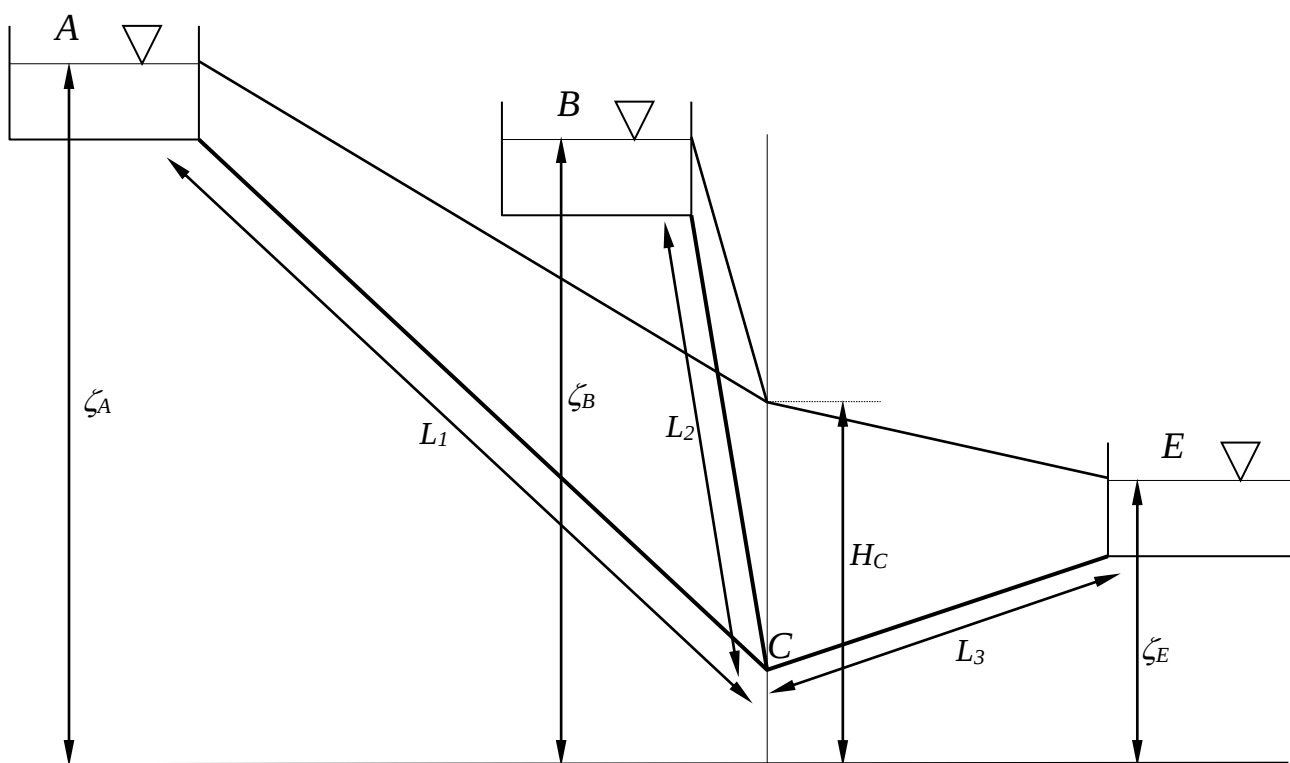


Figura 2.26

Sostituendo nell'equazione (2.11) e semplificando, si ricava la condizione:

$$\frac{D}{L} \ll 0,017.$$

Assumendo trascurabile uno scarto del 4%, la condizione per poter considerare una condotta lunga nel senso descritto in precedenza può scriversi:

$$\frac{D}{L} \approx 0,00068,$$

che, per il diametro di 200 mm, fornisce una lunghezza minima $L \approx 356$ m. Si osservi che valori di lunghezza di tale ordine sono senz'altro largamente superati nelle condotte di adduzione (esterne agli abitati) e frequentemente anche nelle condotte di distribuzione interna. Il risultato si può generalizzare indicando un rapporto minimo fra lunghezza e diametro della tubazione dell'ordine del migliaio, perché questa possa considerarsi lunga nel senso detto.

Per lo svolgimento del problema si farà riferimento alla formula di Chezy per il calcolo delle perdite di carico. L'espressione del coefficiente di Chezy in funzione della scabrezza di Strickler, consente di scrivere le equazioni del moto nei vari tratti in forma monomia. Si ha infatti:

$$J = \frac{U^2}{C^2 R_i} = \frac{q^2}{C^2 R_i \Omega^2} = \frac{q^2}{c^2 R_i^{4/3} \Omega^2} = \frac{q^2}{c^2 (D/4)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2} = k q^2 D^{-n},$$

dove c è il coefficiente di scabrezza di Strickler ed R_i è il raggio idraulico della condotta, con:

$$k = \frac{4^{10/3}}{c^2 \pi^2} \quad , \quad n = \frac{16}{3} = 5,333 \quad .$$

Sulla base del coefficiente di scabrezza per la tubazione di ghisa, che si suppone in condizioni deteriorate, si determina per tale tratto il valore della costante k_{gu} contenuta nella formula monomia. La quota nel nodo C relativa al passaggio della portata q_3 ¹¹ è data pertanto da:

$$H_C = \zeta_E + J_3 L_3 = \zeta_E + k_{gu} q_3'^2 D_3^{-n} L_3 = H_C' \quad .$$

Per ciascuna delle due condotte in acciaio, AC e BC, può ora essere determinato il diametro teorico – che, in generale, non avrà riscontro nella produzione industriale corrente. Le corrispondenti portate nei due tronchi si determinano imponendo le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} q_1'/q_2' = 0,6 \\ q_1' + q_2' = q_3' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1' = \frac{0,6}{1,6} q_3' \\ q_2' = \frac{1}{1,6} q_3' \end{cases} \quad .$$

Il diametro teorico del tronco AC si determina imponendo il valore della perdita di carico determinata dal livello assegnato nel serbatoio A e dalla quota piezometrica determinata per il nodo C. In fase di dimensionamento, occorrerà riferirsi alle condizioni di funzionamento più sfavorevoli, ossia, alle condizioni dei tubi alla fine della vita utile. In termini di coefficiente di scabrezza di Strickler ciò significa adottare un valore c_{au} numericamente inferiore al valore c_{an} relativo ai tubi nuovi (un valore superiore in termini di scabrezze di Bazin, Kutter, Manning, Colebrook-White). Il valore della costante della formula monomia è dato perciò da:

$$k_{au} = \frac{4^{10/3}}{c_{au}^2 \pi^2} \quad .$$

L'equazione del moto per il tronco AC si scrive pertanto:

$$\zeta_A - H_C' = k_{au} q_1'^2 D_1^{-5,333} L_1 \quad ,$$

dalla quale si ricava il valore del diametro teorico:

$$D_1 = \left(\frac{k_{au} q_1'^2 L_1}{\zeta_A - H_C'} \right)^{\frac{1}{5,333}}$$

Come accennato, nel caso generale non si disporrà di tubazioni commerciali aventi il diametro teorico così determinato. Il tronco verrà allora realizzato con una successione dei due diametri commerciali consecutivi disponibili nel listino del costruttore, D_1' e D_1'' , fra i quali ricade il valore del diametro teorico, D_1 . Imponendo che lungo le relative due tratte si abbia una perdita di carico pari a quella di progetto (prodotta dal diametro teorico) e che la somma delle lunghezze delle due tratte, L_1' ed L_1'' sia pari all'intera lunghezza del tronco, L_1 , si scrive il seguente sistema lineare:

¹¹ I valori dei coefficienti di scabrezza sono usualmente espressi nei manuali tecnici nelle unità del sistema internazionale (S.I.). I fabbisogni idrici dei centri abitati vengono invece sovente espressi in l/s. Volendo lavorare con le unità S.I., occorrerà preventivamente esprimere le portate in m³/s.

$$\begin{cases} k_{au} q_1'^2 D_1'^{-n} L_1' + k_{au} q_1''^2 D_1''^{-n} L_1'' = \zeta_A - H_C' \\ L_1' + L_1'' = L_1 \end{cases},$$

che consente di determinare le lunghezze incognite delle due tratte. In modo del tutto analogo si determinano diametri commerciali e lunghezze delle due tratte del tronco BC .

Verifica a tubi nuovi, senza organi di regolazione

La condotta deve ora essere verificata per le varie situazioni di funzionamento. In particolare, a tubazioni nuove queste sono meno scabre ed esercitano perciò resistenze al moto inferiori rispetto alle stesse tubazioni in condizioni deteriorate, considerate per il dimensionamento. In assenza di organi di regolazione, le portate defluenti nei tre tronchi e la quota piezometrica nel nodo C si determinano risolvendo il seguente sistema di tre equazioni del moto e di una equazione di continuità al nodo C :

$$\begin{cases} k_{an} q_1^2 D_1'^{-n} L_1' + k_{an} q_1^2 D_1''^{-n} L_1'' = \zeta_A - H_C \\ k_{an} q_2^2 D_2'^{-n} L_1' + k_{an} q_2^2 D_2''^{-n} L_2'' = \zeta_B - H_C \\ k_{gu} q_3^2 D_3^{-n} L_3 = H_C - \zeta_E \\ q_1 + q_2 = q_3 \end{cases},$$

esprimibile nella forma sintetica:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} \\ q_2 = \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} \\ q_3 = \sqrt{\frac{H_C - \zeta_E}{K_3}} \\ q_1 + q_2 = q_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} K_1 &= k_{an} D_1'^{-n} L_1' + k_{an} D_1''^{-n} L_1'' \\ K_2 &= k_{an} D_2'^{-n} L_1' + k_{an} D_2''^{-n} L_2'' \\ K_3 &= k_{gu} D_3^{-n} L_3 \end{aligned}$$

Una soluzione della (2.1) in forma grafica può ottenersi nel seguente modo: si tracciano in un piano cartesiano le curve $q_1 = f_1(H_C)$, $q_2 = f_2(H_C)$, $q_3 = f_3(H_C)$, e $q_1 + q_2 = f_1(H_C) + f_2(H_C)$; in virtù della equazione di continuità la soluzione è rappresentata dal punto di intersezione delle due ultime curve, $q_3 = f_3(H_C)$ e $q_1 + q_2 = f_1(H_C) + f_2(H_C)$. In corrispondenza del valore così determinato della quota piezometrica nel nodo C , H_C' , si leggono dalle rispettive curve anche i valori di q_1 e q_2 .

Affinché i versi delle portate siano gli stessi imposti in fase di progetto, dalla soluzione del sistema dovrà ottenersi $H_C < \zeta_B$. In caso contrario occorrerà riscrivere l'equazione del moto del lato corrispondente e l'equazione di continuità:

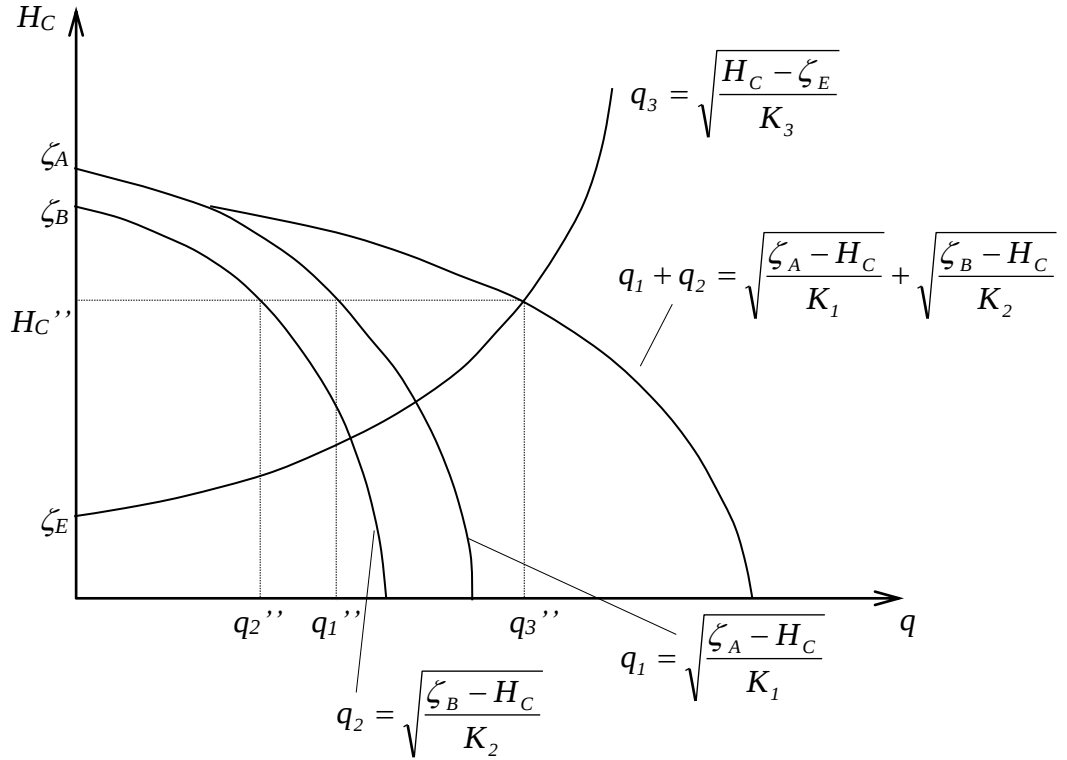


Figura 2.27. Soluzione grafica del problema di verifica (sistema di equazioni (2.12)).

$$q_2 = \sqrt{\frac{H_C - \zeta_B}{K_2}} \quad ; \quad q_1 = q_2 + q_3$$

e ripetere il calcolo.

Una soluzione numerica può ottenersi riproducendo, in sostanza, lo stesso procedimento della soluzione grafica, calcolando, per vari valori di H_C compresi nell'intervallo $[\zeta_E, \zeta_B]$, la differenza:

$$(q_1 + q_2) - q_3 = \sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} - \sqrt{\frac{H_C - \zeta_E}{K_3}}$$

per individuare i due valori di H_C in corrispondenza dei quali tale differenza cambia di segno. Da questo punto in poi la radice può determinarsi con la precisione desiderata reiterando il calcolo della differenza nel punto medio dei due precedentemente individuati dal cambio di segno ed assumendo, come nuova coppia di punti, il punto medio e quello dei due punti precedenti per il quale la differenza assume segno opposto rispetto a quello determinato per il punto medio, cosicché si abbia la certezza che la radice è compresa fra tali due punti (Figura 2.28).

In alternativa, scrivendo l'equazione di continuità con le portate espresse in funzione della quota piezometrica H_C :

$$\sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} = \sqrt{\frac{H_C - \zeta_E}{K_3}} ,$$

una prima quadratura fornisce:

H_C	segno $q_1+q_2-q_3$
ζ_E	+
$\zeta_E + 0.1(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.2(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.3(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.4(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.5(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.6(\zeta_B - \zeta_E)$	+
$\zeta_E + 0.7(\zeta_B - \zeta_E)$	—
$\zeta_E + 0.8(\zeta_B - \zeta_E)$	—
$\zeta_E + 0.9(\zeta_B - \zeta_E)$	—
ζ_B	—

Figura 2.28. Schema del procedimento iterativo per la soluzione del sistema (2.12).

$$\frac{\zeta_A - H_C}{K_1} + \frac{\zeta_B - H_C}{K_2} + 2\sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} = \frac{H_C - \zeta_E}{K_3}.$$

Riordinando e quadrando nuovamente si ottiene:

$$\left(\frac{\zeta_A - H_C}{K_1} + \frac{\zeta_B - H_C}{K_2} - \frac{H_C - \zeta_E}{K_3} \right)^2 = 4 \frac{\zeta_A - H_C}{K_1} \frac{\zeta_B - H_C}{K_2},$$

ossia, una equazione di secondo grado, della quale si ricava, delle due radici possedute, quella che soddisfa le condizioni specifiche del caso (H_C reale, $\zeta_E < H_C < \zeta_B$).

Dimensionamento della valvola riduttrice di pressione

La verifica del funzionamento del sistema di condotte nelle quali i tratti AB e BC siano costituiti da tubi nuovi darà in generale, come risultato, una portata complessiva eccedente quella richiesta dall'utenza E , supposta invariata rispetto al dato di progetto. Il flusso della portata desiderata con le tubazioni dei tratti AB e BC nuove si potrà ottenere introducendo nella condotta CE una valvola riduttrice di pressione opportunamente regolata.

Indicando con il simbolo Δ la perdita di carico localizzata, incognita, procurata dalla valvola, il sistema di equazioni che descrive il funzionamento del sistema di condotte si scrive:

$$\begin{cases} k_{an} q_1^2 D_1'^{-n} L_1' + k_{an} q_1^2 D_1''^{-n} L_1'' = \zeta_A - H_C \\ k_{an} q_2^2 D_2'^{-n} L_1' + k_{an} q_2^2 D_2''^{-n} L_2'' = \zeta_B - H_C \\ k_{gu} q_3^2 D_3^{-n} L_3 + \Delta = H_C - \zeta_E \\ q_1 + q_2 = q_3 \end{cases}$$

in cui la portata $q_3 = q_3'$ è ora assegnata. Esplicitando le portate nelle prime due equazioni, come fatto precedentemente, e la perdita localizzata nella terza equazione, si ottiene la forma:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\frac{\zeta_A - H_C}{K_1}} \\ q_2 = \sqrt{\frac{\zeta_B - H_C}{K_2}} \\ \Delta = H_C - \zeta_E - K_3 q_3'^2 \\ q_1 + q_2 = q_3' \end{cases} \quad (2.13)$$

Analogamente a quanto fatto per la verifica a tubi nuovi in assenza di valvole riduttrici di pressione, il valore del carico piezometrico nel nodo C, H_C''' , si determina come ascissa della curva $q_1 + q_2 = f_1(H_C) + f_2(H_C)$ corrispondente al valore di portata $q_1 + q_2 = q_3'$. In corrispondenza di tale valore del carico si determinano le portate q_1 e q_2 e, dalla terza equazione del sistema (2.13), il valore della perdita Δ da realizzare con la valvola riduttrice di pressione.

Il problema della determinazione della perdita di carico Δ può anche risolversi con metodi simili a quelli illustrati per la verifica a tubi nuovi.

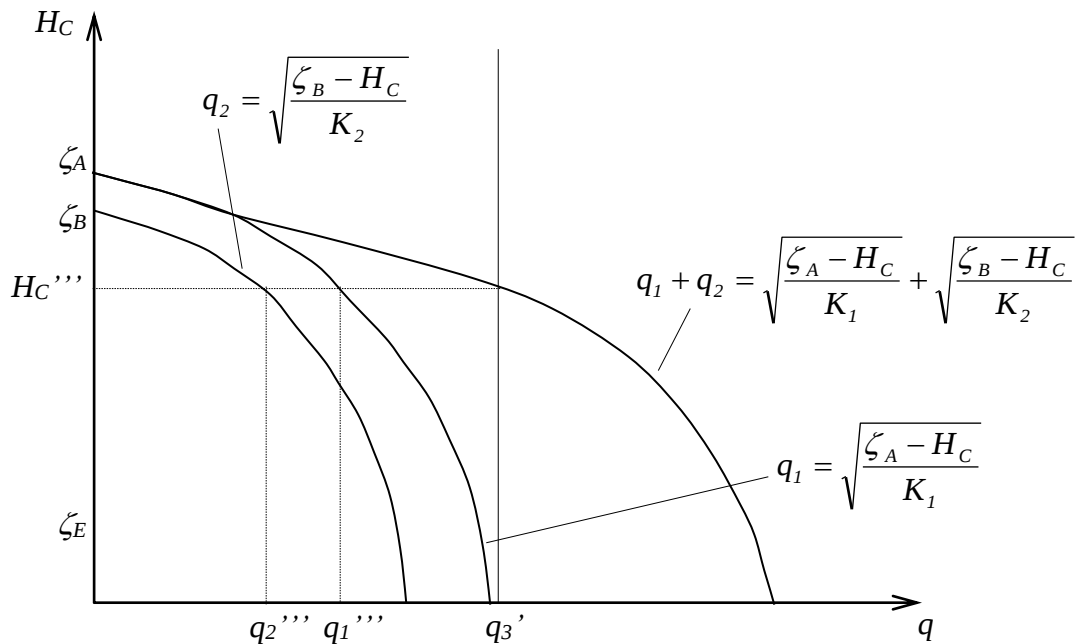


Figura 2.29. Soluzione grafica del problema di dimensionamento della valvola riduttrice.

Determinazione dell'area della luce libera della valvola

Nella valvola, la perdita di pressione Δ testé determinata viene realizzata per effetto del brusco allargamento della sezione della corrente. Detta Ω_v l'area della luce libera della valvola, il suo valore si ottiene dalla espressione della perdita di Borda, posta uguale a Δ :

$$\Delta = \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_v} - 1 \right)^2 \frac{U_3^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_v} - 1 \right)^2 \frac{q_3'^2}{2g\Omega_3^2} ,$$

dalla quale si ottiene infine:

$$\Omega_v = \frac{\Omega_3}{1 + \sqrt{2g\Delta} \frac{\Omega_3}{q_3'^2}}$$